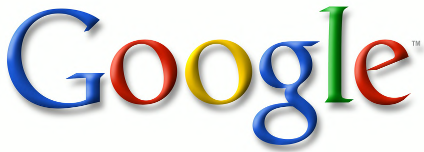
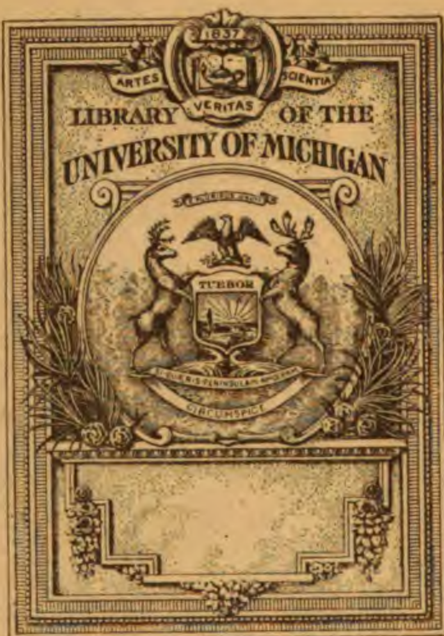
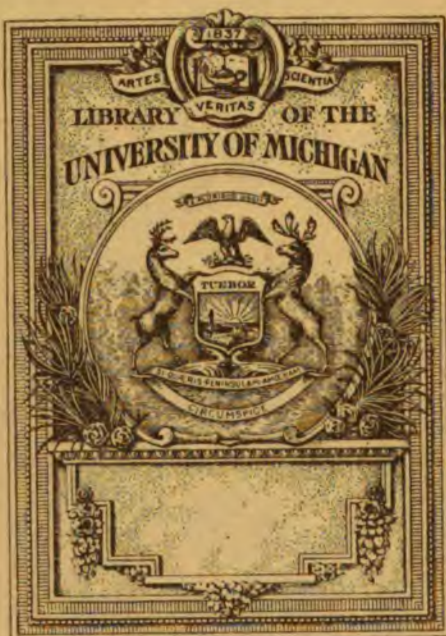
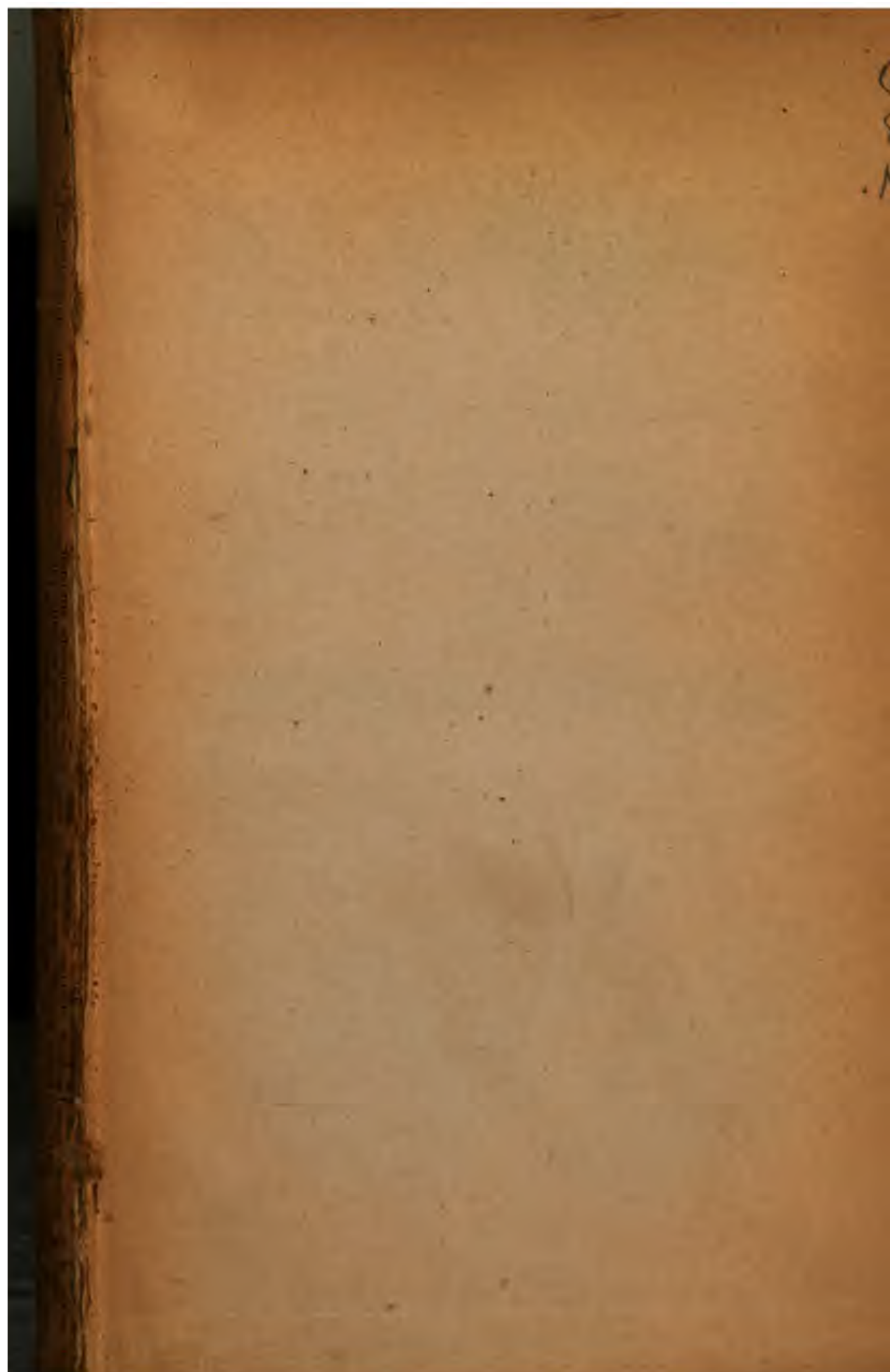





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



DZIEŁA MATEMATYCZNE

PROFESSORA G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO.

Arytmetyka. Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, teoryę przybliżeń liczebnych, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb; wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia, in-8°. Paryż, 1866 r. 4 fran.

Geometrya. Kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnej, a mianowicie : teoryę poprzecznych, biegunowych, oś pierwiastną, koło styczne do trzech kół; podział jednokreślny, inwolucyę; przecięcia stożkowe; jednokładność figur, płaszczyznę pierwiastną i biegunową, koła styczne na sferze, sferę styczną do czterech sfer; maximum figur w przestrzeni; zasady perspektywy, wiedzę o helicy i o stożkowej sferycznej, przekształcenia przez promienie wodzące odwrotne, etc., in-8°, z figurami w tekscie. Paryż, 1869, 8 fr.

Trygonometrya *prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* Zastosowania do Geometryi i do Algebry. Paryż, 1870, in-8°, stronic xv i 407. Cena fr. 4 cent. 50.

Mechanika rozumowa. Dwa tomy, in-8°. Paryż, 1873-1876. Cena fr. 25.

PARYŻ. — DRUKARNIA E. MARTINET, ULICA MIGNON, 2

KURS
MECHANIKI ROZUMOWEJ

PRZEZ

G.-H. NIEWĘGŁOWSKIEGO

PROFESSORA MATEMATYKI W PARYŻU

TOM DRUGI

CYNEMATYKA — DYNAMIKA UKŁADÓW MATERYALNYCH.
HYDROSTATYKA I HYDRODYNAMIKA

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIÉJ

PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH

NAUKOWÉJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU

1876

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-13-1923

SPIS PRZEDMIOTÓW

TOMU DRUGIEGO

CYNEMATYKA

Stronica.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

RUCH PUNKTU MATERYALNEGO.

Stronica.

ROZDZIAŁ II

RUCH UKŁADU BRYŁOWEGO.

Stronica.

Stronica.

DYNAMIKA

RUCH UKŁADÓW MATERYALNYCH.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

TWIERDZENIA ZASADNICZE DYNAMIKI OGÓLNEJ.

ROZDZIAŁ II

INNE ZASADY I OGÓLNE RÓWNANIA RUCHU.

ROZDZIAŁ III

MOMENTA BEZWŁADNOŚCI.

ROZDZIAŁ IV

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO OKOŁO OSI STAŁEJ.

ROZDZIAŁ V

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO OKOŁO PUNKTU STAŁEGO.

ROZDZIAŁ VI

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO WOLNEGO W PRZESTRZENI.

ROZDZIAŁ VII

USTAWY TARCIA DANE PRZEZ DOŚWIADCZENIE.

ROZDZIAŁ VIII

WIADOMOŚĆ O MACHINACH.

HYDROSTATYKA

HYDRODYNAMIKA

NOTY

MECHANIKA ROZUMOWA

CYNEMATYKA

1. Będziemy badali ruch ciał sam w sobie, bez względu na siły które mu dały początek, albo które go modyfikować mogą. W tej części *Mechaniki rozumowej* punkta materyalne i ciała są uważane niezależnie od materyi która je tworzy, jak gdyby były punktami i ciałami czysto geometrycznemi, ożywionemi ruchem; dlatego też twierdzenia Cynematyki mają całą ważność prawd geometrycznych.

W Geometryi używa się niekiedy ruchu do określenia pewnych figur. I tak, określamy dokładnie powierzchnię sferyczną, mówiąc że jest miejscem punktów równo oddalonych od jednego punktu zwanego środkiem. Ale, kiedy uważamy tę samą powierzchnię sferyczną jako utworzoną *ruchem* pół-okręgu obracającego się około swojej średnicy, mamy zarazem i ścisłe określenie przedmiotu i jasny jego obraz który, stając przed oczyma, przemawia do umysłu.

Cynematyka różni się od Geometryi tem że wprowadza nową ilość *czas;* to jest, nietylko wyznacza położenie punktu materyalnego w przestrzeni, ale jeszcze określa ruch którym się on przenosi z jednego miejsca na drugie opisując *krążnę.* Czas jest tu jakoby czwarty rozmiar. Słusznie więc powiedziano że Cynematyka jest Geometryą o *czterech* rozmiarach.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

RUCH PUNKTU MATERYALNEGO.

2. Wyznacza się położenie punktu materyalnego w przestrzeni za pomocą spółrzędnych. Ruch tego punktu jest określony gdy jego spółrzędne są wyznaczone w funkcyi czasu. Czas liczy się od ugodnie przyjętej epoki. Jeśli więc oznaczymy przez x, y, z spółrzędne punktu ruchomego, przez t czas upłyniony od rzeczonej epoki, zmienne x, y, z będą pewnemi funkcyami $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zmiennej niezależnej t, i równania

$$(1) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t), \qquad z = \psi(t)$$

określą zupełnie ruch punktu uważanego.

Zwykle te *równania ruchu* punktu nie przedstawiają się w kształcie tak prostym jako powyższe, ale w kształtach uwikłanych

$$\chi(x, y, z, t) = 0, \qquad \chi_1(x, y, z, t) = 0, \qquad \chi_2(x, y, z, t) = 0.$$

Rugując czas t między trzema równaniami ruchu, otrzymuje się dwa równania

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{i} \quad F_1(x, y, z) = 0$$

które przedstawiają krążnę punktu ruchomego. Ta krążna jest linią prostą albo krzywą, płaską albo skośną.

Mówi się że ruch punktu jest prostolinijny, kołowy, para-

boliczny, elliptyczny,... według jak krążna jest linią prostą, okręgiem koła, parabolą, ellipsą,...

Gdy ruch punktu odbywa się na płaszczyznie, wtedy, biorąc tę płaszczyznę za płaszczyznę xy, mamy $z = 0$, i równania ruchu (1) przywodzą się do dwóch

$$(2) \qquad x = f(t), \qquad y = \varphi(t).$$

Ogólnie, gdy punkt ruchomy jest przymuszony zostawać na danej powierzchni, dwa równania są dostateczne do wyznaczenia jego ruchu. Na przykład, aby znać ruch punktu na powierzchni sferycznej, dość mieć długość i szerokość geograficzną tego punktu w funkcyi czasu.

Nakoniec, jeśli punkt materyalny powinien się poruszać na danej linii, jedno równanie wystarcza do wyznaczenia jego ruchu. I w samej rzeczy, aby znać ten ruch, dość będzie mieć równanie

$$(3) \qquad s = f(t),$$

które wyraża związek między łukiem s, liczonym od punktu obranego za *początek*, i czasem t, użytym na przebieżenie tego łuku.

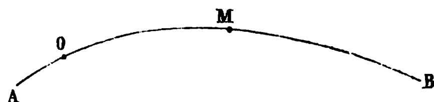
Z tego wszystkiego wynika że zupełna znajomość ruchu punktu materyalnego zawiera dwie części całkiem oddzielne, niezależne od siebie, to jest :

1° Wyznaczenie krążnej;

2° Odkrycie ustawy która wyraża w jakim czasie punkt ruchomy przebiega różne części krążnej, ciągiem nieprzerwanym, to jest, przenosi się z jednego miejsca na drugie przechodząc przez wszystkie położenia pośrednie.

3. Równanie ruchu na wiadomej krążnej. Niech będzie AB

linia którą punkt ruchomy przebiega, O punkt stały wzięty za



początek spółrzędnych, M położenie punktu ruchomego na końcu czasu t. Oznaczmy przez s odległość OM, dając jej znak $+$ albo $-$, według jak punkt M znajduje się z jednej albo z drugiej strony początku O. Tym sposobem położenie punktu ruchomego na krążnej jest wyznaczone. Ustawa ruchu będzie określona, jeśli wskażemy że spółrzędna s jest wiadoma w każdej chwili, albo jako się mówi, że ilość s jest funkcyą zmiennej niezależnej t; to się wyraża przez równanie

$$s = f(t),$$

w którem kształt funkcyi f wyznacza naturę ruchu.

Najprostszą ustawą ruchu jest równanie pierwszego stopnia

$$s = at + b,$$

które przedstawia ruch jednostajny, najprostszy z ruchów jakie sobie wyobrazić można. Inne ruchy wyrażają się równaniami mniej więcej zawiłemi; między niemi równanie

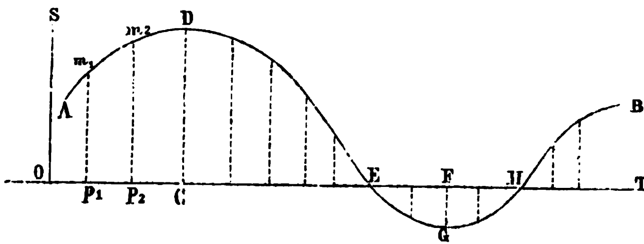
$$s = at^2 + bt + c$$

przedstawia ruch jednostajnie zmienny. Wyłożyliśmy już te ruchy w pierwszym tomie, w Dynamice punktu; nie potrzebujemy ich powtarzać.

4. Przedstawienie graficzne ustawy ruchu. Jakakolwiek jest funkcya $f(t)$, algebryczna albo przestępna, albo nawet nie

mająca wiadomego analitycznego wyzażenia, można zawsze uważać równanie $s = f(t)$ jako przedstawiające pewną linię, której pnnkta są dane przez spółrzędne s i t, prostokątne albo pochyłe, i wykreślić tę linię.

Weźmy w tym celu, dwie proste prostokątne OS, OT za osie



przebieżonych przestrzeni s i czasów t; poczem, wybrawszy dowolną długość na przedstawienie jednej sekundy, ponieśmy na oś OT odcięte Op_1, Op_2,... proporcyonalne do czasów t_1, t_2,... liczonych od pewnej chwili początkowej; i nakoniec, z punktów p_1, p_2,... tak wyznaczonych, wyprowadźmy rzędne p_1m_1, p_2m_2,... proporcyonalne do odpowiedających wartości s. Zbudujemy tym sposobem krzywę ADGB mającą równanie $s = f(t)$, która się nazywa *krzywą przebieżonych przestrzeni*. Ważna linia, bo rozwiązuje graficznie podwójne zagadnienie, wyznacza s przez t, i nawzajem wyznacza t przez s. Ta metoda interpolacyi graficznej jest wielce użyteczna w Mechanice zastosowanej, a mianowicie gdy trzeba znaleźć ustawę ruchu w zjawiskach naturalnych; jak to uczyniono szukając ustawy spadku ciał ciężkich.

Z samego spojrzenia na kształt jaki ma wyżej nakreślona krzywa, widzimy że punkt ruchomy oddala się najpierwej coraz więcej od punktu od którego się liczy odległeść s, aż dopóki czas t nie weźmie wartości która odpowieda odciętej OC punktu D; wtedy odległość punktu ruchomego od punktu

stałego s, jest równa rzędnej maximum CD. Począwszy od tej chwili, ruch zmienia stronę; punkt ruchomy zwraca się do punktu stałego, i dochodzi do niego gdy czas t bierze wartość równą odciętej OE. Poczem krzywa przebieżonych przestrzeni zniża się pod oś OT, i rzędna s bierze wartości odjemne. To pokazuje że punkt ruchomy, dosięgnąwszy punktu stałego, przechodzi go i oddala się idąc ciągle w tę samą stronę, aż czas t weźmie wartość odpowiedającą odciętej OF punktu G. Od tego momentu punkt ruchomy przestaje się oddalać od punktu stałego; i znowu, zmieniając stronę ruchu, zbliża się do tego punktu, dosięga do niego gdy czas t równa się odciętej OH, a potem go przechodzi w tym samym kierunku jaki miał najpierwej.

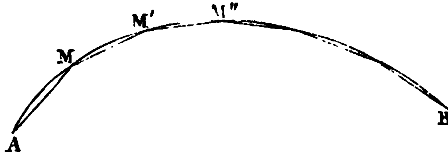
Uwaga. W kreśleniu krzywej przebieżonych przestrzeni niema potrzeby żeby rzędne były równe łukom OM krążnej, dość tylko żeby do nich były proporcyonalne. Odcięte t i rzędne s mogą być kreślone wedle dwóch różnych skal, wybranych stosownie do danych rozmiarów figury. Ale w żadnym razie nie trzeba zapominać że krzywa przebieżonych przestrzeni, służąca do przedstawienia ustawy ruchu punktu, nie jest krążną którą ten punkt opisuje w przestrzeni.

Gdy ruch punktu na krążnej jest jednostajny, krzywa przebieżonych przestrzeni jest linią prostą.

5. Prędkość. Widzieliśmy w Dynamice że prędkość punktu materyalnego, który się porusza na krążnej, danej przez równanie $s=f(t)$, wyraża się przez pochodnę $\frac{ds}{dt}=f'(t)$; a chociaż okazaliśmy tę formułę z dostatecznemi szczegółami, sądzimy jednak że dobrze będzie znać inny jeszcze sposób jej otrzymania, tem bardziej że określenie prędkości w Cynematyce jest różne od tego które już znamy.

Niech będzie linia AB którą punkt m opisuje ruchem

zmiennym jakimkolwiek, biorąc położenia M, M', M",... na końcu czasów równych Δt. Połączmy te położenia liniami pros-



temi AM, MM', M'M",... i wyobraźmy sobie że ruch zmienny na krążnej AB został zastąpiony przez ruch jednostajny na łamanej AMM'... B; ale tak żeby punkt *m* przebiegał łuki AM, MM',... ruchem jednostajnym, w tym samym czasie w jakim opisuje odpowiednie łuki AM, MM'... ruchem zmiennym. Prędkości ruchów jednostajnych, które mają miejsce na bokach linii łamanej, nie są równe między sobą, i ruch idealny nie zgadza się z ruchem rzeczywistym tylko w samych wierzchołkach A, M, M',... W położeniach pośrednich między A i M, M i M',... te dwa ruchy są oczywiście różne, oddzielne; ale ich różnica będzie tem mniejsza im bardziej przeciąg czasu Δt będzie dążył do zera, albo co to samo, im mniejsze będą boki AM, MM', M'M",... w liczbie coraz większej. To dowodzi że ruch idealny może odstępować od rzeczywistego tak mało jak się podoba. Jeśli więc czas Δt jest nieskończenie mały, wierzchołki A, M, M',... B idą po sobie ciągiem nieprzerwanym, i ruch jednostajny różni się nieskończenie mało od ruchu zmiennego który jest jego granicą. W takim sensie trzeba rozumieć wyrażenie: *Ruch zmienny jakikolwiek może być uważany jako ciąg nieskończonej liczby ruchów jednostajnych, z których każdy ma miejsce w nieskończenie małym czasie.*

To ustaliwszy, przypuśćmy że punkt ruchomy zajmuje położenie M na końcu czasu t, i oznaczmy przez Δs łuk MM' przebieżony w czasie Δt. Ponieważ, na mocy tego co poprze-

dza, stosunek $\frac{MM'}{\Delta t}$, wyrażający prędkość ruchu jednostajnego, ma za granicę $\frac{ds}{dt}$, dlatego właśnie pochodna $\frac{ds}{dt}$ przebieżonej drogi s względem czasu t została nazwana *prędkością ruchu zmiennego* w epoce t. Co daje

$$v = \frac{ds}{dt},$$

wynik zgodny z otrzymanym w Dynamice; ale określenie prędkości jest różne, jakośmy uprzedzili.

Z powyższego dowodzenia wynika że ruch punktu materyalnego ma kierunek stycznej do krążnej, w każdem położeniu tego punktu. Jeśli więc poniesiemy na styczną, począwszy od punktu zetknięcia i w stronę ruchu, długość równą prędkości punktu ruchomego, w danej chwili, będziemy mieli linię prostą która przedstawi zarazem wielkość, kierunek i stronę prędkości jaką ten punkt posiada.

W ruchu jednostajnym prędkość jest stateczna, w ruchu jednostajnie przyspieszonym prędkość jest proporcyonalna do czasu; w ruchu zmiennym jakimkolwiek prędkość zmienia się ciągle z czasem, wedle ustawy która ten ruch cechuje.

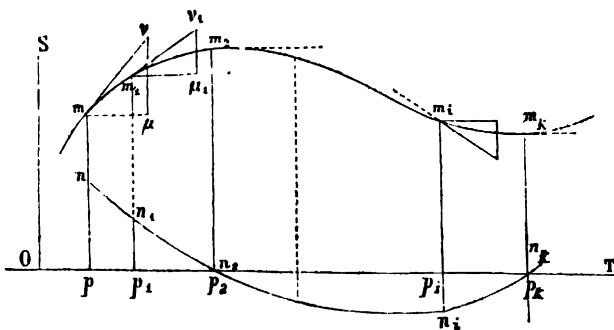
Wskazujemy tu kilka prędkości (na sekundę) o których dobrze jest wiedzieć.

	Prędkość na 1″
Człowiek, krokiem zwyczajnym, bez ciężaru i na gruncie poziomym, idzie.	1m,50
z największą możebną prędkością.	7
Koń stępem.	1m,20
Koń kłusem	od 2m,20 do 4m,40
Koń galopem.	15
Jaskułka.	od 30 do 40
Wiatr: lekki powiew, chłodny, mocny.	1m; 5 do 7; 10 do 12

Wicher.	15 do 20
Burza.	20 do 30
Uragan.	40 do 50
Okręt żaglowy, największa prędkość.	6
Wagony kolei zelaznej, największa prędkość. . .	25
Ziemia w ruchu około słońca prawie 7^{mil},7. .	30$^{k \cdot m}$,705
W ruchu dziennym ziemi, punkt na równiku ma prawie prędkość kuli działowej, przebiega. . .	465^{m}

6. Linia prędkości. Analitycznie, jakośmy dopiero co widzieli, prędkość punktu, w ruchu jakimkolwiek, wyraża się przez $\frac{ds}{dt}$. Ztąd wynika że prędkość jest spółczynnikiem kątowym stycznej do linii przebieżonych przestrzéni. Ostatnia własność daje łatwy sposób wykreślenia linii prędkości, gdy jest wiadoma linia przebieżonych przestrzeni.

Jakoż, niech będzie $mm_1m_2...$ linia przebieżonych przestrzeni.



Przez punkt m poprowadźmy styczną $m\nu$ do tej linii, i prostę $m\mu$ równoległą do osi OT, równą jedności na skali czasów t, a przez punkt μ równoległę do osi OS aż do spotkania ze styczną $m\nu$; otrzymamy długość $\mu\nu$ która będzie przedsta-

wiała, na skali odległości s, prędkość odpowiadającą punktowi m linii przebieżonych przestrzeni, albo punktowi M krążnej. Kładziemy więc na rzędnej punktu m długość $\mu\nu$ stosownie do jej znaku, i tym sposobem wyznaczamy punkt n linii prędkości. Postępując podobnie, znajdziemy tyle punktów ile zechcemy szukanej linii.

Nie trzeba mniemać że prędkość wyrażona przez stosunek $\frac{\mu\nu}{m\mu}$ ma za miarę styczną trygonometryczną kąta $\mu m\nu$; bo skala czasów t i skala odległości s, za pomocą których wykreślono linię przebieżonych przestrzeni, i tem samem wyznaczono oba wyrazy stosunku $\frac{\mu\nu}{m\mu}$, są zupełnie niezależne jedna od drugiej i nie mają koniecznie tej samej linii za jedność. Owoż, zmieniając jedną skalę albo obydwie, na przykład zwiększając w pewnym stosunku skalę czasów a zmniejszając skalę odległości, otrzymanoby inną krzywę, któraby przedstawiała jeszcze tę samą ustawę ruchu; kąty stycznej w punktach tej krzywej byłyby całkiem zmienione, a jednakże odpowiedające prędkości zostałyby te same. Styczna trygonometryczna kąta $\mu m\nu$ jest miarą prędkości w szczególnym tylko przypadku w którym jedność czasów t i jedność odległości s są przedstawione przez jedną i tę samą długość.

Ze spojrzenia na linię prędkości widzimy zaraz że prędkość jest dodatna od czasu $t = Op$ do czasu $t = Op_2$. W tym przeciągu punkt ruchomy przemieszcza się na krążnej w stronę dodatną. Od czasu $t = Op_2$ do czasu $t = Op_k$ prędkość jest odjemna, i ruch punktu jest wsteczny. Punkta p_2, p_k są rzutami punktów m_2, m_k w których rzędna linii przebieżonych przestrzeni dosięga wartości maximum albo minimum. W tych punktach ruch zmienia stronę w którą dąży. Prędkość jest liczebnie maximum w punkcie n_i, dla $t = Op_i$. Odciętej Op_i odpowieda na linii przebieżonych przestrzeni punkt przegięcia m_i, w którym styczna do tej krzywej dosięga wartości maximum

nachylenia na oś OT. Poza wartością $t = Op_k$ prędkość jest dodatna, i ruch punktu jest znowu wprost; i t. d.

Ponieważ prędkość punktu ruchomego jest ilością skończoną i ciągłą, ztąd wnosimy że linia przebieżonych przestrzeni nie może mieć, w żadnym punkcie, stycznej równoległej do osi rzędnych OS, ani posiadać punktów kącistych, w których się jednoczą dwie gałęzie krzywej mające dwie styczne oddzielne. Bo gdyby tak było, w pierwszym przypadku prędkość stałaby się ilością nieskończenie wielką, a w drugim przeskakiwałaby nagle z jednej wartości do drugiej; co oczywiście niemożebne w istotnym ruchu punktu materyalnego. Więc linia przebieżonych przestrzeni, w ruchu jakimkolwiek, jest prostą albo krzywą ciągłą, i funkcya

$$s = f(t)$$

która ją przedstawia jest skończona i ciągła dla wszystkich wartości czasu t.

Linia prędkości wyraża się przez równanie

$$v = f'(t).$$

W ruchu jesdnostajnie zmiennym prędkość jest proporcyonalna do czasu; zatem linia prędkości przedstawiająca ustawę tej zmienności jest linią prostą.

7. Znając linię prędkości można nawzajem wyprowadzić z niej linię przebieżonych przestrzeni, całkując równanie

$$ds = vdt$$

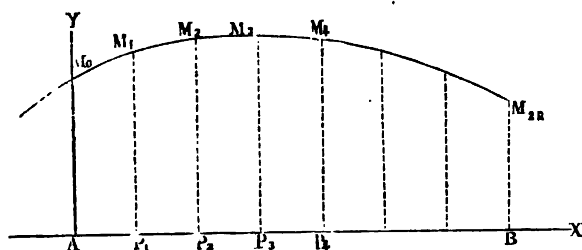
które daje

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t} vdt.$$

Żeby zagadnienie było wyznaczone, musi być dany jeden z punktów linii przebieżonych przestrzeni, za pomocą którego będzie można znaleźć wartość statecznej dowolnej, wprowadzonej przez całkowanie; to jest trzeba znać wartość s_0 która odpowieda wartości t_0.

8. Jeśli całka nie jest znana, co się zdarza gdy linia prędkości jest dana przez wykreślenie mechaniczne, wyrachuje się linię przebieżonych przestrzeni przez kwadraty przybliżone, stosując na przykład formułę Tomasza Simpson albo generała Poncelet, albo nareszcie używając sposobów całkiem praktycznych.

Oto dowodzenie formuły Tomasza Simpson. Niech będzie linia $M_0M_1M_2...M_{2n}$ nakreślona mechanicznie. Uważajmy najpierwej



że ilość v jest linią a zaś dt liczbą; więc nieskończenie mały prostokąt vdt wyraża linię. To wiedząc, podzielmy podstawę AB, powierzchni $AM_0M_1.M_{2n}B$ którą mamy wyrachować, na $2n$ części równych to jest na liczbę parzystą części równych, i nazwijmy h jedną z nich. Przez trzy punkta jakiekolwiek można zawsze poprowadzić parabolę drugiego stopnia którejby oś była równoległa do danego kierunku; jeśli więc obierzemy proste AB, AM_0 prostokątne za osie spółrzędnych, i poprowadzimy przez trzy punkta M_0, M_1, M_2, przyzwoicie bliskie, parabolę mającą oś równoległą do osi rzędnych AY, równanie tej paraboli będzie miało kształt

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

i powierzchnia odcinka parabolicznego $AM_0M_2P_2$ wyrazi się przez całkę

$$\int_0^{2h}(A + Bx + Cx^2)dx = \frac{h}{3}(6A + 6Bh + 8Ch^2).$$

Oznaczmy teraz przez y_0, y_1, y_2 rzędne punktów M_0, M_1, M_2, odpowiedające odciętym 0, h, $2h$; będziemy mieli

$$y_0 = A, \qquad y_1 = A + Bh + Ch^2, \qquad y_2 = A + 2Bh + 4Ch^2.$$

Ztąd, mnożąc drugie równanie przez 4 i dodając wszystkie trzy razem, znajdujemy dla powyższej całki wartość

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Postępując podobnie, widzimy łatwo że powierzchnia odcinka $P_2M_2M_3M_4P_4$ paraboli, przechodzącej przez trzy punkta M_2, M_3, M_4 i mającej oś równoległą do osi rzędnych, wyraża się przez

$$\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4).$$

Tak samo o innych. Powierzchnia ostatniego odcinka parabolicznego równa się ilości

$$\frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

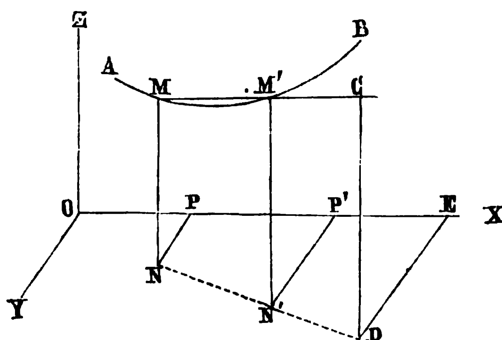
Więc, biorąc summę wszystkich odcinków parabolicznych, otrzymujemy przybliżoną wartość całej powierzchni, czyli kwadraturę danej krzywej, wyrażoną przez formułę

$$S = \frac{h}{3}\left\{y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})\right\}.$$

Jeśli linia krzywa $M_0M_1M_2...M_{2n}$ posiada punkt przegięcia między M_0 i M_{2n}, trzeba podzielić jej powierzchnię na dwie części, mające rzędnę punktu przegięcia za spólną rzędnę.

RUCHY JEDNOCZESNE, RZUTY RUCHÓW.

9. Najłatwiejszy do pojęcia jest ruch prostolinijny. Kwestya ruchów krzywolinijnych sprowadza się do uważania ruchów prostolinijnych jednoczesnych, któremi się teraz zajmiemy.



Niech będzie AB linia, którą punkt ruchomy opisuje, odniesiona do trzech osi jakichkolwiek, prostokątnych albo pochyłych. Uważajmy położenie M tego punktu, i jego rzut P na osi OX zrobiony równolegle do płaszczyzny YOZ. Podczas gdy punkt ruchomy M przemieszcza się na krążnej AB, jego rzut P przemieszcza się na osi OX. Otóż dlaczego mówi się że te dwa ruchy są *jednoczesne*, i że *ruch punktu* P *na osi* OX *jest rzutem ruchu punktu* M *w przestrzeni.*

Gdy krążna jest wiadoma, ruch punktu M i ruch jego rzutu P są tak z sobą związane że, znając jeden z nich, znamy temsamem drugi. Wtedy ruch krzywolinijny wyznacza się przez ruch prostolinijny. Ale, jeśli krążna nie jest wiadoma, natenczas, aby

mieć ruch punktu M dobrze określony, dość będzie znać ruchy jego rzutów na trzech osiach spółrzędnych.

Mając równania ruchu trzech rzutów punktu i rugując czas t, otrzymuje się krążnę. Ale, jeśli rugowanie przedstawia trudności, można uważać te trzy równania rzutów jako określające krążnę punktu ruchomego, za pośrednictwem zmiennej posiłkowej t; często nawet dobrze jest zachować tę zmiennę niezależną która ułatwia rachunki.

To wszystko jasno pokazuje że, przez ruchy prostolinijne jednoczesne, dochodzi się do poznania ruchu krzywolinijnego w przestrzeni.

10. Prędkość ruchu rzutowanego na osi. Na cięciwie MM′ (fig. pow.) weźmy punkt C leżący w odległości stałej od punktu M, i niech będzie E jego rzut na osi OX. Trzy płaszczyzny równoległe MNP, M′N′P′, CDE dają

$$\frac{PP'}{MM'}=\frac{PE}{MC}.$$

Oznaczmy przez Δs łuk MM′, przez Δx jego rzut PP′ na osi OX, przez Δt czas w którym punkt ruchomy przechodzi z położenia M do M′; będzie, na mocy powyższej proporcyi,

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\frac{\text{cięc}\,MM'}{\Delta s}\cdot\frac{PE}{MC}.$$

Owoż, gdy punkt M′ dąży do punktu sąsiedniego M i z nim się łączy, wtedy $\text{gr.}\frac{\text{cięc}\,MM'}{\Delta s}=1$, sieczna MC staje się styczną w punkcie M i $\text{gr.}\frac{PE}{MC}=\frac{dx}{ds}$; więc, nazywając v prędkość punktu ruchomego w położeniu M, mamy

$$\frac{dx}{dt}=v\,\frac{dx}{ds}.$$

Stosunek $\frac{dx}{dt}$ znaczy prędkość rzutu P poruszającego się na osi OX. Ztąd twierdzenie :

Prędkość ruchu rzutowanego na osi jakiejkolwiek jest rzutem prędkości ruchu w przestrzeni.

11. Znając równania (1) ruchu punktu M w przestrzeni, wywodzi się z nich prędkości $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ rzutów na trzech osiach do których te równania są odniesione; a ztąd prędkość v. Dość jest przez punkt M poprowadzić trzy proste równoległe do osi spółrzędnych, wziąć na nich odpowiedne długości $MA = \frac{dx}{dt}$, $MB = \frac{dy}{dt}$, $MC = \frac{dz}{dt}$, i wystawić równoległościan. Przekątna MD tego równoległościanu będzie przedstawiała wielkość, kierunek i stronę prędkości v punktu M. Co oczywiste, ponieważ rzuty tej przekątnej na trzech osiach spółrzędnych są równe ilościom $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

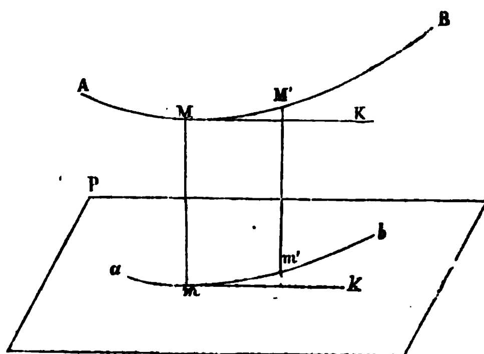
Jeśli ruch punktu odbywa się na płasczyznie, biorąc tę płasczyznę za płasczyznę spółrzędnych xy, będzie $\frac{dz}{dt} = 0$; wtenczas równoległościan staje się równoległobokiem wystawionym na $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, i jego przekątna przedstawia wielkość, kierunek i stronę prędkości ruchu punktu M.

Gdy osie spółrzędnych są prostokątne, wtedy, nazywając α, β, γ kąty jakie styczna do krążnej w punkcie M czyni z temi osiami, mamy

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\cos\beta} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\cos\gamma} = v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Te równania wyznaczają wielkość i kierunek prędkości punktu M, gdy równania jego ruchu są wiadome.

12. Prędkość ruchu rzutowanego na płaszczyznie. Kiedy punkt



materyalny M porusza się w przestrzeni, jego rzut m na płaszczyznie P, zrobiony przez prostę równoległą do danego kierunku, opisuje linię amb która jest rzutem krążnej AMB. Dlatego mówi się że ruch punktu m na płaszczyznie P jest rzutem ruchu punktu M w przestrzeni.

Niech będą MM' i mm' nieskończenie małe drogi przebieżone w czasie dt, przez punkt M i przez jego rzut m. Owoż, droga mm' jest rzutem drogi MM', stosunek $\frac{MM'}{dt}$ wyraża wielkość i kierunek prędkości punktu M w przestrzeni, a stosunek $\frac{mm'}{dt}$ przedstawia wielkość i kierunek prędkości rzutu m na płaszczyznie P; ztąd wnosimy że

Prędkość ruchu rzutowanego na płaszczyznie jest rzutem prędkości ruchu w przestrzeni.

żna. Dość tylko, na moście statku płynącego jednostajnie w linii prostej, nadać kulce ruch jednostajny i prostolinijny, aby mieć istotny obraz dwóch ruchów jednoczesnych. Te dwa ruchy i ich prędkości mogą być uważane jako ruchy i prędkości jednoczesne kulki; ale wtedy nie mają już nic rzeczywistego. Albowiem wszelki punkt materyalny ma tylko jeden ruch i jedną prędkość w przestrzeni. Ruchy i prędkości jednoczesne punktu materyalnego albo ciała są czysto pojęciami umysłu, które ułatwiają poszukiwanie istotnego ruchu, istotnej prędkości. W takim sensie należy rozumieć *składanie ruchów* i *składanie prędkości jednoczesnych, ruch wynikowy i prędkość wynikową.*

Związki analityczne między prędkościami składowemi i wynikową. Nazwijmy A i B dwie składowe prędkości, R ich wynikowę; będzie w trójkącie ACD

$$\frac{A}{\mathrm{wst}(B, R)} = \frac{B}{\mathrm{wst}(A, R)} = \frac{R}{\mathrm{wst}(A, B)}$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + 2A.B\,\mathrm{dos}(A, B).$$

Jeśli kąt dwóch prędkości składowych jest prosty, formuły dają :

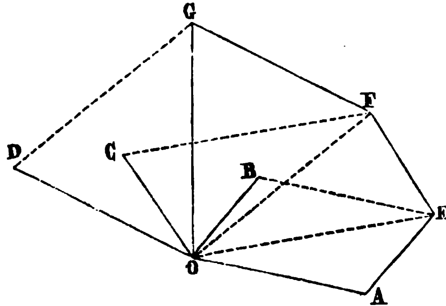
$$A = R\,\mathrm{dos}(A, R), \qquad B = R\,\mathrm{dos}(B, R).$$

$$R^2 = A^2 + B^2.$$

14. Gdy punkt materyalny jest ożywiony zarazem kilkoma ruchami jednoczesnemi, otrzymuje się prędkość ruchu wynikowego składając po kolei prędkości ruchów jednoczesnych za pomocą równoległoboku.

Niech będą OA, OB, OC, OD prędkości punktu ruchomego O w każdym z jego ruchów jednoczesnych. Składając naj-

pierwej prędkości OA i OB, znajdujemy ich wynikowę OE;



potem widzimy że OF jest wynikową prędkości OE i OC, a zatem wynikową trzech prędkości OA, OB, OC: nakoniec OG jest wynikową prędkości OF i OD, to jest wynikową czterech prędkości danych.

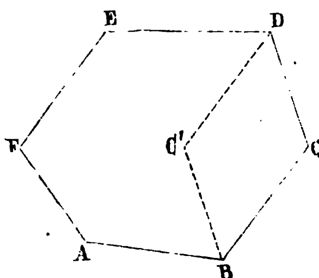
Wielokąt prędkości jednoczesnych. Można dojść do wynikowej kilku prędkości jednoczesnych, kreśląc tylko linie niezbędnie potrzebne. I tak, patrząc na powyższą figurę, widzimy zaraz że dość jest wykreślić linię wielokątną OAEFG, i połączyć wierzchołek początkowy O z końcowym G, aby mieć szukaną wynikowę. Prosta OG zamykająca wielokąt nazywa się także *wynikową geometryczną*.

Ztąd prawidło: *aby znaleźć wynikowę prędkości jednoczesnych punktu ruchomego, trzeba zestawić proste które je przedstawiają, krańcami jedną do drugiej, zachowując ich kierunki; prosta zamykająca wielokąt będzie przedstawiała szukaną wynikowę.*

To wykreślenie za pomocą którego znajduje się jak najprościej wynikowę jakiejkolwiek liczby prędkości jednoczesnych punktu ruchomego, nazywa się *wielokątem tych prędkości.*

Wynikowa prędkości jednoczesnych nie zależy od porządku w jakim je składano; albowiem punkt ruchomy ma tylko jedną

istotną prędkość w przestrzeni. Ale, uważając wynikowę geometryczną, nie widać odrazu czy jej wielkość i kierunek nie zmieniają się z porządkiem zestawiania boków. Aby znieść wątpliwość dość będzie okazać że można przemienić porządek

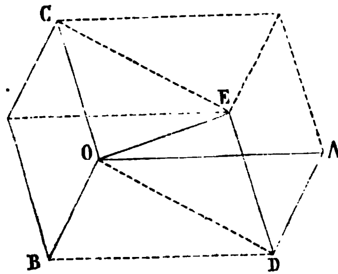


dwóch boków po sobie idących, jako BC i CD. I w samej rzeczy, wykonywając przemianę porządku dwóch boków BC, CD, widzimy że idąc drogą BCD albo drogą BC'D przychodzi się zawsze do tego samego punktu D, który jest wierzchołkiem równoległoboku zbudowanego na BC i CD; więc wszystkie boki łamanej ABCDEF mogą się przestawić między sobą nie zmieniając w niczem wynikowej AF.

Twierdzenie wielokąta prędkości jednoczesnych jest ogólne, i stosuje się do wszystkich możebnych przypadków ich składania. Jeśli te prędkości jednoczesne mają ten sam kierunek i tę samą stronę, prędkość wynikowa jest równa ich summie, ma ich kierunek i stronę. Jeśli zaś prędkości jednoczesne mają ten sam kierunek, ale jedne idą w jedną stronę a drugie w stronę przeciwną, znajduje się ich wynikowę biorąc osobno summę tych które idą w jedną stronę i osobno summę tych które idą w stronę przeciwną, a potem odciągając mniejszą summę od większej; tak otrzymana różnica jest prędkością wynikową, ma kierunek i stronę większej z dwóch summ o których mowa.

Równoległościan prędkości jednoczesnych. W szczególnym

przypadku w którym prędkości składowe są w liczbie trzech i ich kierunki nie są na jednej płaszczyznie, prędkość wynikowa jest przekątną równoległościanu wystawionego na tych trzech prędkościach. Jakoż, niech będą trzy prędkości jednoczesne



OA, OB, OC punktu ruchomego O; wedle prawidła wielokąta prędkości, do punktu A przystawiamy prostę AD równą prostej OB i do niej równoległą, potem do punktu D przystawiamy prostę DE równą prostej OC i także do niej równoległą; prosta OE zamykająca wielokąt przedstawia prędkość wynikową trzech prędkości danych. Owoż, dopełniając równoległoboków, widzimy łatwo że wynikowa OE jest przekątną równoległościanu wystawionego na trzech prostych OA, OB, OC. To wykreślenie łatwo się wprost usprawiedliwia; albowiem, prędkość OA i OB mają wynikowę OD, a ta ostatnia złożona z prędkością OC daje wynikowę OE.

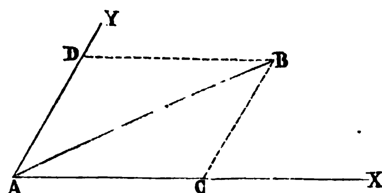
Jeśli trzy prędkości składowe są prostokątne, oznaczając je przez A, B, C, przez R ich wynikowę, i przez α, β, γ kąty jakie tworzy ostatnia z trzema pierwszemi, będzie

$$A = R \cos\alpha, \qquad B = R \cos\beta, \qquad C = R \cos\gamma,$$

$$R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

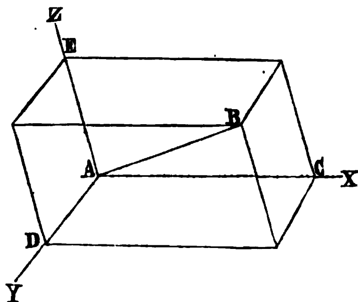
15. Mając daną prędkość, można ją zawsze uważać za wy-

nikowę prędkości jednoczesnych. Owoż, zdarza się często że trzeba rozłożyć prędkość punktu ruchomego na dwie albo na trzy składowe wedle danych kierunków; ten rozkład łatwo się



wykonywa ale pod pewnym warunkiem. I tak, niech będzie prosta AB, przedstawiająca wielkość, kierunek i stronę prędkości punktu ruchomego, którą mamy rozłożyć na dwie inne skierowane wedle prostych AX, AY. Aby rozkład był możebny, trzeba żeby dwa dane kierunki AX, AY tworzyły kąt mający wierzchołek w punkcie A i obejmujący prostę AB. Jeśli tym dwom warunkom staje się zadość, uskutecznia się rozkład prowadząc przez punkt B dwie proste BD i BC odpowiednio równoległe do danych kierunków AX, AY; proste AC i AD tak wyznaczone są dwiema składowemi szukanemi.

Niech będzie teraz dana prędkość AB, którą chcemy rozło-



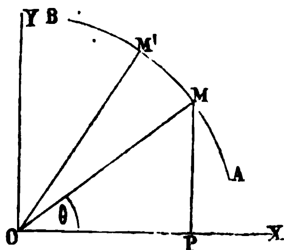
żyć na trzy inne skierowane wedle linij AX, AY, AZ. Może-

bność rozkładu wymaga żeby trzy dane proste AX, AY, AZ tworzyły trójścian, mający wierzchołek w punkcie A i obejmujący prostę AB. Przypuszczając te warunki dopełnione, dość jest przez punkt B poprowadzić trzy płaszczyzny odpowiednio równoległe do ZAY, ZAX, XAY; proste AC, AD, AE będą trzema składowemi żądanemi.

RUCH PUNKTU ODNIESIONEGO DO SPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH.

Położenie punktu ruchomego na płaszczyznie albo w przestrzeni może się wyznaczyć za pomocą spółrzędnych biegunowych. Dla ułatwienia wykładu, będziemy najpierwej uważali ruch na płaszczyznie a potem w przestrzeni.

16. Spółrzędne biegunowe na płaszczyznie. Ruch punktu M na płaszczyznie jest zupełnie określony, gdy są wiadome w każdej chwili wartości promienia wodzącego $r = \text{OM}$ i kąta biegunowego $\theta = \text{MOZ}$, jaki czyni kierunek OM tego promienia z osią biegunową OX. Spółrzędne r i θ zmieniają się z cza-



sem t, i funkcye które wyrażają ich związek z tą ostatnią zmienną stanowią równania ruchu punktu M na płaszczyznie xy.

Można uważać punkt M jako poruszający się po promieniu wodzącym OM, podczas gdy ten promień obraca się około bieguna O. Składając te dwa ruchy jednocześne, otrzymuje się

ruch rzeczywisty punktu M. Ruch punktu M wzdłuż promienia, zwany *ruchem ślizgania*, jest ruchem względnym; a ruch wirowy tego promienia około bieguna, zwany także *ruchem krążenia* punktu M, jest jego ruchem uniesienia.

Znamy już wartości analityczne prędkości tych dwóch ruchów (tom I, nº 241). Powtórzymy je dla pamięci.

Prędkość ślizgania czyli prędkość względna wzdłuż promienia wyraża się przez

$$\frac{dr}{dt}.$$

Prędkość krążenia czyli prędkość uniesienia punktu M, uważanego za nieruchomy na promieniu wodzącym podczas gdy on się obraca około bieguna O przez chwilę dt, jest

$$r\frac{d\theta}{dt}.$$

Te wartości są związane równaniem

$$\frac{ds^2}{dt^2}=\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

które pokazuje że *prędkość punktu* M *na płaszczyznie jest wynikową prędkości wzdłuż promienia wodzącego i prędkości prostopadłej do tego promienia.*

Prędkość kątowa. Stosunek $\frac{d\theta}{dt}$ nazywa się *prędkością kątową*. Wiemy już że tem imieniem oznacza się prędkość punktu na jedność odległości od bieguna; tak że, gdy promień wodzący r opisuje kąt $d\theta$, punkt mający $r=1$ kreśli łuk koła który jest miarą tego kąta; i dlatego właśnie stosunek $\frac{d\theta}{dt}$ nazywa

się prędkością kątową. Dla dogodności zastosowań, wyraża się prędkość krążenia przez prędkość kątową, oznaczając zwykle tę ostatnią przez literę ω, to jest kładąc

$$r\frac{d\theta}{dt}=\omega r.$$

W machinach określają prędkość kątową stateczną przez liczbę obrotów jakie dane koło wykonywa w jednej minucie. Jeśli nazwiemy n tę liczbę, punkt leżący na jedność odległości od osi przebiegnie w jednej minucie łuk koła równy $2n\pi$; więc, na sekundę, prędkość kątowa punktów tego koła ma wartość

$$\omega=\frac{2n\pi}{60}.$$

Długość łuku jednej sekundy, w funkcyi promienia wziętego za jedność, jest

$$\text{łuk } 1''=\frac{\pi}{648000}=\frac{1}{206264,8\ldots}.$$

17. Do przejścia od spółrzędnych prostokątnych do spółrzędnych biegunowych służą formuły

$$x=r\,\mathrm{dos}\theta,$$

$$y=r\,\mathrm{wst}\,\theta.$$

Różniczkując te równania, otrzyma się składowe prostokątne prędkości punktu ruchomego wedle osi stałych OX, OY;

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\mathrm{dos}\theta-r\,\mathrm{wst}\,\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dz}{dt}\mathrm{wst}\,\theta+r\,\mathrm{dos}\,\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Nawzajem, znając $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ można mieć łatwo prędkość ślizgania $\frac{dr}{dt}$ i prędkość krążenia $r\frac{d\theta}{dt}$.

Pomnóżmy pierwsze równanie przez dosθ, drugie przez wstθ, i dodajmy; znajdziemy

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\text{dos}\,\theta + \frac{dy}{dt}\,\text{wst}\,\theta.$$

Otrzymuje się podobnie

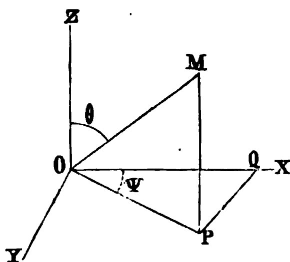
$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt}\,\text{dos}\,\theta - \frac{dx}{dt}\,\text{wst}\,\theta.$$

Jeśli w ostatniem równaniu zastąpimy dosθ i wstθ przez ich wartości $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ znajdziemy ważną formułę

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{xdy - ydx}{dt},$$

którą się wprost bardzo łatwo otrzymuje (Tom 1 n^{er} 239).

18. Spółrzędne biegunowe w przestrzeni. Położenie punktu ruchomego M w przestrzeni może się wyznaczyć przez następujące spółrzędne biegunowe : promień wodzący OM $= r$,



kąt MOZ $= \theta$, zwany *dopełnieniem szerokości geograficznej*,

i kąt $POX = \psi$ zwany *długością geograficzną* punktu M. Te trzy ilości r, θ, ψ zmieniają się z czasem t; funkcye wyrażające ich związki z tą ostatnią zmienną stanowią równanie ruchu punktu M.

Ruch punktu M w przestrzeni może być uważny jako wynikający z trzech ruchów jednoczesnych, które są: ruch ślizgania punktu M wzdłuż promienia wodzącego OM, ruch wirowy tego promienia OM około bieguna O na płasczyznie ZOP, i nakoniec ruch wirowy płasczyzny ZOP około osi OZ prostopadłej do płasczyzny XOY,

Prędkość ślizgania punktu M na promieniu wodzącym jest dana przez pochodnę

$$\frac{dr}{dt}.$$

Prędkość punktu M uważanego za nieruchomy na promieniu OM, podczas gdy ten promień obraca się około bieguna O na płasczyznie ZOP, ma wartość

$$r\frac{d\theta}{dt}.$$

Nakoniec prędkość punktu M, uważanego za nieruchomy na płasczyznie ZOP, podczas gdy ta płasczyzna obraca się około osi OZ, jest wyrażona przez

$$r \operatorname{wsl} \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Jeśli poniesiemy pierwszą z tych trzech prędkości na przedłużenie promienia wodzącego OM; drugą na prostopadłę do promienia OM, poprowadzoną przez M na płasczyznie ZOP; trzecią na prostopadłę do płasczyzny ZOP, poprowadzoną przez

M w kierunku ruchu; i jeśli, na tak wyznaczonych trzech liniach prostokątnych, zbudujemy równoległościan, przekątna tego równoległościanu będzie przedstawiała wielkość, kierunek i stronę prędkości punktu ruchomego M w przestrzeni.

19. Formuły służące do przejścia od trzech spółrzędnych prostokątnych do spółrzędnych biegunowych, wyżej określonych, są

$$x = r \operatorname{wst}\theta \operatorname{dos}\psi,$$

$$y = r \operatorname{wst}\theta \operatorname{wst}\psi,$$

$$z = r \operatorname{dos}\theta.$$

Nawzajem, z tych równań wyprowadzają się formy przekształcenia spółrzędnych biegunowych na spółrzędne prostokątne,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\operatorname{dos}\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\operatorname{sty}\psi = \frac{y}{x}.$$

Aby mieć prędkości ruchów rzutowanych na trzech osiach prostokątnych OX, OY, OZ, trzeba różniczkować trzy pierwsze równania; co daje:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \operatorname{wst}\theta \operatorname{dos}\psi + r \operatorname{dos}\theta \operatorname{dos}\psi \frac{d\theta}{dt} - r \operatorname{wst}\theta \operatorname{wst}\psi \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \operatorname{wst}\theta \operatorname{wst}\psi + r \operatorname{dos}\theta \operatorname{wst}\psi \frac{d\theta}{dt} + r \operatorname{wst}\theta \operatorname{dos}\psi \frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt} \operatorname{dos}\theta - r \operatorname{wst}\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Nawzajem, z tych równań można wyprowadzić prędkość ślizgania $\frac{dr}{dt}$ punktu M na promieniu wodzącym, prędkość wirowania $r\frac{d\theta}{dt}$ około bieguna O na płaszczyznie ZOP, i prędkość wirowania $r \operatorname{wst}\theta \frac{d\psi}{dt}$ około osi OZ; dość tylko pomnożyć każde równanie przez odpowiedający spółczynnik prędkości której się szuka, i dodać. To jest, chcąc naprzykład otrzymać prędkość $\frac{dr}{dt}$, trzeba pomnożyć pierwsze równanie przez wstθ dosψ, drugie przez wstθ wstψ, trzecie przez dosθ, i dodać te trzy wieloczyny. Tym sposobem znajduje się łatwo trzy żądane prędkości w funkcyi składowych $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt}\operatorname{wst}\theta \operatorname{dos}\psi + \frac{dy}{dt}\operatorname{wst}\theta \operatorname{wst}\psi + \frac{dz}{dt}\operatorname{dos}\theta,$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt}\operatorname{dos}\theta \operatorname{dos}\psi + \frac{dy}{dt}\operatorname{dos}\theta \operatorname{wst}\psi - \frac{dz}{dt}\operatorname{wst}\theta,$$

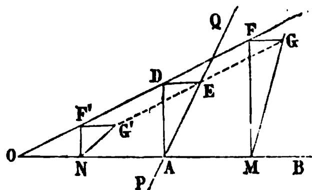
$$r \operatorname{wst}\theta \frac{d\psi}{dt} = -\frac{dx}{dt}\operatorname{wst}\psi + \frac{dy}{dt}\operatorname{dos}\psi.$$

METODA ROBERVAL'A KREŚLENIA STYCZNYCH.

20. Wszelka linia może być uważana jako krążna punktu ruchomego. Owoż, prędkość tego punktu w każdej chwili ma kierunek stycznej do jego krążnej; ztąd wynika że znajomość prędkości prowadzi do znajomości stycznej. Jeśli więc, rozkłająć ruch punktu na ruchy składowe, można znaleźć ich prędkości jednoczesne, albo tylko *stosunek tych prędkości*, nietrudno już będzie znaleźć kierunek rzeczywistej prędkości punktu ru-

chomego, i temsamem kierunek stycznej do krążnej w każdem jego położeniu. Taka jest metoda, którą podał ROBERVAL, prowadzenia stycznych do linij krzywych określonych geometrycznie. Zasada metody jest bardzo prosta, ale zastosowanie ograniczone. Kilka przykładów pokażą użytek metody.

STYCZNA DO KONCHOIDY NIKOMEDESA. Jest dany punkt stały O i prosta stała PQ. Przez punkt O poprowadzono prostę jakąkolwiek OAB, i na jej kierunku, począwszy od punktu przecięcia A z prostą PQ, wzięto długość stałą AM = AN; miejscem punktu M albo N jest konchoida *Nikomedesa*. Poprowadzić styczną do tej krzywej w punkcie M.

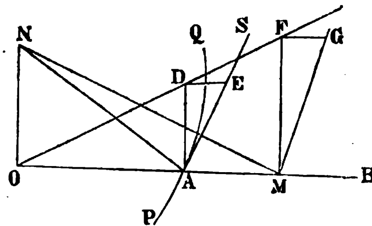


Uważając punkt O jako biegun około którego obraca się promień wodzący OM, widzimy że prędkości punktów A i M są każda wynikową prędkości ślizgania wzdłuż promienia wodzącego OM, i prędkości krążenia, prostopadłej do tego promienia. Owoż, prędkość punktu A ma kierunek PQ; jeśli więc wyprowadzimy z punktu A prostopadłę AD do OA, i weźmiemy na niej dowolną długość AD, a potem z punktu D prostopadłę DE do AD aż do spotkania E z prostą PQ; długości AD, DE, AE będą proporcyonalne do prędkości krążenia, do prędkości ślizgania i do rzeczywistej prędkości punktu A. Wiemy nadto że prędkości krążenia punktów A i M są proporcyonalne do promieni wodzących OA, OM, a ich prędkości ślizgania są równe ponieważ długość AM zostaje niezmienna. Więc, żeby mieć styczną w punkcie M konchoidy, dość jest

wyprowadzić z tego punktu prostopadłę MF do OM aż do spotkania F z promieniem wodzącym OD; potem z punktu F prostopadłę FG do MF i wziąć na niej długość FG = DE; nakoniec połączyć MG. Prosta MG będzie styczną szukaną.

Tak samo się kreśli styczną NG′ w punkcie N konchoidy. Punkta E, G, G′ są w linii prostej.

21. Styczna do konchoidy zogólnionej. Określenie konchoidy *Nikomedesa* zogólnia się, jeśli zamiast prostej PQ będzie wzięta



krzywa jakakolwiek PQ. Wtedy prędkość punktu A będzie miała kierunek stycznej AS do krzywej PQ; i wykreślenie stycznej w punkcie M tej konchoidy przywodzi się do poprzedzającego.

22. Można łatwo, przez Analizę, znaleźć normalnę, i temsamem styczną, w danym punkcie konchoidy. Jakoż, nazywając θ i r spółrzędne biegunowe punktu A, odniesione do bieguna O i do osi biegunowej jakiejkolwiek, będziemy mieli wartość podnormalnej ON w punkcie A,

$$ON = \frac{dr}{d\theta};$$

a jeśli oznaczymy przez k długość stałą AM, przez ON′ podnormalnę w punkcie M konchoidy, będzie także

$$ON' = \frac{d(r+k)}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}.$$

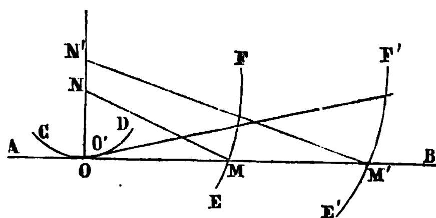
Więc

$$ON' = ON.$$

To dowodzi że normalna do konchoidy w punkcie M i normalna do linii PQ w punkcie A przecinają się w punkcie N, na prostopadłej ON wyprowadzozej z bieguna O do promienia wodzącego OM. Ztąd wynika bardzo proste wykreślenie normalnej w punkcie M konchoidy.

Gdy krzywa PQ jest kołem konchoida nazywa się *ślimakiem* PASKALA.

23. Wartości podnormalnych prowadzą do twierdzenia *zmienności odcinka linii prostej, zawartego między dwiema krzywemi danemi.* Niech będą dwie krzywe EF, E'F' leżące na jednej



płasczyznie; z punktu O tej płasczyzny wyprowadźmy promień wodzący OMM', i oznaczmy przez N, N' punkta w których normalne MN, M'N' do dwóch krzywych spotykają prostopadłę ON do OM. Będziemy mieli

$$\frac{d.\text{OM}}{d\theta} = \text{ON},$$

$$\frac{d.\text{OM}'}{d\theta} = \text{ON}';$$

ztąd

$$d.\text{MM}' = \text{NN}'d\theta.$$

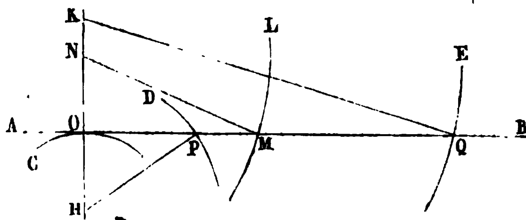
Ta formuła daje zmienność odcinka MM' prostej AB, zawartego między krzywemi EF, E'F'. Ustawa ruchu prostej AB jest jakakolwiek; na przykład, prosta AB może się poruszać zostając ciągle styczną do swojej owłoki CD; w tym przypadku biegun O zmienia się, ale jest zawsze punktem zetknięcia tych dwóch linij.

W konchoidzie $d.MM' = 0$, więc $NN' = 0$.

Co sprawdza już wiadomy wynik.

Na zastosowanie twierdzenia weźmy następujące zagadnienie:

Linia prosta AB *porusza się zostając styczną do krzywej* CO, *i spotyka dwie inne krzywe* DP, EQ *w punktach* P, Q; *podzielono odległość* PQ *w punkcie* M *na dwie części w stosunku* λ. *Nakreślić normalnę do miejsca które punkt* M *opisuje.*



Przez punkt zetknięcia O poprowadźmy prostopadłę ON do AB; i niech będą PH, QK normalne do krzywych danych w punktach P, Q; MN niewiadoma normalna w punkcie M. Wedle zadania mamy

$$PM = \lambda MQ,$$

zkąd

$$d.PM = \lambda d.MQ.$$

Owoż, powyższe twierdzenie daje

$$d.PM = HN d\theta,$$

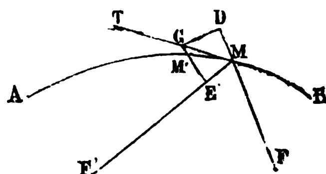
$$d.MQ = NK d\theta.$$

Więc, podstawiając, będzie

$$HN = \lambda NK.$$

Wyznaczy się punkt N dzieląc odległość HK na dwie części w stosunku danym λ; poczem łączy się punkta M, N linią prostą MN, która będzie normalną szukaną.

24. STYCZNA DO ELLIPSY. Ellipsa jest miejscem punktów M



takich że summa ich odległości MF, MF' od dwóch punktów stałych F, F', zwanych ogniskami, równa się ilości statecznej. Oznaczając przez r, r' odległości MF, MF', przez $2a$ ilość stateczną która jest długością wielkiej osi ellipsy, równanie tej krzywej będzie

$$r + r' = 2a.$$

Ztąd, różniczkując, wynika

$$dr + dr' = 0,$$

a następnie

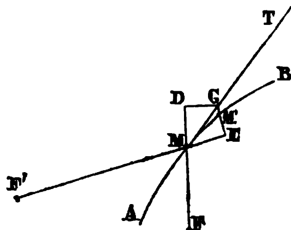
$$\frac{dr}{dt} = -\frac{dr'}{dt}.$$

Te równania pokazują że : 1° Jeśli promień wodzący MF powiększa się w przejściu punktu ruchomego z położenia M do położenia sąsiedniego M', wtedy promień MF' zmniejsza

się ilością dr' równą dr; 2° prędkości punktu ruchomego wzdłuż promieni wodzących są równe i znaków przeciwnych; gdy jedna ma kierunek przedłużenia MD promienia wodzącego MF, druga idzie w kierunku ME promienia MF'.

Niech będzie MT styczna do ellipsy w punkcie M; weźmy na niej długość MG taką żeby przedstawiała wielkość i kierunek prędkości punktu ruchomego. Jeśli zrzutujemy tę prędkość na promieniach wodzących MF, MF', rzuty MD, ME będą przedstawiały odpowiedające prędkości ślizgania. Owoż, te składowe prędkości są równe; więc styczna MT do ellipsy w punkcie M jest dwójsieczną kąta DME, to jest czyni kąty równe z promieniami wodzącemi tego punktu.

25. Styczna do hiperboli. Hiperbola jest miejscem pun-



któw M takich że różnica ich odległości MF, MF' od dwóch punktów stałych F, F', zwanych ogniskami, równa się ilości statecznej. Oznaczając przez r, r' odległości MF, MF', przez $2a$ ilość stateczną, równanie hiperboli będzie

$$r - r' = 2a,$$

Ztąd, różniczkując, wynika

$$dr - dr' = 0$$

i następnie

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr'}{dt}.$$

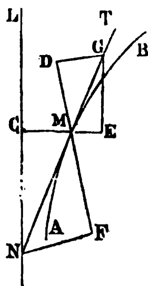
Te równania dowodzą że: 1° gdy punkt ruchomy przechodzi z położenia M do sąsiedniego M', promienie wodzące MF, MF' powiększają się albo zmniejszają oba razem ilościami równemi dr, dr'; 2° prędkości punktu ruchomego wzdłuż tych dwóch promieni są równe i mają kierunki jednakowe.

Niech będzie MT styczna do hiperboli w punkcie M; weźmy na niej, w kierunku ruchu, długość MG któraby wyrażała prędkość punktu ruchomego. Jeśli zrzutujemy tę prędkość na promieniach wodzących MF, MF', rzuty MD, ME będą przedstawiały odpowiedające prędkości ślizgania. Owoż, te składowe prędkości są równe; więc styczna MT do hiperboli, w punkcie M, jest dwójsieczną kąta jaki tworzą promienie wodzące tego punktu.

26. Styczna do stożkowej określonej przez ognisko i kierownicę. Ta stożkowa wyraża się przez równanie

$$r = ku$$

w którem r i u znaczą odległości MF, MC punktu M od



ogniska F i od kierownicy odpowiedającej NL; k stosunek stateczny tych odległości.

Różniczkując równanie, otrzymujmy

$$dr = kdu,$$

zkąd

$$\frac{dr}{dt} = k\,\frac{du}{dt}.$$

Niech będzie MT styczna do stożkowej w punkcie M; weźmy na niej, w kierunku ruchu, długość MG taką, żeby wyrażała prędkość punktu ruchomego. Jeśli zrzutujemy tę prędkość na promieniu wodzącym MF i na prostopadłej MC do kierownicy, rzuty MD, ME będą przedstawiały odpowiedające prędkości ślizgania punktu ruchomego wzdłuż tych dwóch linij. Zatem, na mocy powyższych równań, będzie

$$\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{ME}} = k = \frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MC}}.$$

Jeśli więc z ogniska F wyprowadzimy prostopadłę FN do FM, i przedłużymy ją aż do spotkania N z kierownicą, czworoboki wpisalne MDGE, MFNC będą podobne. Ztąd wynika że odpowiednie przekątne MG, MN są w linii prostej. Więc styczna MT do stożkowej w punkcie M przechodzi przez punkt N; co daje łatwe jej wykreślenie.

W paraboli $k = 1$; więc w paraboli styczna jest dwójsieczną kąta FMC.

PRZYSPIESZENIE W RUCHU PUNKTU MATERYALNEGO.

27. Przyspieszenie w ruchu jednostajnie zmiennym. Uważajmy najpierwej ruch jednostajnie zmienny prostolinijny, jako najłatwiejszy z ruchów zmiennych. Równanie tego ruchu ma kształt ogólny (tom I, n° 189),

$$s = a + bt + ct^2;$$

więc prędkość w chwili jakiejkolwiek wyraża się przez

$$v = b + 2ct.$$

Ostatnie równanie pokazuje że w ruchu, którym się zajmujemy, prędkość rośnie proporcyonalnie do czasu, i spółczynnik $2c$ wyraża ilość którą się ona powiększa albo zmniejsza w jedności czasu. Ten spółczynnik $2c$, będący miarą mniej więcej bystrego powiększania się prędkości, nazywa się *przyspieszeniem*.

Gdy spółczynniki b i c mają znaki jednakowe, prędkość v zachowuje ten sam znak, i ruch odbywa się ciągle w tę samą stronę; to jest punkt ruchomy idzie w stronę odległości s, dodatnych albo odjemnych według jak b i c są dodatne albo odjemne. A ponieważ samoista wartość prędkości zwiększa się ciągle ilościami równemi w czasach równych, ruch jest *jednostajnie przyspieszony*.

Gdy b i c są znaków różnych, prędkość v na początku ruchu, $t=0$, ma znak spółczynnika b, ale, w miarę jak t rośnie, v dąży do zera, i staje się zerem gdy $t=\frac{-b}{2c}$; począwszy od tej chwili, prędkość v bierze i zachowuje znak spółczynnika c, jej wartość samoista rośnie ciągle. Ruch odbywa się więc najpierwej w stronę wskazaną znakiem spółczynnika b, wolnieje coraz bardziej, i jest wtedy ruchem *jednostajnie opóźnionym*. Ale zaraz potem zmienia stronę kierunku, i odtąd staje się ruchem coraz więcej *przyspieszonym*.

Jakikolwiek jest ruch jednostajnie zmienny, przyspieszony albo opóźniony, nazywają go ogólnie ruchem jednostajnie przyspieszonym. Dlatego określenie przyspieszenia, chociaż dane w przypuszczeniu że spółczynniki b i c mają te same znaki, jest ogólne, i, jakiekolwiek są te znaki w równaniu ruchu jednostajnie zmiennego, spółczynnik $2c$ nosi zawsze imie przyspieszenia.

Wynika z tego co poprzedza że prędkość v powiększa się w każdej chwili ilością $2cdt$; ten przyrost prędkości nazywa się *prędkością nabytą* przez czas nieskończenie mały dt. Więc otrzymuje się przyspieszenie, dzieląc przez dt prędkość nabytą

która odpowieda temu czasowi, to jest biorąc pochodnę prędkości v względem czasu t.

28. Przyspieszenie w ruchu prostolinijnym ogólnie zmiennym. Jakikolwiek jest ruch prostolinijny, rozumując jako w n° 5, możemy go zawsze uważać za ciąg niezmiernej liczby ruchów prostolinijnych, jednostajnie zmiennych i w tym samym kierunku, z których każdy ma miejsce w czasie nieskończenie małym. To dobrze pojmując, możemy powiedzieć że przyspieszeniem ruchu prostolinijnego zmiennego jest przyspieszenie ruchu prostolinijnego jednostajnie zmiennego, w czasie nieskończenie małym dt.

Niech będzie v prędkość punktu materyalnego w ruchu prostolinijnym zmiennym, na końcu czasu t; prędkość na końcu czasu $t+dt$ wyrazi się przez $v+dv$, i prędkość nabyta w czasie dt będzie dv. Więc, jeśli będziemy uważali ten ruch jako jednostajnie zmienny, i nazwiemy j jego przyspieszenie na końcu czasu t, otrzymamy

$$j=\frac{dv}{dt} \quad \text{albo} \quad j=\frac{d^2s}{dt^2}.$$

A jeśli ruch prostolinijny zmienny ma równanie

$$s=f(t),$$

będzie

$$j=f''(t).$$

Gdy linia prędkości jest nakreślona mechanicznie albo przez interpolacye, wywodzi się z niej przyspieszenie graficznie, tak jakośmy wyznaczyli prędkość, mając wykreśloną linię przebieżonych przestrzeni. Można dość łatwo wykreślić także linię przyspieszeń. Ale te wszystkie wykreślenia do Mechaniki praktycznej należą; daliśmy o nich dostateczne wyobrażenie, i na tem poprzestajemy.

29. Przyspieszenie w ruchu krzywolinijnym. W ruchu prostolinijnym zmiennym, prędkość zmienia się w każdej chwili co do wielkości, ale zachowuje ciągle ten som kierunek. Owoż, prędkość nabyta w chwili dt nie jest czem innem jak nieskończenie małą prędkością która, złożona z prędkością jaką punkt ruchomy posiada na końcu czasu t, daje prędkość tego punktu na końcu czasu $t + dt$. Więc prędkość nabyta i temsamem przyspieszenie mają oboje ten sam kierunek ruchu prostolinijnego.

W ruchu krzywolinijnym zmiennym prędkość zmienia się w każdej chwili co do wielkości i kierunku. Ogólnie więc w ruchu zmiennym jakimkolwiek, prędkością nabytą w czasie nieskończenie małym dt, jest prędkość nieskończenie mała która, złożona z prędkością punktu na końcu czasu t, daje prędkość wynikową jaką ten punkt posiada na końcu czasu $t + dt$. Ztąd wynika że przyspieszenie j, w chwili jakiejkolwiek, ma kierunek i stronę odpowiedającej prędkości nabytej; a jego wielkość jest równa stosunkowi tej prędkości nabytej do czasu nieskończenie małego dt.

Widzimy teraz dobrze że w ruchu krzywolinijnym kierunek przyspieszenia nie jest bezpośrednio wiadomy, tak jak w ruchu prostolinijnym. W każdym szczególnym przypadku musimy wyznaczać wielkość i kierunek tego przyspieszenia; co jednak nie przedstawia wielkiej trudności, jako zaraz zobaczymy.

Niech będzie M położenie które punkt ruchomy zajmuje

na krążnej AB, na końcu czasu t, M' położenie na końcu

czasu $t + \Delta t$. W punktach M, M' poprowadźmy do krążnej dwie styczne, na których weźmy długości MT, M'T', równe odpowiedającym prędkościom v, $v + \Delta v$ punktu ruchomego. To uczyniwszy, jeśli przez punkt M poprowadzimy prostę MT_1, równą odcinkowi M'T' i do niego wprost równoległą, a potem dopełnimy równoległoboku MTT_1P, bok TT_1, równy bokowi MP, będzie przedstawiał wielkość, kierunek i stronę prędkości nabytej w czasie Δt tak małym jak się podoba. Co oczywiste, albowiem prędkość MT_1 jest wynikową prędkości MT i MP. To wykreślenie jasno pokazuje że $gr. \frac{TT_1}{\Delta t}$ przedstawia wielkość, kierunek i stronę przyspieszenia punktu ruchomego M w przestrzeni, na końcu czasu t. Płaszczyzna TMT_1 ma za granicę płaszczyznę przylegającą do krążnej w punkcie M; co dowodzi że przyspieszenie punktu ruchomego, które oznaczamy przez j, znajduje się na płaszczyznie przylegającej do krążnej w każdem położeniu tego punktu.

Gdy ruch jest prostolinijny, prosta MT_1 schodzi się ze styczną MT; wtedy $TT_1 = MT_1 - MT$, i przyspieszenie wyrażone przez $gr. \frac{TT_1}{\Delta t}$ staje się $gr. \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$; więc ten szczególny przypadek ruchu jest zawarty w ogólnym.

Jakikolwiek jest ruch zmienny, prostolinijny albo krzywolinijny, prędkość nabyta w chwili dt wyraża się ogólnie przez jdt. Zrobimy tu spostrzeżenie które gdzieindziej jeszcze ma swoją ważność. W ruchu prostolinijnym ilości v i dv mają kierunek spólny; ich summa algebryczna $v + dv$ wyraża prędkość na końcu czasu $t + dt$. W przypadku ogólnym *summę* zastępuje *wynikowa* która jest *summą geometryczną*. Wyraz summa geometryczna wskazuje że ilości są uważane nietylko z ich wartościami właściwemi, ale jeszcze z ich kierunkami w przestrzeni; przeciwnie zaś summa algebryczna, zogólnienie summy arytmetycznej, oznacza że te ilości są uważane tylko z ich wartościami właściwemi, co do wielkości i znaku.

PRZYSPIESZENIE STYCZENNE I PRZYSPIESZENIE DOŚRODKOWE.

30. Z punktu T_1 spuśćmy prostopadłę T_1H na styczną MT (ost. fig.). Prędkość nabyta TT_1 punktu ruchomego może oczywiście być uważana jako wynikowa dwóch prędkości prostokątnych TH i HT_1; pierwsza TH ma kierunek stycznej do krążnej w punkcie M, a druga HT_1 bierze kierunek promienia krzywizny MK, gdy punkt sąsiedni M' przychodzi do M. Dzieląc te dwie prędkości przez dt, otrzymujemy dwie składowe prostokątne przyspieszenia j, z których pierwszą $\frac{TH}{dt}$ nazwano *przyspieszeniem stycznennem*, drugą $\frac{HT_1}{dt}$ *przyspieszeniem dośrodkowem*.

Aby znaleźć wartość przyspieszenia stycznego, oznaczmy przez $\Delta\tau$ kąt TMT_1 dwóch stycznych sąsiednich; będziemy mieli

$$TH = MH - MT = (v + \Delta v)\cos\Delta\tau - v = \Delta v \cos\Delta\tau - 2v\,\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}\Delta\tau;$$

albo

$$\frac{TH}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\cos\Delta\tau - v\,\frac{\mathrm{wst}^2\frac{1}{2}\Delta\tau}{\frac{1}{2}\Delta\tau}\cdot\frac{\Delta\tau}{\Delta t}.$$

Ztąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$\frac{TH}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Ta wartość przyspieszenia styczennego jest dodatna albo odjemna, według jak prędkość $v = \frac{ds}{dt}$ ma znak + albo —.

Nic łatwiejszego teraz jak znaleźć wartość przyspieszenia dośrodkowego. Jakoż, mamy zaraz

$$HT_1 = (v + \Delta v)\text{wst}\Delta\tau$$

albo

$$\frac{HT_1}{\Delta t} = \frac{v\,\text{wst}\Delta\tau}{\Delta\tau} \cdot \frac{\Delta\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t}\text{wst}\Delta\tau.$$

Zkąd, biorąc granice, otrzymujemy najpierwej

$$\frac{HT_1}{dt} = v\frac{d\tau}{dt}.$$

Owoż, kąt spółtyczności $d\tau$ ma za miarę

$$d\tau = \frac{ds}{\rho},$$

gdzie ρ znaczy promień krzywizny krążnej w punkcie M; więc przyspieszenie dośrodkowe wyraża się ostatecznie przez

$$\frac{HT_1}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Znając dwa przyspieszenia składowe prostokątne, styczne $\frac{dv}{dt}$ i dośrodkowe $\frac{v^2}{\rho}$, jeśli na nich wystawimy równoległobok, przekątna tego równoległoboku będzie przedstawiała przyspieszenie j punktu ruchomego w położeniu M. To przyspieszenie wynikowe nazwano *przyspieszeniem całem*, dla odróżnienia od jego składowych.

W ruchu prostolinijnym ρ jest nieskończenie wielkie, zatem przyspieszenie dośrodkowe $\frac{v^2}{\rho}$ jest zero; wtedy przyspieszenie

całe przywodzi się do składowego styczennego $\frac{dv}{dt}$. W ruchu krzywolinijnym jednostajnym $\frac{dv}{dt}$ jest zero; zatem przyspieszenie całe przywodzi się do składowego dośrodkowego $\frac{v^2}{\rho}$. Nakoniec, w ruchu prostolinijnym jednostajnym oba składowe przyspieszenia są zero, i tym sposobem przyspieszenie całe jest zero.

PRZYSPIESZENIE W RUCHU RZUTOWANYM.

31. Przyspieszenie ruchu rzutowanego na osi. W trójkącie MTT_1, któryśmy uważali w n^rze 29, bok MT przedstawia prędkość punktu ruchomego na końcu czasu t; boki MT_1 i TT_1 są odpowiednio równe prędkości na końcu czasu $t + \Delta t$ i prędkości nabytej w czasie Δt, nadto są równoległe do tych prędkości. Zatem, jeśli zrzutujemy trójkąt MTT_1 na osi XX', równolegle do płaszczyzny jakiejkolwiek, rzut boku wynikowego MT_1 będzie równy summie rzutów boków MT i TT_1. Owoż, rzut prędkości, którą punkt ruchomy posiada na końcu czasu t, jest prędkością jego rzutu na końcu tego samego czasu i wyraża się przez $\frac{dx}{dt}$ (11); tak samo, rzut prędkości tego punktu na końcu czasu $t + \Delta t$ jest prędkością jego rzutu na końcu tego samego czasu, i wyraża się przez $\frac{dx}{dt} + \Delta \frac{dx}{dt}$; jeśli więc oznaczymy przez k spółczynnik rzutowania boku TT_1, będziemy mieli

$$\frac{dx}{dt} + \Delta \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + TT_1 . k;$$

ztąd, dzieląc przez Δt i przechodząc do granic, otrzymujemy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = gr. \frac{TT_1}{\Delta t} k.$$

To równanie dowodzi ważnego zadania :

TWIERDZENIE. *Przyspieszenie rzutu punktu materyalnego na osi jakiejkolwiek jest rzutem przyspieszenia całego w przestrzeni.*

Wynika z tego twierdzenia że ruchy jednoczesne rzutów punktu materyalnego, na trzech osiach spółrzędnych jakichkolwiek, mają odpowiedające przyspieszenia $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Jeśli więc przez punkt przestrzeni, w którym się znajduje punkt materyalny w danej chwili, poprowadzimy trzy linie proste równe tym przyspieszeniom i do nich równoległe, i na tak wyznaczonych liniach zbudujemy równoległościan, przekątna tego równoległościanu będzie przedstawiała przyspieszenie całe ruchu w przestrzeni. Gdy ruch punktu odbywa się na płasczyznie, biorąc tę płasczyznę za jedną z płasczyzn spółrzędnych, równoległościan staje się równoległobokiem którego przekątna przedstawia przyspieszenie całe tego ruchu. To wszystko dowodzi że przyspieszenie całe punktu ruchomego jest wynikową przyspieszeń jego rzutów na osiach spółrzędnych.

Kiedy osie spółrzędne są prostokątne, wtedy nazywając α, β, γ kąty jakie czyni z temi osiami przyspieszenie całe j, będzie

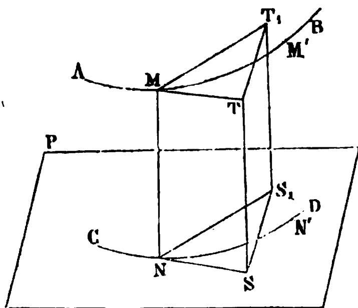
$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\cos\alpha} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\cos\beta} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\cos\gamma} = j = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Tym sposobem, znając równania ruchu punktu na płasczyznie albo w przestrzeni, można łatwo znaleźć wielkość i kierunek przyspieszenia całego j.

Dowiedliśmy w pierwszym tomie że siła poruszająca punktu materyalnego ma za miarę przyspieszenie jakie udziela jedności massy tego punktu w jedności czasu : to co poprzedza jasno dowodzi że kierunek i strona działania siły są kierunkiem i stroną przyspieszenia całego. Możemy więc powiedzieć że przyspieszenia składają się i rozkładają jako siły; i dlatego niema

potrzeby dawać więcej szczegółów. Te któreśmy wyłożyli pokazują dobrze zkąd pochodzą i co znaczą nazwiska przyspieszenia *całego*, przyspieszenia *styczennego* i przyspieszenia *dośrodkowego*. Wprawdzie możnaby jeszcze mówić o przyspieszeniach rzędów wyższych, które są pochodnemi trzeciemi, czwartemi,...; ale one nic nie przedstawiają w Mechanice, i należą do Cynematyki czystej do której ciekawego czytelnika odsyłamy.

32. PRZYSPIESZENIE RUCHU RZUTOWANEGO NA PŁASCZYZNIE. Uważajmy ten sam trójkąt MTT_1 trzech prędkości, i zrzutujmy go na płasczyznie P.



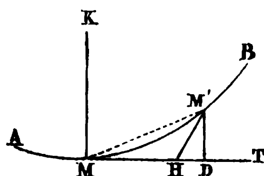
Niech będą, na tej płasczyznie, CD rzut krążnej AB i NSS_1 rzut trójkąta MTT_1. Wiemy że, w ruchu rzutowanym na płasczyznie, prędkość rzutu jest rzutem prędkości punktu ruchomego w przestrzeni. Na mocy tego twierdzenia, i względnie do wartości boków trójkąta MTT_1, bok NS, będąc rzutem boku MT na płasczyznie P, jest prędkością rzutu N na końcu czasu t; a zaś bok NS_1, będąc rzutem boku MT_1, jest równy prędkości rzutu N na końcu czasu $t+\Delta t$ i równoległy do tej prędkości. Zatem bok SS_1 równa się prędkości nabytej rzutu N w czasie Δt. Owoż, bok SS_1 jest oczywiście rzutem boku TT_1 na płasczyznie P; więc prędkość nabyta rzutu N na tej płasczyznie jest rzutem prędkości nabytej punktu ruchomego M

w przestrzeni, w tym samym czasie Δt tak małym jak się podoba. Ztąd wynika

TWIERDZENIE. *Przyspieszenie całe rzutu punktu na płaszczyznie jest rzutem przyspieszenia całego w przestrzeni.*

33. Dowiedziemy jeszcze jednej formuły która nam szczególniej w ruchu względnym będzie użyteczna.

Niech będą M i M′ dwa położenia sąsiednie które punkt ruchomy bierze na swojej krążnej na końcu czasów t i $t+\Delta t$.



Przez punkt M poprowadźmy do tej krążnej styczną MT, i weźmy na niej długość $\mathrm{MH} = v\Delta t$; połączmy HM′, i szukajmy co wyraża odległość HM′, gdy łuk MM′ staje się nieskończenie małym. W tym celu, poprowadźmy cięciwę MM′ i zrzutujmy trójkąt MM′H na osi jakiejkolwiek XX′. Uważając że bok MM′ jest wynikową łamanej MHM′, i nazywając k spółczynnik rzutowania boku HM′, znajdujemy

$$\Delta x = v\Delta t \frac{dx}{ds} + \mathrm{HM}'.k = \frac{dx}{dt}\Delta t + \mathrm{HM}.k.$$

Ale

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \epsilon\right);$$

jeśli więc podstawimy tę wartość i przejdziemy do granicy,

otrzymamy ostatecznie

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2\text{HM}'.k}{dt^2};$$

zkąd (31)

$$\frac{2\text{HM}'}{dt^2}=j \quad \text{albo.} \quad \text{HM}'=\frac{1}{2}jdt^2.$$

Ta ważna formuła pokazuje że linia nieskończenie mała HM' jest kierunkiem przyspieszenia punktu ruchomego w przestrzeni, a jej wielkość podzielona przez $\frac{1}{2}dt^2$ wyznacza wielkość tego przyspieszenia.

Z punktu M' spuśćmy prostopadłę M'D na styczną MT; można łatwo znaleźć odległości M'D i HD. Jakoż, proste HM' i DM' są, w granicy, kierunkami przyspieszenia całego j i przyspieszenia dośrodkowego $\frac{v^2}{\rho}$; więc z trójkąta prostokątnego DHM' wyprowadzamy :

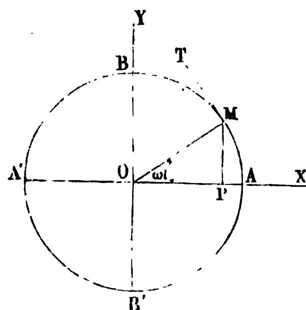
$$\text{DM}'=\text{HM}'\text{dos}\,\text{DM}'\text{H}=\frac{1}{2}jdt^2.\frac{\frac{v^2}{\rho}}{j}=\frac{1}{2}\frac{ds^2}{\rho},$$

$$\text{HD}=\text{HM}'\text{dos}\,\text{DHM}'=\frac{1}{2}jdt^2.\frac{\frac{dv}{dt}}{j}=\frac{1}{2}d^2s.$$

34. Na zastosowanie wyłożonej teoryi, weźmy następujące zagadnienie :

Punkt materyalny M *przebiega okrąg koła pionowego* ABA' *ruchem jednostajnym : wykazać okoliczności ruchu tego punktu i ruchu jego rzutu na średnicy poziomej* AA'.

Odnieśmy położenia punktu ruchomego M do dwóch śre-



dnic prostokątnych, poziomej AA' i pionowej BB', wziętych za osie spółrzędnych. Jeśli nazwiemy ω prędkość kątową promienia $OM = R$, i obierzemy punkt A za początek łuków, długość łuku AM wyrazi się przez

(1) $$s = R\omega t, \qquad \text{zkąd} \qquad v = R\omega,$$

i równania ruchu punktu M będą

(2) $$x = R\cos\omega t, \qquad y = R\sin\omega t.$$

Prędkości ruchów rzutowanych na osiach prostokątnych OX, OY, są

(3) $$\frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t, \qquad \frac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t.$$

Równania pokazują że te prędkości składowe są rzutami prędkości $v = R\omega$ punktu ruchomego, która ma kierunek stycznej MT. Co sprawdza wiadome twierdzenie.

Biorąc pochodne drugie, znajdujemy przyspieszenia ruchu

rzutów na osiach,

$$(4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -R\omega^2 \operatorname{dos}\omega t = -\omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -R\omega^2 \operatorname{wst}\omega t = -\omega^2 y.$$

Te wartości przyspieszeń składowych dowodzą że przyspieszenie całe ma wartość stateczną $R\omega^2$, i jest skierowane ku środkowi koła w każdem położeniu punktu ruchomego na okręgu. Co właśnie być powinno. Albowiem, z przyczyny ruchu jednostajnego przyspieszenie styczenne jest zero; więc przyspieszenie całe przywodzi się do przyspieszenia dośrodkowego $\frac{v^2}{R} = R\omega^2$.

Z równań (3) i (4) wnosimy że ruchy rzutów punktu M na średnicach AA′, BB′ są oscyllacyjne, a ich przyspieszenia są proporcyonalne do odległości każdego rzutu od środka koła. Wyniki zgodne z temi któreśmy w Dynamice otrzymali.

35. Uważajmy teraz rzut prostokątny, ruchu kołowego jednostajnego, na płasczyznie z którą płasczyzna koła tworzy nachylenie i. Wiemy że rzutem koła na tej płasczyznie jest ellipsa; jeśli więc weźmiemy osie ellipsy za osie spółrzędnych, równania ruchu rzutów będą

$$(5) \quad x = R \operatorname{dos}\omega t, \qquad y = R \operatorname{dos} i \operatorname{wst}\omega t.$$

Rugując t znajdujemy równanie ellipsy

$$(6) \quad \frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \operatorname{dos}^2 i} = 1.$$

Prędkości w ruchach rzutowanych na osiach są

$$(7)\quad \frac{dx}{dt} = -\mathrm{R}\omega\,\mathrm{wst}\,\omega t, \qquad \frac{dy}{dt} = \mathrm{R}\omega\,\mathrm{dos}\,i\,\mathrm{dos}\,\omega t;$$

a przyspieszenia całe tych ruchów wyrażają się przez

$$(8)\quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\mathrm{R}\omega^2\,\mathrm{dos}\,\omega t = -\omega^2 x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\mathrm{R}\omega^2\,\mathrm{dos}\,i\,\mathrm{wst}\,\omega t = -\omega^2 y. \end{aligned}$$

Z równań (7) wynika że rzut punktu ruchomego, opisujący ellipsę, ma prędkość zmienną, wyrażoną przez

$$\mathrm{R}\omega\sqrt{1 - \mathrm{wst}^2 i\,\mathrm{dos}^2\omega t}.$$

Równania (8) pokazują że przyspieszenie całe w tym ruchu elliptycznym ma wartość

$$\omega^2\sqrt{x^2 + y^2} = \omega^2 r,$$

w której r znaczy promień wodzący punktu ruchomego na ellipsie.

To przyspieszenie czyni z osiami ellipsy kąty mające dostawy $-\frac{x}{r}$, $-\frac{y}{r}$. Więc w ruchu elliptycznym, który jest rzutem ruchu kołowego jednostajnego, przyspieszenie całe przechodzi przez środek ellipsy i jest proporcyonalne do promienia wodzącego.

Ten wynik łatwo się wprost otrzymuje. W samej rzeczy,

w ruchu kołowym jednostajnym przyspieszenie całe punktu materyalnego M jest stateczne, i przywodzi się do przyspieszenia dośrodkowego $\omega^2 . OM$; a ponieważ rzut tego przyspieszenia na płasczyznie ellipsy jest przyspieszeniem rzutu N punktu materyalnego M, więc przyspieszenie całe rzutu N ma za miarę $\omega^2 . OM \operatorname{dos} NOM = \omega^2 . ON$; zatem jest proporcyonalne do promienia wodzącego ON i przechodzi przez środek ellipsy.

PRZYSPIESZENIE RUCHU ODNIESIONEGO DO SPÓŁRZĘDNYCH BIEGUNOWYCH.

36. Widzieliśmy, w ruchu punktu materyalnego na płasczyznie, że składowe prędkości w funkcyi spółrzędnych biegunowych wyrażają się przez

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt} \operatorname{dos}\theta - r \operatorname{wst}\theta \frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt} \operatorname{wst}\theta + r \operatorname{dos}\theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Różniczkując drugi raz, znajdziemy przyspieszenia składowe, równoległe do osi spółrzędnych prostolinijnych, wyrażone w funkcyi spółrzędnych biegunowych; to jest:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \operatorname{dos}\theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \operatorname{wst}\theta - r \operatorname{wst}\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - r \operatorname{dos}\theta \frac{d\theta^2}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \operatorname{wst}\theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \operatorname{dos}\theta + r \operatorname{dos}\theta \frac{d^2\theta}{dt^2} - r \operatorname{wst}\theta \frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Z tych dwóch składowych przyspieszenia całego wyprowadza się łatwo dwa inne składowe przyspieszenia, jedno wzdłuż promienia wodzącego, drugie prostopadłe do tego promienia.

Otrzymamy przyspieszenie składowe wzdłuż promienia wodzącego, rzutując składowe $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ na tym promieniu, to jest mnożąc pierwsze równanie przez dos θ, drugie przez wst θ, i biorąc summę; co daje

$$j_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Podobnem rzutowaniem znajduje się przyspieszenie składowe prostopadłe do promienia wodzącego

$$j_p = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

W tych formułach wyraz $\frac{d^2r}{dt^2}$ przedstawia *przyspieszenie ślizgania* punktu ruchomego wzdłuż promienia, $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ *przyspieszenie styczenne* w ruchu *krążenia* punktu około bieguna na płaszczyznie XOY, i $r\frac{d\theta^2}{dt^2}$ *przyspieszenie dośrodkowe* w tym samym ruchu; nareszcie wyraz $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$ przedstawia *przyspieszenie dopełniające.*

37. Uważajmy teraz ruch punktu materyalnego w przestrzeni, i szukajmy przyspieszenia w funkcyi spółrzędnych biegunowych. Wiemy już (18) że prędkości składowe, równoległe do trzech osi spółrzędnych, wyrażają się przez

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\psi + r\,\text{dos}\,\theta\,\text{dos}\,\psi\frac{d\theta}{dt} - r\,\text{wst}\,\theta\,\text{wst}\,\psi\frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\text{wst}\,\theta\,\text{wst}\,\psi + r\,\text{dos}\,\theta\,\text{wst}\,\psi\frac{d\theta}{dt} + r\,\text{wst}\,\theta\,\text{dos}\,\psi\frac{d\psi}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\text{dos}\,\theta - r\,\text{wst}\,\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

Różniczkując te równania, otrzymujemy składowe przyspieszenia równoległe do trzech osi spółrzędnych :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \text{wst}\,\theta \,\text{dos}\,\psi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \text{dos}\,\theta \,\text{dos}\,\psi - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} \text{wst}\,\theta \,\text{wst}\,\psi$$

$$- r\,\text{wst}\,\theta \,\text{dos}\,\psi \frac{d\theta^2}{dt^2} - 2r\,\text{dos}\,\theta \,\text{wst}\,\psi \frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + r\,\text{dos}\,\theta \,\text{dos}\,\psi \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$- r\,\text{wst}\,\theta \,\text{dos}\,\psi \frac{d\psi^2}{dt^2} - r\,\text{wst}\,\theta \,\text{wst}\,\psi \frac{d^2\psi}{dt^2}.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \text{wst}\,\theta \,\text{wst}\,\psi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \text{dos}\,\theta \,\text{wst}\,\psi + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt} \text{wst}\,\theta \,\text{dos}\,\psi$$

$$- r\,\text{wst}\,\theta \,\text{wst}\,\psi \frac{d\theta^2}{dt^2} + 2r\,\text{dos}\,\theta \,\text{dos}\,\psi \frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt} + r\,\text{dos}\,\theta \,\text{wst}\,\psi \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$- r\,\text{wst}\,\theta \,\text{wst}\,\psi \frac{d\psi^2}{dt^2} + r\,\text{wst}\,\theta \,\text{dos}\,\psi \frac{d^2\psi}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \text{dos}\,\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \text{wst}\,\theta - r\,\text{dos}\,\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} - r\,\text{wst}\,\theta \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Przyspieszenie całe, jako widzimy, ma za składowe osiem następujących przyspieszeń:

$\frac{d^2r}{dt^2}$ przyspieszenie ruchu ślizgania wzdłuż promienia wodzącego OM.

$r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ przyspieszenie styczenne w ruchu krążenia punktu ruchomego około bieguna na płaszczyznie ZOM ; $r\frac{d\theta^2}{dt^2}$ przyspieszenie dośrodkowe w tym samym ruchu.

$r\,\text{wst}\,\theta \frac{d^2\psi}{dt^2}$ przyspieszenie styczenne w ruchu krążenia około

osi OZ; $r \cdot \mathrm{wst}\,\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}$ przyspieszenie dośrodkowę w tym samym ruchu.

Nareszcie $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$, $2\frac{dr}{dt}\frac{d\psi}{dt}$, $2r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\psi}{dt}$ są przyspieszeniami dopełniającemi, które pochodzą z różnych ruchów promienia wodzącego OM około bieguna O.

WYZNACZENIE PROMIENIA KRZYWIZNY NIEKTÓRYCH LINIJ.

38. Można za pomocą przyspieszenia wyznaczyć promień krzywizny pewnych linij. Jakoż, oznaczając przez j_n przyspieszenie dośrodkowe (normalne), mamy

$$j_n = \frac{v^2}{\rho} \qquad \text{zkąd} \qquad \rho = \frac{v^2}{j_n}.$$

Jeśli więc rachunek przyspieszenia dośrodkowego j_n nie jest zawiły, promień krzywizny łatwo się wyznaczy. Następujące przykłady pokażą jak się czasem unika trudności.

Promień krzywizny helicy. Weźmy na pierwszy przykład helicę, i przypuśćmy że rzut punktu przebiegającego tę linię

porusza się jednostajnie na okręgu jej podstawy. W tem zało-

żeniu, uczyńmy kąt $AOP = \omega t$, i nazwijmy R promień walca, h krok helicy. Równania ruchu punktu na helicy będą

$$x = \mathrm{Rdos}\omega t$$

$$y = \mathrm{Rwst}\omega t$$

$$z = \frac{h}{2\pi}\omega t.$$

Różniczkując te równania, mamy najpierwej

$$\frac{dx}{dt} = - \mathrm{R}\omega\,\mathrm{wst}\,\omega t = - \omega y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{R}\omega\,\mathrm{dos}\,\omega t = \omega x,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h\omega}{2\pi}.$$

Zkąd

$$v^2 = \omega^2\left(\mathrm{R}^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}\right).$$

Ponieważ prędkość v jest stateczna, przyspieszenie styczenne jest zero $\frac{dv}{dt} = 0$. Zatem promień krzywizny wyraża się przez

$$\rho = \frac{v^2}{j}.$$

Aby mieć j różniczkujmy drugi raz; będzie

$$\frac{d^2x}{dt^2} = - \omega^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = - \omega^2 y,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

zkąd

$$j = \omega^2 R.$$

Te równania pokazują że przyspieszenie j jest równoległe do płasczyzny xy, i jego rzut na tej płasczyznie przechodzi przez środek koła O. Więc przyspieszenie j ma kierunek promienia MI walca. Dzieląc wartość v^2 przez wartość j, otrzymujemy promień krzywizny ρ w punkcie M helicy,

$$(1) \qquad \rho = R + \frac{h^2}{4\pi^2 R}.$$

Oznaczmy przez K środek krzywizny, przez R′ jego odległość IK; będzie

$$R' = \frac{h^2}{4\pi^2 R} \qquad \text{albo} \qquad RR' = \frac{h^2}{4\pi^2}$$

R′ jest promieniem drugiego walca tej samej osi, na którym się znajduje druga helica mająca ten sam krok h co pierwsza, i utworzona przez punkt K poruszający się jednocześnie z puktem M. Punkta K i M są nawzajem środkami krzywizny tych dwóch helic.

39. Promień krzywizny ellipsy. Ellipsa odniesiona do swoich osi ma za równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Równania ruchu punktu materyalnege na ellipsie są

$$x = a \operatorname{dos} \omega t, \qquad y = b \operatorname{wst} \omega t.$$

Różniczkując, mamy

$$\frac{dx}{dt} = - a\omega \operatorname{wst} \omega t,$$

$$\frac{dy}{dt} = b\omega \operatorname{dos} \omega t,$$

zkąd

$$v^2 = \frac{\omega^2}{a^2b^2}(a^4y^2 + b^4x^2).$$

Różniczkując drugi raz, znajdujemy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2y;$$

zkąd

$$j = \omega^2r$$

gdzie r znaczy promień wodzący OM.

Te równania pokazują że przyspieszenie j przechodzi przez środek O ellipsy. Zatem

$$j_n = j \operatorname{dos} OMN = \omega^2 r \operatorname{dos} OMN = \omega^2 h,$$

gdzie h znaczy prostopadłę OH spuszczoną ze środka ellipsy na styczną MT.

Owoż

$$h = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}},$$

$$\text{normalna MN} = \frac{1}{a^2}\sqrt{a^4y^2 + b^4x^2}.$$

Ztąd, oznaczając przez N normalnę MN, wynika między h i N następujący związek

$$h\text{N} = b^2.$$

Wiemy nadto że parametr p ellipsy wyraża się przez

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Ale teraz

$$v^2 = \frac{\omega^2a^2b^2}{h^2};$$

mamy więc

(2) $$\rho = \frac{v^2}{j_n} = \frac{a^2b^2}{h^3} = \frac{\text{N}^3}{p^2}.$$

Uważajmy nakoniec że

$$a^4y^2 + b^4x^2 = b^2(a^4 - c^2x^2) = b^2(a^2 - cx)(a^2 + cx) = a^2b^2r_1r_2.$$

nazywając r_1, r_2 promienie wodzące które łączą punkt M z ogniskami ellipsy.

Zatem

$$h = \frac{ab}{\sqrt{r_1r_2}}.$$

Jeśli podstawimy tę wartość w formule (2), otrzymamy

jeszcze inne wyrażenie promienia krzywizny w ellipsie,

(3) $$\rho = \frac{r_1 r_2}{h} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

40. PROMIEŃ KRZYWIZNY HIPERBOLI. Żeby znaleźć promień krzywizny hiperboli, danej przez równanie

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

dość będzie wziąć za równania ruchu

$$x = a + kt$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2akt + k^2t^2).$$

Różniczkując, mamy

$$\frac{dx}{dt} = k$$

$$y\frac{dy}{dt} = \frac{b^2kx}{a^2}.$$

Ztąd

$$v^2 = \frac{k^2}{a^4y^2}(a^4y^2 + b^4x^2).$$

Ale wiemy że normalna N w punkcie M(x, y) hiperboli, albo ellipsy, przedstawia się przez

$$N^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4};$$

więc

$$v^2 = \frac{k^2N^2}{y^2}.$$

Szukajmy teraz przyspieszenia dośrodkowego j_n. Różniczkując drugi raz równania ruchu, znajdujemy

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{b^2k^2}{a^2y} - \frac{b^4k^2x^2}{a^4y^3} = -\frac{b^4k^2}{a^2y^3}.$$

Te wartości pokazują że przyspieszenie całe j jest równoległe do kierunku rzędnych odjemnych; a ponieważ kąt tego przyspieszenia z normalną MN ma za dostawę $\frac{y}{N}$, przyspieszenie normalne j_n wyraża się przez

$$j_n = \frac{b^4k^2}{a^2y^2N}.$$

Więc, jeśli podzielimy v^2 przez j_n, otrzymamy szukany promień krzywizny

$$\rho = \frac{a^2N^3}{b^4} = \frac{N^3}{p^2}.$$

41. Promień krzywizny paraboli. Nietrudno znaleźć, takim samym sposobem, promień krzywizny paraboli przedstawionej przez równanie

$$y^2 = 2px.$$

Dość tylko wziąć równania ruchu

$$x = kt,$$

$$y^2 = 2pkt,$$

i zróżniczkować dwa razy. Co daje

$$\frac{dx}{dt} = k,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{pk}{y},$$

albo

$$\frac{dy^2}{dt^2} = p^2k^2y^{-2},$$

$$\frac{dx}{dt} = k;$$

zkąd zaraz wynika

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{p^2k^2}{y^3},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0.$$

Z tych równań wywodzimy łatwo wartośc

$$v^2 = \frac{k^2}{y^2}(p^2 + y^2) = \frac{k^2N^2}{y^2},$$

$$j = \frac{p^2k^2}{y^3}, \qquad j_n = \frac{p^2k^2}{y^3}\cdot\frac{y}{N} = \frac{p^2k^2}{Ny^2}.$$

Więc

$$\rho = \frac{v^2}{j_n} = \frac{N^3}{p^2}.$$

42. Promień krzywizny trzech stożkowych, którym dopiero co wskazali, wyraża się jednakowo. Aby go łatwo wykreślić, trzeba wiedzieć że w tych krzywych rzut normalnej na promieniu wodzącym ogniskowym jest stateczny, i równa się parametrowi p. Dowiedźmy tego twierdzenia.

Niech będzie najpierwej ellipsa (*ostatnia figura*) w której MD, MD′ są rzutami normalnej MN na promieniach wodzących MF, MF′. Trójkąty MNF i MNF′ dają:

$$\overline{NF}^2 = N^2 + \overline{MF}^2 - 2MF.MD,$$

$$\overline{NF'}^2 = N^2 + \overline{MF'}^2 - 2MF'.MD'.$$

Jeśli odciągniemy pierwsze równanie od drugiego, uważając że $MF + MF' = 2a$, $NF + NF' = 2c$, i dzieląc przez $MF' - MF$, będzie

$$\frac{(NF' - NF)c}{MF' - MF} = a - MD.$$

Ale, w trójkącie FMF′, normalna MN jest dwójsieczną kąta M; zatem mamy

$$\frac{NF'}{MF'} = \frac{NF}{MF} = \frac{NF' - NF}{MF' - MF} = \frac{NF' + NF}{MF' + MF} = \frac{c}{a}.$$

Podstawiając wartość niewiadomego stosunku w poprzedzającem równaniu, otrzymujemy

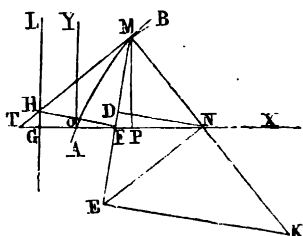
$$\frac{c^2}{a} = a - MD;$$

zkąd

$$MD = \frac{b^2}{a} = p.$$

Podobne dowodzenie w hiperboli daje taki sam wynik ; uważając tylko że $NF' + NF = 2c$, $\pm (MF' - MF) = 2a$.

Nakoniec niech będzie parabola, mająca ognisko F i kie-



rownicę GL, w której MD jest rzutem normalnej MN na promieniu wodzącym MF, i NP jej rzutem na osi; ostatni rzut, jako wiadomo, jest równy parametrowi p. Owoż, widzimy łatwo że trójkąt FMN jest równoramienny, $FT = FM = FN$; ztąd wynika że dwa trójkąty prostokątne DMN i PMN są równe, bo mają spólną przeciwprostokątnę MN i kąty DMN, MNP równe. Więc $DM = NP = p$.

Możemy teraz eleganckiem wykreśleniem znaleźć promień krzywizny trzech stożkowych. Jakoż, nazywając α kąt NMF, będzie

$$\rho = N \cdot \frac{N}{p} \cdot \frac{N}{p} = \frac{N}{\text{dos}\,\alpha} \cdot \frac{1}{\text{dos}\,\alpha};$$

więc z punktu N wyprowadź prostopadłę NE do normalnej MN aż do spotkania E z promieniem wodzącym MF, i z punktu E prostopadłę EK do tego promienia aż do spotkania K z normalną przedłużoną. Prosta MK będzie promieniem krzywizny w punkcie M danej stożkowej.

Między kątem α, promieniem krzywizny ρ i parametrem p

jest związek; albowiem

$$\rho = \frac{N^3}{p^2} = \frac{p}{\left(\frac{p}{N}\right)^3} = \frac{p}{\cos^3\alpha},$$

albo

(4) $$\rho \cos^3\alpha = p.$$

PRZYSPIESZENIE W RUCHU PLANET OKOŁO SŁOŃCA.

Dowiedziemy najpierwej następującego zadania.

43. Twierdzenie. *Jeśli punkt materyalny* M *porusza się na płaszczyznie tak że promień wodzący* OM *opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasów, przyspieszenie ma kierunek tego promienia.*

Nazywając c powierzchnię opisaną w jedności czasu przez promień wodzący OM $= r$, mamy

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = 2c.$$

Owoż, $$\theta = \text{łuk tg}\frac{y}{x};$$

ztąd, różniczkując, wynika

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = 2c.$$

Różniczkując drugi raz, będzie

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

albo

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y}.$$

Ostatnie równanie pokazuje że dwa prostokąty wystawione, jeden na składowych przyspieszenia $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ a drugi na spółrzędnych x, y punktu M, są podobne. Więc przyspieszenie całe j jest skierowane wedle promienia wodzącego OM.

Wzajemnica jest prawdziwa. Zresztą, twierdzenie i jego wzajemnica były już, i nawet ogólniej, dowiedzione w Dynamice.

Wyrachujmy teraz przyspieszenie j. Nazywając α kąt normalnej z promieniem wodzącym, mamy

$$j \operatorname{dos} \alpha = \frac{v^2}{\rho}.$$

Owoż (16),

$$v \operatorname{dos} \alpha = r\frac{d\theta}{dt} = \frac{2c}{r};$$

więc

$$j = \frac{4c^2}{r^2 \rho \operatorname{dos}^3 \alpha},$$

albo (42, form. 4)

(1) $$j = \frac{4c^2}{pr^2}.$$

KEPLER obserwacyą odkrył trzy ustawy obrotu planet około słońca :

1° *Każda planeta przebiega ellipsę której słońce zajmuje jedno z ognisk.*

2° *Promień wodzący poprowadzony od słońca do planety opisuje powierzchnie proporcyonalne do czasów.*

3° *Kwadraty czasów całkowitych obrotów planet są proporcyonalne do sześcianów wielkich osi orbit.*

Wiemy że parametr ellipsy wyraża się przez

$$p = \frac{b^2}{a}.$$

Powierzchnia ellipsy ma za miarę πab; zatem, jeśli nazwiemy T czas całego obrotu planety około słońca, będziemy mieli

$$c^2 = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2}.$$

Podstawiając te wartości w formule (1), otrzymujemy przyspieszenie j ruchu planety

$$j = \frac{4\pi a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Dla drugiej planety będzie tak samo

$$j' = \frac{4\pi a'^3}{T'^2} \cdot \frac{1}{r'^2}.$$

Ale, wedle trzeciej ustawy *Keplera* mamy

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{a'^3}{T'^2};$$

zkąd wnosimy że, w ruchu elliptycznym planet około słońca, przyspieszenie jest ciągle skierowane ku środkowi słońca, i jest w stosunku odwrotnym kwadratu odległości planety od słońca.

UWAGA. Można mieć formułę przyspieszenia całego ogólniejszą od (1) podanej wyżej. Dość tylko uważać że

$$j = \frac{v^2}{\rho} \cdot \frac{1}{\operatorname{dos}\alpha}.$$

Owoż

$$v^2 = \frac{ds^2}{dt^2},$$

$$\operatorname{dos}\alpha = \frac{rd\theta}{ds},$$

a promień krzywizny w funkcyi spółrzędnych biegunowych wyraża się przez

$$\rho = \frac{ds^3}{d\theta^3\left(r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)};$$

więc

$$j = \frac{d\theta^2}{rdt^2}\left(r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right).$$

Ale, na mocy zasady powierzchni, mamy

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{4c^2}{r^4};$$

zatem

$$j = \frac{4c^2}{r^5}\left(r^2 + 2\frac{dr^2}{d\theta^2} - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right).$$

Ta formuła może się jeszcze uprościć. Jakoż

$$d.\frac{1}{r} = -\frac{dr}{r^2}, \quad d^2.\frac{1}{r} = \frac{2dr^2 - rd^2r}{r^3}.$$

Podstawiając ostatnią wartość, znajdujemy ogólną formułę

$$(2) \qquad j = \frac{4c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2 . \frac{1}{r}}{d\theta^2}\right),$$

która daje przyspieszenie całe punktu ruchomego gdy jego krążna jest wiadoma.

Zastosujmy formułę (2) do planet. Krążna elliptyczna planet ma równanie

$$r = \frac{p}{1 + e\,\mathrm{dos}\,\theta},$$

z którego wywodzimy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e\,\mathrm{dos}\,\theta).$$

$$d^2 . \frac{1}{r} = -\frac{e}{p}\,\mathrm{dos}\,\theta;$$

więc

$$j = \frac{4c^2}{pr^2},$$

wynik ten sam co poprzednio otrzymany.

Weźmy teraz równanie ogólne

$$r = \frac{p}{1 + e\,\mathrm{dos}\,\lambda\theta}.$$

Jeśli λ jest spółmierne, to równanie przedstawia krzywę algebryczną; a jeśli λ jest niespółmierne, ta krzywa będzie linią przestępną.

Szukajmy przyspieszenia j. Mamy

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \operatorname{dos} \lambda\theta),$$

$$d^2 . \frac{1}{r} = -\frac{e\lambda^2}{p} \operatorname{dos} \lambda\theta . d\theta^2;$$

więc

$$j = \frac{4c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{e\lambda^2}{p} \operatorname{dos} \lambda\theta\right) = \frac{4c^2}{r^2}\left(\frac{\lambda^2}{p} + \frac{1-\lambda^2}{r}\right).$$

Nakoniec, jeśli orbita jest lemniskatą Bernullego

$$r^2 = a^2 \operatorname{wst} 2\theta,$$

będzie

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} \operatorname{wst}^{-\frac{1}{2}} 2\theta;$$

zkąd

$$\frac{d . \frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{1}{a} \operatorname{wst}^{-} 2\theta \operatorname{dos} 2\theta,$$

$$\frac{d^2 . \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{a}\left(3 \operatorname{wst}^{-\frac{5}{2}} 2\theta \operatorname{dos}^2 2\theta + 2 \operatorname{wst}^{-\frac{1}{2}} 2\theta\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{3a^4}{r^4} - 1\right);$$

więc

$$j = \frac{12c^2a^4}{r^7}.$$

Owoż, dla wyznaczenia statecznej c, mamy powierzchnię lemniskaty

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{wst} 2\theta = \frac{a^2}{2},$$

która daje

$$c = \frac{a^2}{2T};$$

więc ostatecznie

$$j = \frac{3a^8}{T^2 \gamma^7}.$$

RUCH POJEDYNCZY UKŁADU NIEZMIENNEGO.

44. Nazywa się *układem niezmiennym* zbiór punktów których odległości względne zostają ciągle te same. Figura układu niezmiennego jest określona, gdy są wiadome odległości trzech punktów nie w linii prostej, i odległości każdego innego punktu układu od tych trzech. Z tego określenia wynika że położenie układu w przestrzeni jest wyznaczone, gdy są wiadome położenia trzech jego punktów M, N, P tworzących trójkąt; więc, aby znać zupełnie ruch układu niezmiennego, dość tylko znać ruchy trzech wierzchołków trójkąta MNP.

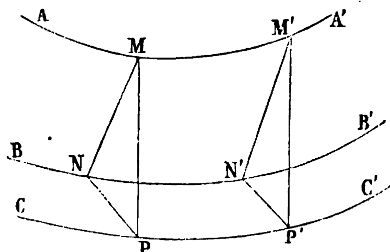
Dwa są ruchy pojedyncze które układ niezmienny brać może, ruch przeniesienia i ruch wirowy, określone jako następuje:

1° Ruch przeniesienia (*ruch postępowy*). Mówi się że układ niezmienny ma w przestrzeni *ruch przeniesienia,* gdy wszystkie jego punkta opisują jednocześnie linie równoległe i równe.

Niech będą M, N, P trzy punkta układu, nie leżące w linii prostej, których położenia wyznaczają jego położenie w przestrzeni, niech będzie także AA′ krążna punktu M, BB′ krążna drugiego punktu N, i CC′ krążna trzeciego P. Układ będzie miał ruch przeniesienia, jeśli trzy krążne AA′, BB′, CC′ są trzema położeniami równoległemi między sobą jednej i tej samej linii.

Na końcu pewnego czasu t wierzchołki trójkąta MNP zaj-

mują na trzech krążnych odpowiedające położenia M, N, P;



na końcu czasu $t+\Delta t$ wierzchołek M przeniósł się na M'. wierzchołek N na N', i wierzchołek P na P'; trójkąt MNP wziął położenie M'N'P' nie zmieniając kształtu. W ruchu przeniesienia boki trójkąta MNP zostają ciągle równoległe do siebie samych, a jego wierzchołki mają w każdej chwili prędkości równe i równoległe. Jakoż, na mocy określenia tego ruchu, jakikolwiek jest jego rodzaj, łuki MM', NN', PP' są równe i równoległe; zatem ich cięciwy MM', NN', PP' są także równe i równoległe, jakkolwiek małe są łuki. To dowodzi że boki MN i M'N', MP i M'P', NP i N'P' są ciągle równe i równoległe między sobą. Nadto

$$\frac{MM'}{\Delta t}=\frac{NN'}{\Delta t}=\frac{PP'}{\Delta t};$$

wiec granice tych stosunków, to jest prędkości punktów M, N, P, są równe i równoległe.

Ztąd wynika że : 1° wszelka prosta, łącząca dwa jakiekolwiek punkta układu niezmiennego, zostaje równoległa do siebie samej, w każdem położeniu tego układu ; 2° wszystkie punkta układu mają prędkości równe i równoległe. Dlatego mówi się że cały układ porusza się równolegle do siebie samego, z prędkością spólną wszystkim jego punktom w każdej chwili. Więc, aby znać ruch przeniesienia układu niezmiennego, przez czas jakikolwiek, dość wyznaczyć przez ten czas ruch jednego tylko z jego punktów składowych.

2° Ruch wirowy. Jeśli układ niezmienny w ruchu jest stale związany z dwoma punktami A i B nieruchomemi, wszystkie jego punkta leżące na kierunku prostej AB zostają nieruchome, a wszystkie inne opisują około tej linii okręgi kół zwanych równoleżnikami. Ten ruch obracania się układu około prostej AB, nazywa się *ruchem wirowym*, a ta prosta *osią wirowania*.

W ruchu wirowym promienie równoleżników opisują jednocześnie kąty równe θ; wartość $\Delta\theta$ kąta opisanego w czasie Δt, przez każdy z tych promieni, nazywa się *przemieszczeniem kątowem* układu przez ten czas. Ruch wirowy jest okreslony ustawą która daje wartość kąta θ w funkcyi czasu t.

Pochodna $\frac{d\theta}{dt}$ nazywa się *prędkością kątową*, a pochodna druga $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ *przyspieszeniem kątowem*. Według jak prędkość kątowa jest stateczna albo zmienna, ruch wirowy jest jednostajny albo zmienny; a jeśli przyspieszenie kątowe jest stateczne ruch jest jednostajnie zmienny.

Nazwijmy s łuk koła opisany w czasie t przez punkt M układu, r promień wodzący, i θ kąt opisany przez ten promień; nakoniec, oznaczmy przez v prędkość punktu M i przez ω prędkość kątową; będzie

$$s = r\theta;$$

zkąd

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{d^2s}{dt^2} = r\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

albo

$$v = r\omega, \qquad \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}.$$

Ostatnie formuły pokazują że, w ruchu wirowym jednostaj-

nym prędkość punktu M jest proporcyonalna do jego odległości od osi wirowania; a w ruchu wirowym jednostajnie zmiennym przyspieszenie jest proporcyonalne do tej odległości.

Uwaga. Gdy jedna bryła obraca się około drugiej, jak na przykład księżyc około ziemi, trzeba dobrze uważać żeby nie wziąć przeniesienia kołowego za ruch wirowy. Otoż, w ruchu przeniesienia, linie proste łączące dwa jakiekolwiek punkta bryły zostają ciągle równoległe do siebie samych; więc, przypuszczając ten ruch, widzianoby z powierzchni ziemi wszystkie części księżyca, jedne po drugich, w całym okresie jego obrotu. Jeśli przeciwnie księżyc ma ruch wirowy około ziemi, płaszczyzna oddzielająca jego część widzialną od niewidzialnej, zostanie ciągle prostopadła do linii środków księżyca i ziemi; dlatego jedno tylko i zawsze to samo półsferze księżyca będzie widziane z powierzchni ziemi. Co też właśnie daje obserwacya, z małą różnicą kołysań księżyca które pozwalają widzieć brzegi drugiego półsferza. Mamy więc prawo powiedzieć że ruch księżyca byłby całkiem wirowy około ziemi, gdyby ziemia zostawała nieruchoma w przestrzeni. Ale te odróżnienia ruchów tyczą się tylko ciał mających rozmiary skończone. Ruch punktu materyalnego nie jest ani przeniesieniem ani wirowaniem, jest ruchem pojedynczym.

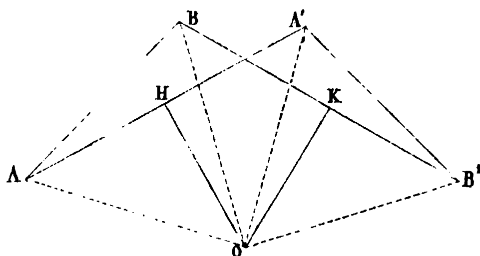
45. Aby ruch wirowy był zupełnie określony, trzeba żeby była wiadoma oś wirowania, prędkość kątowa, i strona ruchu. To wszystko może się przedstawić jedną linią prostą. Dość tylko wziąć długość któraby wyrażała prędkość kątową, i ponieść ją na oś wirowania, zaczynając od punktu obranego za początek, w stronę taką żeby widz, mający nogi na początku a głowę na końcu tej odległości, spostrzegał ruch odbywający się od lewej ręki do prawej, jako ruch pozorny słońca. Ten ruch wsteczny wirowań jest nam najdogodniejszy, bo się zgadza z temi których używamy w geometryi. Dlatego wirowanie od lewej ręki do prawej nazwiemy *dodatnem*, a wirowanie w stronę

przeciwną *odjemnem*. Tym sposobem uważając trzy osie spółrzędnych dodatnych OX, OY, OZ, widzimy że w wirowaniu dodatnem ruch się odbywa około OZ od x do y; około OX od y do z; nakoniec około OY od z do x.

Dowiedziemy teraz kilku twierdzeń których potrzebujemy do wyłożenia ruchu względnego.

46. FIGURA PŁASKA RUCHOMA NA PŁASZCZYZNIE. *Gdy figura płaska bierze różne położenia na płaszczyznie, można ją zawsze sprowadzić z jednego położenia na drugie ruchem wirowym około jednego z punktów tej płaszczyzny jako środka, albo co to samo, ruchem wirowym około jednej osi prostopadłej do płaszczyzny figury.*

Na dowodzenie tego, przez dwa jakiekolwiek punkta A, B



figury poprowadźmy linię prostą, i przypuśćmy że ta prosta ma kierunek AB w pierwszem położeniu figury a kierunek A'B' w drugiem położeniu. Poczem, połączmy dwa punkta odpowiedne A, A' linią prostą AA', i dwa punkta odpowiedne B, B' linią prostą BB'; ze środków H i K tych dwóch linij wyprowadźmy prostopadłe HO i KO, które się ogólnie przetną w punkcie O; nakoniec, połączmy OA, OB, OA', OB'. Teraz uważajmy że dwie pochyłe OA i OA' są równe; tak samo dwie pochyłe OB i OB' są także równe. Zatem, dwa trójkąty OAA', OBB' są równe jako mające trzy boki równe; ztąd wynika że kąty AOA', BOB' są równe. Jeśli więc damy figurze, do której należy prosta AB, ruch wirowy około środka O,

pod kątem AOA', punkt A padnie na A' i punkt B na B', a temsamem pierwsza figura przystanie we wszystkich punktach do drugiej. Widzimy tym sposobem że na płasczyznie figury płaskiej istnieje zawsze jeden punkt, około którego ta figura wirując może przejść z jednego położenia na drugie; istnieje więc w tym jedynym punkcie oś wirowania figury prostopadła do jej płasczyzny.

Gdy proste AA', BB', łączące punkta odpowiedne, są równoległe albo się schodzą w jedną linię, wtedy prostopadłe wyprowadzone ze środków H i K prostych AA' i BB' są równoległe. W tym przypadku, żeby sprowadzić figurę AB do przystawania z figurą A'B', dość jest dać pierwszej figurze ruch przeniesienia prostolinijnego w kierunku przyzwoitym. Owoż, ruch tego rodzaju może być uważany jako ruch wirowy około punktu nieskończenie odległego na płasczyznie figury. Więc, z tym szczególnym przypadkiem ruchu wirowego, twierdzenie w mowie będące jest ogólne.

W dowodzeniu twierdzenia okazaliśmy że dwa punkta odpowiedne A, A' są równo oddalone od punktu O; tak samo dwa punkta odpowiedne B, B' są także równo oddalone od punktu O. Owoż, punkta A i B są wzięte dowolnie na pierwszej figurze; więc dwa punkta odpowiedne jakiekolwiek M, M' są równo oddalone od tego samego punktu O. Ztąd wynika

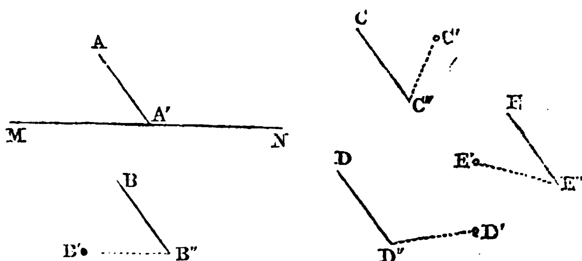
Twierdzenie. *Prostopadłe wyprowadzone ze środka prostych* AA', *łączących dwa położenia tego samego punktu figury ruchomej na płasczyznie, schodzą się w jednym punkcie* O *który się nazywa środkiem wirowania figury.*

47. Figura sferyczna ruchoma na sferze. Stosując do figury sferycznej rozumowanie użyte w poprzedzającym numerze, i zastępując linie proste przez łuki kół wielkich, dowiedzie się także że: figura sferyczna ruchoma na swojej sferze, może być sprowadzona z jakiegokolwiek położenia na inne, ruchem

wirowym około jednego punktu powierzchni sfery jako bieguna, albo co to samo, ruchem wirowym około jednej średnicy sfery jako osi.

48. Układ niezmienny ruchomy w przestrzeni. Jakikolwiek jest ruch układu niezmiennego, można zawsze sprowadzić ten układ z jednego położenia na drugie, dając mu najpierwej ruch przeniesienia a potem ruch wirowy.

Niech będą A, B, C,... punkta układu bryłowego w pierwszem



położeniu, i A', B', C',... te same punkta w drugiem położeniu. Połączmy punkta A i A' linią prostą AA', i poprowadźmy przez wszystkie inne punkta B, C, D,... linie proste BB'', CC'', DD'',... równe prostej AA' i do niej równoległe. Aby sprowadzić układ z pierwszego położenia ABCD... na drugie A'B'C'D'..., dajmy mu najpierwej ruch przeniesienia prostolinijny mający wielkość i kierunek linii prostej AA'; punkta A, B, C, D,... przyjdą na A', B'', C'', D'',... Poczem, wyobraźmy sobie sferę nakreśloną z punktu A' jako środka, promieniem jakimkolwiek; ta sfera, przecinając promienie A'B', A'C', A'D',... w punktach b', c', d',... i promienie A'B'', A'C'', A'D'',... w punktach b'', c'', d'',.. utworzy dwie figury sferyczne oczywiście przystawalne. Owoż, wiemy że obracając figurę sferyczną $b''c''d''$... około pewnej średnicy sfery, możemy ją sprowadzić na figurę równą $b'c'd'$...; co uczyniwszy, widzimy że punkta B'' C'', D'',... padają na B', C', D',...;

więc można sprowadzić układ niezmienny z pierwszego położenia ABCD... na drugie A'B'C'D'.. za pomocą przeniesienia wedle AA' i wirowania około pewnej osi MN, przechodzącej przez A'.

To cośmy powiedzieli o punkcie A stosuje się do wszystkich punktów układu, i temsamem do każdego punktu stale z tem układem związanego. Można więc, zmieniając jak się podoba ruch przeniesienia i biorąc przyzwoity ruch wirowania, sprowadzić układ niezmienny z jednego położenia na jakiekolwiek inne. Między rozmaitemi doborami tych dwóch ruchów, istnieje zawsze jeden w którym przeniesienie jest równoległe do osi wirowania. Jakoż, przetnijmy układ niezmienny płasczyzną P prostopadłą do osi wirowania MN, i nazwijmy F figurę tego przecięcia. W przeniesieniu układu wedle AA', figura F przenosi się na płasczyznie P' równoległej do P; a potem w wirowaniu około osi MN figura F obraca się na płasczyznie P' i bierze położenie F'. Owoż, aby sprowadzić tę figurę z pierwszego położenia F na ostatnie F', możemy jej dać najpierwej ruch przeniesienia równoległy do osi MN i równy odległości dwóch płasczyzn równoległych P, P', a potem, obracając ją przyzwoicie na płasczyznie P', przywieść na położenie F'. Tym sposobem, odbywając dwa wskazane ruchy, układ niezmienny związany z figurą F przechodzi z położenia ABCD... do położenia A'B'C'D'.. Więc istnieje w przestrzeni pewna oś, wedle której wykonywając przeniesienie i następnie wirowanie można sprowadzić układ niezmienny z jednegopołożenia na inne jakiekolwiek.

RUCH WZGLĘDNY PUNKTU MATERYALNEGO.

49. Wiemy już że ruch względny, czyli ruch pozorny, punktu materyalnego tem się różni od ruchu samoistego, to jest od ruchu istotnego który ten punkt posiada, że jego krążna i pręd_

kość są odniesione, nie do osi spółrzędnych niezmiennych jako w ruchu rzeczywistym, ale do osi mających pewny ruch w przestrzeni.

Wszystkie ruchy, które spostrzegamy na powierzchni ziemi albo na niebie, są ruchami pozornemi. Wiadomość ruchów względnych jest niezbędnie potrzebna, nietylko z przyczyny że nie znamy punktu nieruchomego w przestrzeni któryby za początek osi spółrzędnych wziąć można, ale głównie dlatego że ruchy względne prowadzą do poznania ruchu samoistego, albo raczej do wiedzy ruchu który za samoisty uważamy.

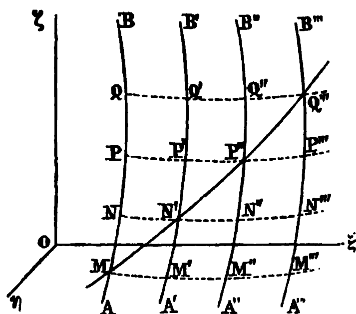
I tak, przytaczając poprzednio użyty przykład, na statku który płynie spokojnie, ruch małej kulki toczącej się na pomoście jest *ruchem względnym*, a ruch płynącego statku *ruchem uniesienia.* Te dwa ruchy, uważane jako jednoczesne, składają się i dają ruch kulki względem ziemi. Ruch wynikowy jest jeszcze ruchem względnym, ponieważ ziemia nie jest w spoczynku. Owoż, ruch wirowy ziemi około linii biegunów jest ruchem uniesienia; składając znowu te dwa nowe ruchy, otrzymujemy ruch kulki względem osi mających kierunki stateczne które przechodzą przez środek ziemi. Ale nowy ruch wynikowy nie jest jeszcze samoistym ruchem kulki, ponieważ ziemia obraca się około słońca. I tak dalej.

Jako widzimy, zagadnienie składania ruchów jest następujące: Mając dany ruch punktu M względem układu ruchomego S, zwanego *układem porównania*, i znając ruch uniesienia tego układu, znaleźć ruch samoisty punktu M. — Zagadnienie odwrotne, rozkładanie ruchu, zależy na tem żeby, mając dany ruch rzeczywisty punktu M, znaleźć jego ruch względem układu S którego ruch jest wiadomy; albo jeszcze, znając ruch samoisty i ruch względny punktu M, znaleźć ruch układu porównania S.

Układ porównania S stanowią trzy osie prostokątne spółrzędnych. Mierząc w każdej chwili spółrzędne punktu M wzglę-

dem trzech osi ruchomych, i oznaczając ich wartości na trzech osiach stałych, otrzymujemy krążnę względną tego punktu.

Krążna względna należy do układu porównania S i uczestniczy jego ruchowi uniesienia. Przypuśćmy więc że, począwszy od czasu t, układ ruchomy osi $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ unosi z sobą krążnę

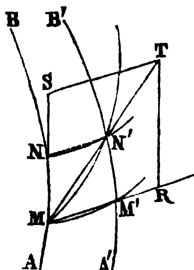


względną, i niech będą AB, A'B', A"B", A'''B''',... położenia tej krążnej w czasach $t, t', t'', t''',...$; przypuśćmy nadto że, w tych różnych epokach, punkt ruchomy bierze położenia M, N. P, Q na linii ruchomej AB. Na końcu czasu t punkt ruchomy znajduje się w M; w przeciągu czasu $t'-t$ ten punkt przebiega przestrzeń MN na krążnej względnej AB, tak że na końcu czasu t' zajmuje miejsce N; ale przez ten czas krążna względna przechodzi z położenia AB na położenie A'B', i punkt ruchomy zostaje przeniesiony w N'. Więc na końcu czasu t' punkt ruchomy zajmuje w przestrzeni miejsce N'. Dowiedzie się tak samo że na końcu czasu t'' krążna względna ma położenie A"B", i punkt ruchomy jest w P"; i tak dalej. Więc punkt ruchomy opisuje w przestrzeni krążnę MN'P"Q'''... i zajmuje na niej położenia M, N', P",.. na końcu czasów $t, t' t''$,..

Mamy tym sposobem krążnę samoistą i ustawę ruchu na tej linii; to jest, znamy zupełnie ruch samoisty punktu materyalnego za pomocą ruchów składowych.

Analitycznie składanie i rozkładanie ruchów jest poprostu kwestyą przekształcenia spółrzędnych, którąśmy wyłożyli w Dynamice punktu.

50. Można znaleźć prędkość samoistą punktu ruchomego, znając jego prędkość względną i prędkość ruchu uniesienia. Niech będzie M położenie punktu ruchomego na końcu cza-



su t, i AB krążna względna tego punktu. Punkt M przemieszcza się na swojej krążnej względnej tak, że na końcu czasu $t+\Delta t$ znajduje się w N; ale, w tym samym czasie krążna AB, skutkiem ruchu uniesienia osi zmiennych, bierze położenie A'B', i punkt M zostaje przeniesiony w N'. Owoż, gdyby punkt M nie miał ruchu względnego, byłby w M' na końcu czasu $t+\Delta t$; zatem, z przyczyny ruchu względnego, ponkt ruchomy przechodzi w czasie Δt z położenia M na położenie N' w przestrzeni. Widzimy więc że

MN' jest przemieszczeniem samoistem punktu ruchomego,
MN albo M'N' jego przemieszczeniem względnem,
MM' przemieszczeniem w ruchu uniesienia. Ztąd wnosimy

Twierdzenie. *Cięciwa przemieszczenia rzeczywistego w czasie* Δt *jest wynikową cięciwy przemieszczenia względnego i cięciwy przemieszczenia w ruchu uniesienia.*

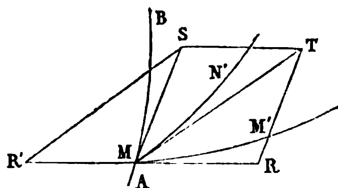
Równoległobok prędkości. Uważajmy teraz że, gdy czas Δt dąży do zera, cięciwy różnią się od swych łuków tak mało jak się podoba, a ich stosunki do Δt mają za odpowiedne granice

wartości v, v', v'', przez które oznaczamy prędkość samoistą, prędkość uniesienia i prędkość względną. W tym samym czasie czworobok MM'N'N, ogólnie skośny, dąży do czworoboku płaskiego, i ma za granicę nieskończenie mały równoległobok którego dwa boki i przekątna w punkcie M są proporcyonalne do prędkości v', v'', v. Jeśli więc zbudujemy równoległobok na prędkości uniesienia $v' = MR$ i na prędkości względnej $v'' = MS$, przekątna MT tego równoległoboku będzie przedstawiała wielkość i kierunek prędkości samoistej v punktu ruchomego. Zatem

TWIERDZENIE. *Prędkość samoista jest wynikową prędkości względnej i prędkości uniesienia.*

Gdyby prędkości v' i v'' zamieniły się jedna na drugą, to jest, gdyby pierwsza była prędkością względną a druga prędkością uniesienia, wykreślenie równoległoboku dałoby jeszcze tę samą przekątnę, i temsamem jednakową prędkość samoistą. Dlatego dwie prędkości v' i v'' nazwano ogólnie składowemi prędkości samoistej v.

Jeśli trzeba znaleźć prędkość względną MS, znając prędkość



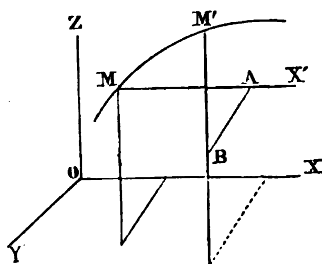
samoistą MT i prędkość uniesienia MR, dość uważać że MS jest przekątną równoległoboku MTSR'. Ztąd wynika

TWIERDZENIE. *Prędkość względna jest wynikową prędkości samoistej i prędkości uniesienia wziętej w stronę przeciwną.*

51. Twierdzenie składania prędkości względnej z prędkością uniesienia jest ogólne, i stosuje się do jakiejkolwiek liczby

ruchów uniesienia. Aby znaleźć prędkość rzeczywistą punktu, którego ruch jest uważany jako wynikowy kilku ruchów jednoczesnych, składa się prędkość względną v_w z prędkością uniesienia v_u, za pomocą trójkąta, i otrzymaną wynikowę v'_w uważa się za drugą prędkość względną; składając znalezioną prędkość względną v'_w z drugą prędkością uniesienia v'_u, otrzymuje się nową wynikowę v''_w która jest nową prędkością względną; i tak dalej, aż do *ostatniej* prędkosci uniesienia. Linia zamykająca wielokąt przedstawia wielkość i kierunek prędkości samoistej.

52. Ruchy jednoczesne prostolinijne, do których sprowadziliśmy ruchy krzywolinijne, mogą się wytłumaczyć przez ruchy względne. Aby to dobrze okazać, niech będą dwa położenia sąsiednie $M(x, y, z)$ i $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ punktu ruchomego M w przestrzeni. Wiemy że prędkość tego punktu jest wynikową prędkości składowych $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Owoż,



możemy wziąć te trzy prędkości jednoczesne za odpowiedające prędkości trzech ruchów spółistniejących punktu M, i uważać jeden z tych ruchów, na przykład ruch mający prędkość $\frac{dx}{dt}$, za ruch względny, a dwa inne za ruchy uniesienia. W tem założeniu, jeśli poprowadzimy przez punkt M łamanę MABM', której boki MA, AB, BM' są przyrostami Δx, Δy, Δz, nic nam nie przeszkadza przypuścić że punkt ruchomy M

przebiega na krążnej względnej MX′, równoległej do OX, bok MA w czasie Δt z prędkością $\frac{dx}{dt}$; i że, w tym samym czasie, ta krążna MX′ posiada na płasczyznie MAB, równoległej do XOY, ruch uniesienia na mocy którego każdy jej punkt opisuje linię prostą, równoległą do osi OY i równą bokowi AB; że nakoniec płasczyzna MAB, równoległa do XOY, ma w czasie Δt ruch przeniesienia równoległego do osi OZ i równego bokowi BM′. Spółistnienie tych trzech ruchów jest równowarte rzeczywistemu przemieszczeniu punktu ruchomego z położenia M do M′ w przestrzeni.

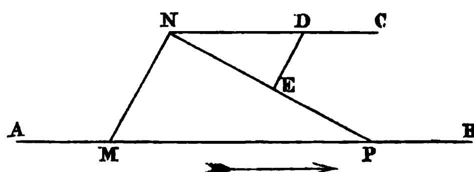
Ten rozkład ruchu na inne ruchy, które się przypuszcza spółistniejące z pierwszym, może się oczywiście rozmaitemi sposobami wykonać, i, według przypadku, wielce uprościć zagadnienie Mechaniki. Ale trzeba zawsze pamiętać że składanie albo rozkładanie ruchów i prędkości nie znaczy bynajmniej żeby jeden punkt materyalny miał kilka ruchów, albo był ożywiony kilkoma prędkościami zarazem. Kilka sił może działać zarazem na jeden punkt materyalny, i nadawać mu różnej wielkości i kierunku popędy; ale ten punkt, powtarzamy raz jeszcze, nie może mieć tylko jeden ruch i jedną prędkość w każdej chwili.

Weźmiemy teraz parę przykładów do zastosowania teoryi ruchów względnych.

53. Zagadnienie I. *Punkt materyalny* M *opisuje, z prędkością stateczną* u, *linię prostą* AB *idąc od* A *do* B; *a drugi punkt materyalny* N *ma wyjść z położenia* N *z prędkością stateczną* v; *jaki mu trzeba dać kierunek żeby spotkał punkt* M?

Przypuśćmy zagadnienie rozwiązane, i niech będzie P punkt spotkania dwóch punktów ruchomych które wyszły z położeń początkowych M i N. Możemy uważać że punkt N porusza się na linii prostej NM, mającej ruch równoległy do AB z prędkością stateczną u. Mamy tym sposobem kierunek ruchu

względnego punktu N; prędkość u ruchu uniesienia i jego



kierunek NC równoległy do AB; nakoniec prędkość v ruchu samoistego. Owoż, niewiadomy kierunek NP ruchu samoistego jest przekątną równoległoboku wystawionego na kierunkach NM i NC; jeśli więc na prostej NC weźmiemy długość $ND = u$, i przez punkt D poprowadzimy prostę DE równoległą do NM, a potem z punktu N jako środka, promieniem mającym długość v, nakreślimy łuk koła, punkt przecięcia E tego łuku z prostą DE będzie na szukanym kierunku NP. Zatem prosta NEP rozwiązuje zagadnienie.

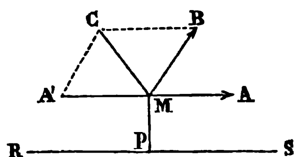
Widzimy łatwo że zagadnienie ma ogólnie dwa rozwiązania; ale w przypadku szczególnym może być tylko jedno rozwiązanie, albo nawet nie być żadnego.

54. Zagadnienie II. *Pływacz, wychodzący z punktu* N (fig. pow.), *chce przepłynąć rzekę w linii prostej* NP, *z wysileniem najmniejszem możebnem; w jakim kierunku powinien płynąć?*

Przypuśćmy brzegi rzeki równoległe, i wodę jednostajnie płynącą z prędkością u. Rozumując jako w poprzedzającem zagadnieniu, widzimy zaraz że jest wiadomy kierunek NP prędkości samoistej, i są dane kierunek i wielkość $ND = u$ prędkości uniesienia; a trzeba znaleźć kierunek, dajmy nato NM, prędkości względnej której wielkość ma być najmniejsza możebna. Więc szukany kierunek NM jest równoległy do prostopadłej DE spuszczonej z punktu D na NP.

55. Zagadnienie III. *Znając wielkość i kierunek prędkości*

płynącego statku, wielkość i kierunek prędkości wiatru, wyznaczyć stronę w którą powiewa chorągiewka masztu?



Niech będzie M wierzchołek masztu MP na którym powiewa chorągiewka; MA kierunek i wielkość prędkości statku, MB kierunek i wielkość prędkości wiatru. Możemy uważać powiew chorągiewki jako ruch punktu materyalnego którego prędkością samoistą jest MB, a prędkością uniesienia MA. Więc, żeby znaleźć prędkość względną, trzeba na przedłużeniu boku MA wziąć długość MA' = MA, i na bokach MB, MA' zbudować równoległobok MBCA'; przekątna MC tego równoległoboku będzie prędkością względną ruchu chorągiewki i przedstawi kierunek jej powiewu.

Można innym sposobem rozwiązać zagadnienie. Rozumowanie które go nastręcza, równie ogólne jak użyteczne, opiera się na zasadzie niezależności ruchu względnego od ruchu spólnego, wysłowionej jako następuje : *ruch względny jednego układu w porównaniu do drugiego nie jest zmieniony, gdy się nadaje obydwom układom ruch uniesienia spólny.*

Owoż, gdy statek jest w spoczynku, wiatr orientuje chorągiewkę masztu w kierunku w którym wieje; a gdy statek jest w ruchu, ten ruch wpływa oczywiście na kierunek powiewu chorągiewki. Na mocy przytoczonej zasady, nie zmienimy ruchu względnego statku w porównaniu do wiatru, jeśli myślą nadamy obydwom ruch uniesienia spólny. Wyobraźmy więc ten ruch spólny w taki sposób żeby, w chwili uważanej, statek był nieruchomy; co się uskuteczni (przypuszczając że statek

i wiatr odebrały zarazem prędkość równą i przeciwną prędkości MA. Statek będzie w zmyślonym spoczynku. Zatem prędkość względna wiatru będzie wynikową prędkości MB którą rzeczywiście posiada, i prędkości MA' którąśmy nadali idealnie całemu układowi. Wszystko się dzieje tak jak gdyby statek był w spoczynku, i jak gdyby prędkość wiatru była przedstawiona co do wielkości i kierunku przez przekątnę MC równoległoboku MBCA', zbudowanego na prędkości MB wiatru i na prędkości MA' równej i przeciwnej prędkości MA statku.

Powyższe wykreślenie pokazuje wydatnie dlaczego ten sam wiatr, działający na dwa statki, albo na dwa pociągi drogi żelaznej, idące w strony przeciwne, daje chorągiewkom statków albo dymom machin kierunki całkiem różne.

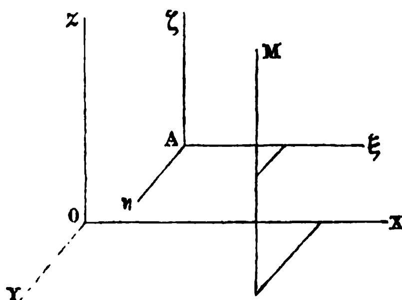
Gdy prędkość pociągu drogi żelaznej i prędkość wiatru są w linii prostej, dym machiny ma kierunek tej linii w jedną albo w drugą stronę. Wtedy może się nawet zdarzyć że dym machiny, idący w stronę wiatru przy zaczęciu ruchu pociągu, bierze kierunek wprost przeciwny podczas pełnego ruchu. To zależy od prędkości wiatru i prędkości ruchu pociągu.

56. Z przyczyny rocznego ruchu ziemi światło ciał niebiekich, których ruch obserwujemy, nie przychodzi we właściwym sobie kierunku do lunet astronomicznych. Gdyby ziemia była nieruchoma w przestrzeni, światło miałoby sam kierunek promienia światłego. Ale światło przebiega na *sekundę* 298000 kilometrów (74500 mil); a ziemia, z prędkością średnią 30 kilometrów (7 i pół mil) na sekundę, opisuje rocznie, około słońca, ellipsę mającą w niem jedno ze swoich ognisk. Dlatego właśnie kierunek promienia światłego, w którym się okazuje ciało niebieskie, jest wynikową prędkości światła i prędkości ziemi na jej orbicie. Ta wynikowa czyni, w stronę ruchu ziemi, pewny kąt z kierunkiem rzeczywistym w którym się ciało niebieskie znajduje. Ztąd wynika że wszystkie gwiazdy zdają się opisywać rocznie małą krzywę zamkniętą na niebie. Ten

pozorny ruch, sprawiony rzeczywistym ruchem ziemi, stanowi to co nazywają *aberracyą światła.*

RUCH WZGLĘDNY DWÓCH PUNKTÓW MATERYALNYCH.

57. Niech będą x, y, z spółrzędne punktu ruchomego M



odniesione do trzech osi stałych OX, OY, OZ; ruch tego punktu będzie określony skoro x, y, z będą dane w funkcyi czasu t.

Nazwijmy x_1, y_1, z_1 spółrzędne początku A trzech osi ruchomych $A\xi$, $A\eta$, $A\zeta$, równoległych do osi stałych, dane także w funkcyi czasu t.

Spółrzędne ξ, η, ζ punktu M, odniesionego do osi ruchomych, będą wyrażone w funkcyi czasu t, za pomocą trzech następujących związków

$$\xi = x - x_1$$

$$\eta = y - y_1$$

$$\zeta = z - z_1.$$

które są *równaniami ruchu względnego.*

Uważajmy szczególny przypadek w którym punkt M, którego szukamy ruchu względnego, jest w spoczynku samoistym. Możemy przypuścić że punkt M jest w O, i uczynić $x=0$, $y=0$, $z=0$; co daje

$$\xi = -x_1$$

$$\eta = -y_1$$

$$\zeta = -z_1.$$

Widzimy tym sposobem że punkt nieruchomy O ma, względem osi porównania Aξ, Aη, Aζ, ruch pozorny równy i przeciwny ruchowi początku A względem osi stałych OX, OY, OZ. Ztąd wnosimy że krążna względna, czyli pozorna, punktu O jest symetryczną krążnej rzeczywistej puktu A. Te dwie krążne są symetryczne, ogólnie nierówne, dlatego że spółrzędne x_1, y_1, z_1 punktu A i spółrzędne względne ξ, η, ζ są równe ale znaków przeciwnych.

Ruch roczny pozorny słońca. Gdy punkt M jest w spoczynku samoistym a punkt A opisuje krążnę płaską, wtedy krążna pozorna punktu M jest także płaska. Te dwie krążne płaskie i symetryczne są równe, i różnią się samem tylko położeniem. Mamy tego przykład w ruchu rocznym ziemi około słońca. W tym ruchu ziemia opisuje ellipsę, której słońce zajmuje jedno z ognisk; ztąd wynika że dla mieszkańca ziemi słońce zdaje się opisywać rocznie ellipsę, równą poprzedzającej, której jedno z ognisk jest zajęte przez ziemię.

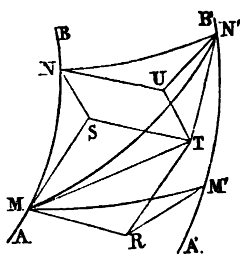
58. Ruch względny punktu odniesiony do osi ruchomych jakichkolwiek. Wyobraźmy sobie że punktowi ruchomemu i osiom porównania dano ruch spólny jakikolwiek; ruch względny punktu nie będzie przezto w niczem zmieniony, na mocy zasady niezależności ruchu względnego od ruchu spól-

nego. Otóż, jeśli wybierzemy ruch spólny taki, żeby w każdej chwili był równy i przeciwny ruchowi jaki osie posiadają; te osie zostaną w spoczynku, a punkt będzie miał ruch wynikający ze składania ruchu jaki najpierwej posiadał i z ruchu jaki mu potem idealnie nadano. Otóż, ten ruch wynikowy będzie właśnie szukanym ruchem względnym, w którym wyznaczy się krążnę względną jak gdyby była krążną rzeczywistą.

Gdy osie porównania mają ruch wirowy, a punkt M, którego szukamy ruchu względnego, jest w spoczynku samoistym w przestrzeni, ten ruch względny jest ruchem wirowym, równym i przeciwnym ruchowi osi zmiennych. Znajdujemy tego przykład w ruchu dziennym słońca i gwiazd, który jest tylko pozorem, pochodzącym ztąd że ziemia ma ruch równy i przeciwny około linii biegunów.

PRZYSPIESZENIE W RUCHU WZGLĘDNYM.

59. Uważajmy najpierwej przypadek w którym tak zwany ruch uniesienia jest po prostu ruchem przeniesienia. Niech będzie AB krążna względna punktu ruchomego, która się prze-



nosi równolegle do siebie samej tak, że wszystkie jej punkta

mają w każdej chwili prędkości równe i równoległe. Oznaczmy przez M i N miejsca które punkt ruchomy zajmuje na tej krążnej na końcu czasów t i $t + dt$. Na końcu czasu $t + dt$ krążna względna AB bierze położenie A'B', i jej punkta M, N przychodzą do M', N'. Owóż, gdyby punkt ruchomy zostawał w spoczynku na miejscu M na krążnej AB, przeniósłby się jej ruchem w miejsce M' na końcu czasu $t + dt$. Ale ten punkt ruchomy przemieszcza się na krążnej AB tak że na końcu czasu $t + dt$ zajmuje miejsce N; więc, gdy krążna względna przenosi się z położenia AB na A'B', punkt ruchomy przechodzi z położenia M na N', opisując krążnę samoistą MN'. Niech będzie teraz v prędkość samoista punktu ruchomego w jego położeniu M; $v + dv$ jego prędkość gdy jest w N'; v' prędkość spólna wszystkim punktom krążnej względnej na końcu czasu t; $v' + dv'$ prędkość tych samych punktów na końcu czasu $t + dt$, w ruchu przeniesienia tej linii; nakoniec, v'' prędkość punktu ruchomego, na krążnej względnej, w jego położeniu M które zajmuje na końcu czasu t; $v'' + dv''$ jego prędkość w położeniu N na tej krążnej na końcu czasu $t + dt$. Prędkość v' jest prędkością uniesienia punktu ruchomego, v'' jego prędkością względną. Na końcu czasu t prędkość samoista v punktu ruchomego, który się wtedy znajduje w M, jest wynikową prędkości uniesienia v' i prędkości względnej v''. Tak samo, na końcu czasu $t + dt$, prędkość samoista $v + dv$ tego punktu jest wynikową prędkości uniesienia $v' + dv'$ i prędkości względnej $v'' + dv''$.

To ustaliwszy, poprowadźmy przez punkt M dwie styczne, jedną do krążnej uniesienia MM', drugą do krążnej względnej AB; weźmy na nich długości

$$MR = v'dt, \qquad MS = v''dt,$$

i połączmy RM', SN; poczem dopełnijmy równoległoboku MRTS. Widzimy łatwo że przekątna MT tego równoległoboku wyraża się przez prędkość samoistą v, tak jak MR i MS przez

odpowiedające prędkości v' i v''; co daje

$$MT = vdt.$$

Nadto, przekątna MT jest styczną w punkcie M do krążnej samoistej MN'. Jeśli więc połączymy punkt T z punktem N w którym się znajduje punkt ruchomy na końcu czasu $t + dt$, prosta TN' będzie przedstawiała kierunek przyspieszenia całego w ruchu samoistym; zatem, nazywając j wartość tego przyspieszenia, będziemy mieli (33)

$$TN' = \frac{1}{2} j dt^2.$$

Nazywając podobnie j' i j'' przyspieszenia całe w ruchu uniesienia i w ruchu względnym, mamy tak samo

$$RM' = \frac{1}{2} j' dt^2, \qquad SN = \frac{1}{2} j'' dt^2.$$

Możemy teraz łatwo znaleźć związek między trzema przyspieszeniami j, j', j''; dość tylko dopełnić równoległoboku NSTU, i połączyć UN'. W trójkącie TUN' mamy bok TU = SN, bok UN' = RM'. Owoż, bok TN' jest wynikową geometryczną obwodu TUN'; więc, *jeśli na dwóch bokach przyległych, danych z wielkości i kierunku przez wartości*

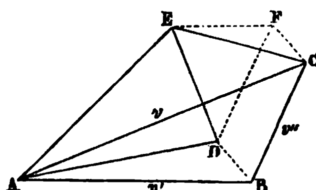
$$j' = \frac{2RM'}{dt^2}, \quad j'' = \frac{2SN}{dt^2},$$

wystawimy równoległobok, przekątna tego równoległoboku będzie przedstawiała wielkość i kierunek przyspieszenia całego j.

To dowodzi że, gdy ruch uniesienia jest ruchem przeniesienia, otrzymuje się przyspieszenie całe ruchu punktu, składając

przyspieszenia całe w ruchu uniesienia i w ruchu względnym, według prawidła równoległoboku (albo trójkąta) prędkości jednoczesnych.

Można innym sposobem wykreślić przyspieszenie samoiste. Wykreślmy trójkąt ABC, którego boki AB i BC przedsta-



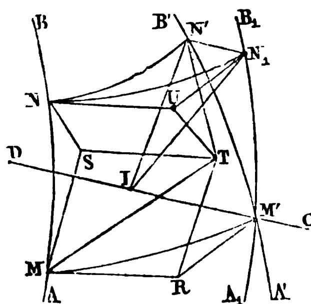
wiają wielkość i kierunek prędkości uniesienia v' i prędkości względnej v''; bok AC będzie przedstawiał wielkość i kierunek prędkości samoistej v. Wykreślmy tak samo drugi trójkąt ADE, którego boki AD, DE przedstawiają wielkość i kierunek prędkości składowych $v' + dv'$, $v'' + dv''$; bok AE będzie przedstawiał wielkość i kierunek prędkości samoistej $v + dv$. Prosta EC, łącząca dwa wierzchołki odpowiedne tych trójkątów, przedstawia oczywiście wielkość i kierunek prędkości nabytej dv w czasie dt, ponieważ w trójkącie ACE, $AC = v$, $AE = v + dv$. Więc stosunek $\frac{CE}{dt}$ wyraża przyspieszenie całe w ruchu rzeczywistym punktu.

Poprowadźmy teraz prostę CF równą prostej BD i do niej równoległą, a potem połączmy DF, EF. W trójkącie ABD, $BD = dv'$; a w trójkącie DEF, $FE = dv''$; więc boki CF, FE, CE są proporcyonalne do przyspieszeń j', j'', j. Co dowodzi także równoległoboku przyspieszeń.

Jeśli punkt ruchomy jest uważany jako mający zarazem kilka ruchów, byle tylko ruchy uniesienia były wszystkie przeniesieniami, widzimy łatwo że się wyznacza przyspieszenie całe

ruchu wynikowego, składając przyspieszenia całe ruchów składowych według prawidła wielokąta prędkości jednoczesnych.

60. Wiedząc jak się otrzymuje przyspieszenie całe w przypadku szczególnym ruchu względnego któryśmy dopiero co wyłożyli, nietrudno będzie znaleźć przyspieszenie całe w ruchu względnym jakimkolwiek. Uważajmy dwa położenia AB i A'B'



które krążna względna punktu ruchomego bierze na końcu czasów t i $t+dt$, i przypuśćmy że w tych czasach punkt ruchomy zajmuje na linii AB miejsca M, N. Wiemy że tę linię można sprowadzić z położenia AB na jakiekolwiek położenie A'B' w przestrzeni, dając jej najpierwej ruch przeniesienia równy przemieszczeniu nieskończenie małemu MM' punktu M, a potem ruch wirowy około pewnej osi CD przechodzącej przez punkt M' (48). Niech będzie A_1B_1 położenie które linia AB bierze skutkiem ruchu przeniesienia. W tym ruchu punkt N, idąc do N', przebiegnie drogę NN_1 równą drodze MM' i do niej równoległą; poczem dopiero, wirując około osi CD, opisze łuk N_1N' koła mającego środek I na tej osi. Zróbmy wykreślenia poprzedzającego przypadku, i połączmy TN', UN_1. Co uczyniwszy, otrzymujemy wielokąt TUN_1N' w którym TN' jest wynikową geometryczną obwodu TUN_1N'. Owoż, na mocy

wiadomego twierdzenia, mamy

$$\text{bok } TN' = \frac{1}{2} j dt^2, \quad TU = SN = \frac{1}{2} j'' dt^2, \quad UN_1 = RM' = \frac{1}{2} j' dt^2;$$

więc, dzieląc przez $\frac{1}{2} dt^2$, widzimy że pierwsze przyspieszenie składowe j'' jest przyspieszeniem całem w ruchu względnym punktu wzdłuż krążnej AB; drugie przyspieszenie składowe j' jest przyspieszeniem całem w ruchu uniesienia, to jest w ruchu któryby punkt ruchomy miał gdyby był związany z osiami porównania; nakoniec trzecie przyspieszenie składowe $\frac{2N_1N'}{dt^2}$, które tymczasem nazwiemy *dopełniającem*, pochodzi z ruchu wirowego około osi CD.

Aby znaleźć wartość przyspieszenia dopełniającego, uważajmy że łuk N_1N' należy do koła prostopadłego do osi wirowania CD; jeśli więc nazwiemy, jako zwykle, ω prędkość wirowania osi ruchomych około CD przez czas dt, długość łuku N_1N' wyrazi się przez

$$N_1N' = \omega dt . IN'.$$

Ale promień IN' jest rzutem, na płasczyznie swego koła, drogi $M'N'$ którą punkt ruchomy przebiega na krążnej względnej w czasie dt; ta zaś droga ma za granicę $v''dt$ i daje

$$IN' = v''dt \operatorname{wst}(\omega, v'');$$

oznaczając przez (ω, v'') kąt $DM'N'$ osi wirowania z kierunkiem prędkości względnej.

Zatem

$$N_1N' = \omega v'' dt^2 \operatorname{wst}(\omega, v'');$$

zkąd wynika wartość przyspieszenia dopełniającego

$$\frac{2N_1N'}{dt^2} = 2\omega v'' \operatorname{wst}(\omega, v'').$$

To przyspieszenie dopełniające, które nazwano *przyspieszeniem dośrodkowem składanem,* jest prostopadłe zarazem do osi wirowania i do prędkości względnej v'', a ma kierunek od N_1 do N', to jest idzie w stronę w którą wirowanie pociąga skrajność prędkości względnej. Z tego wszystkiego wnosimy :

TWIERDZENIE. *Jakikolwiek jest ruch uniesienia i ruch względny, przyspieszenie całe* j *ruchu samoistego jest wynikową trzech przyspieszeń, to jest : przyspieszenia* j' *ruchu uniesienia, przyspieszenia* j'' *ruchu względnego, i przyspieszenia dośrodkowego składanego* $2\omega v''\operatorname{wst}(\omega, v'')$.

Przyspieszenie dośrodkowe składane $2\omega v'' \operatorname{wst}(\omega, v'')$ jest zero, gdy $\omega = 0$, to jest gdy ruch uniesienia jest poprostu ruchem przeniesienia, jako w numerze poprzedzającym; albo gdy $v''=0$, a nakoniec gdy $\operatorname{wst}(\omega, v'') = 0$. W tych szczególnych przypadkach przyspieszenie samoiste jest wynikową dwóch tylko przyspieszeń, to jest przyspieszenia ruchu względnego i przyspieszenia ruchu uniesienia. W każdym innym przypadku trzeba, do tych dwóch przyspieszeń, dołączyć przyspieszenie dośrodkowe składane.

Przyspieszenie dośrodkowe składane wzięte w kierunku wprost przeciwnym nazywa się *przyspieszeniem odśrodkowem składanem.* Mamy więc twierdzenie podane przez KORIOLIS'A (*Coriolis*) :

TWIERDZENIE. *Przyspieszenie względne jest wynikową przyspieszenia samoistego, przyspieszenia w ruchu uniesienia wziętego w stronę przeciwiną, i przyspieszenia odśrodkowego składanego.*

Gdy ruch uniesienia jest prostolinijny i jednostajny, wtedy

nietylko przyspieszenie odśrodkowe składane jest zero, ale jeszcze przyspieszenie ruchu uniesienia jest także zero. W tym przypadku przyspieszenie względne nie różni się od przyspieszenia samoistego.

Gdy osie porównania mają ruch wirowy jednostajny, wtedy przyspieszenie ruchu uniesienia, wzięte w stronę przeciwną, jest przyspieszeniem odśrodkowem, i jego wartość dla punktu leżącego na odległość r od osi obrotu, wyraża się przez $\omega^2 r$.

Te wszystkie przypadki były już wykładane szczegółowo, pod inną postacią, w Dynamice punktu do której właściwie należą.

61. Jakkolwiek przyspieszenie dośrodkowe składane ma kształt prosty $2\omega v''$ wst(ω, v''), w zastosowaniach jednak dogodniej jest użyć jego składowych równoległych do trzech osi prostokątnych. Daliśmy już wyrażenia tych składowych w teoryi analitycznej ruchów względnych, powtórzymy je tutaj jedynie dla pamięci, odsyłając po dowód do pierwszego tomu. Przypominamy więc że, jeśli oznaczono przez p, q, r trzy składowe wirowania chwilowego ω, przez $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ trzy składowe prędkości względnej, odniesione do trzech osi prostokątnych *ruchomych*, trzy składowe przyspieszenia dośrodkowego składanego będą :

$$2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

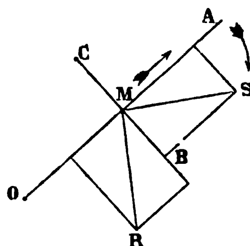
Aby łatwiej spamiętać te trzy składowe, dość jest uważać że

one wyrażają trzy *podwójne* wyznaczniki mniejsze składające wyznacznik o trzech kolumnach

$$\begin{vmatrix} 1 & p & \frac{dx}{dt} \\ 1 & q & \frac{dy}{dt} \\ 1 & r & \frac{dz}{dt} \end{vmatrix}.$$

62. Na zastosowanie weźmy następujące zagadnienie :

Punkt M *posuwa się z prędkością stałą v po linii prostej* OA, *która się obraca około osi mającej rzut* O, *z prędkością kątową stałą* ω. *Znaleźć przyspieszenie samoiste* j *tego punktu i jego prędkość samoistą; przypuszczając że prędkość v jest skierowana od* O *do* A, *a prędkość kątowa* ω *od lewej ręki ku prawej.*



1° Szukajmy trzech przyspieszeń składowych j', j'', j''' których wynikową jest przyspieszenie samoiste żądane.

Widzimy najpierwej że przyspieszenie j'' ruchu względnego jest zero, ponieważ ten ruch względny jest prostolinijny i jednostajny z założenia.

Aby znaleźć przyspieszenie j' ruchu uniesienia, uważajmy że, gbyby punkt M był związany z prostą ruchomą OA, opisywałby jednostajnie około osi O okrąg promienia OM, z prędkością

ω.OM; więc przyspieszenie ruchu uniesienia jest przyspieszeniem dośrodkowem $j' = \omega^2.\text{OM}$ i ma kierunek MO.

Przyspieszenie dośrodkowe składane j''', będąc prostopadłe do osi wirowania O i do prędkości względnej skierowanej wedle OA, ma kierunek prostej BC, poprowadzonej na płaszczyznie figury przez punkt M prostopadle do prostej OA. Żeby zaś wiedzieć w którą idzie stronę, uważajmy że wirowanie około osi O, z prędkością kątową ω, pociąga skrajność prędkości względnej punktu M na prawo; więc przyspieszenie dośrodkowe składane ma kierunek MB, i jego wartość wyraża się przez $2\omega v''\text{wst}(\omega, v'') = 2\omega v$.

Wyrachowawszy te przyspieszenia, jeśli poniesiemy na kierunek MO długość ω^2.OM, a na kierunek MB długość $2\omega v$ i wykreślimy prostokąt na tych długościach, przekątna MR tego prostokąta będzie przedstawiała wielkość i kierunek przyspieszenia samoistego j. Co daje

$$j = \omega\sqrt{\omega^2.\overline{\text{OM}}^2 + 4v^2}.$$

2° Znajduje się podobnie prędkość samoistą V punktu ruchomego M, składając prędkość względną v która ma kierunek MA, z prędkością ω.OM ruchu uniesienia która ma kierunek MB; przekątna MS prostokąta wystawionego na tych dwóch prędkościach, przedstawia wielkość i kierunek prędkości samoistej wyrażonej przez

$$\text{V} = \sqrt{\omega^2.\overline{\text{OM}}^2 + v^2}.$$

63. Za pomocą twierdzenia przyspieszeń, łatwo się znajduje przyspieszenie ruchu punktu M wzdłuż promienia wodzącego OM, i przyspieszenie w ruchu tego promienia na płaszczyznie około bieguna O. Jakoż, odnosząc ruch do spółrzędnych biegunowych, możemy uważać ruch wzdłuż promienia wodzącego, mający prędkość $\frac{dr}{dt}$, jako ruch względny, a ruch promienia

około bieguna z prędkością kątową $\frac{d\theta}{dt}$, jako ruch uniesienia.

Szukajmy teraz wartości przyspieszeń tych dwóch ruchów. Otóż, przyspieszenie względne ma kierunek promienia OM, i wyraża się przez $\frac{d^2r}{dt^2}$, co do wielkości i znaku.

Przyspieszenie ruchu uniesienia punktu M jest przyspieszeniem któreby miał ten punkt ruchomy, gdyby był związany z promieniem OM w jego ruchu wirowym; w tym ruchu punkt M opisywałby okrąg około bieguna O z prędkością $r\frac{d\theta}{dt}$; więc przyspieszenie całe tego ruchu uniesienia jest wynikową dwóch przyspieszeń składowych: styczennego wedle normalnej MN do OM które się wyraża przez $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$, i dośrodkowego wedle MO które ma wartość $r\frac{d\theta^2}{dt^2}$.

Nakoniec, przyspieszenie dośrodkowe składane ma kierunek MN, normalny do promienia wodzącego OM i do prędkości względnej v; jego wartość $2\omega v$ wst(ω, v) równa się $2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}$, albowiem wst $(\omega, v) = 1$.

Dodajmy przyspieszenia mające ten sam kierunek; przypuszczając że punkt M posuwa się w kierunku OM a promień OM obraca się w stronę kąta dodatnego θ, otrzymamy:

wedle OM $$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

wedle MN $$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{r}\frac{d.}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

Formuły już wiadome (36).

ROZDZIAŁ II.

RUCH UKŁADU BRYŁOWEGO.

---

64. Zwykle nazywają *układem bryłowym* albo po prostu *bryłą*, zbiór punktów materyalnych tworzących figurę niezmienną. Dla większej dobitności mówi się *układ bryłowy niezmienny*, aby go odróżnić od ciał materyalnych, których kształt ciągle się zmienia, z przyczyny nieustannego ruchu cząstek składowych. Ale, dla skrócenia mowy, używa się często w Cynematyce samego wyrazu *ciało* na oznaczenie układu niezmiennego; niema w tem żadnej dwójznaczności, bo Cynematyka uważa ciała jako *układy geometryczne*, niemateryalne.

Ruchy punktów składających układ niezmienny, wzięte wszystkie razem, stanowią ruch tego układu; ale ruchy pojedyncze tych wszystkich punktów nie są niezależne jedne od drugich. Dlatego trudno jest mieć odrazu jasne pojęcie tego co się ogólnie nazywa ruchem ciała, nawet kształtu niezmiennego. Jedyne ruchy które bezpośrednio widzimy są dwa ruchy pojedyncze : ruch *przeniesienia* i ruch *wirowy*. Musimy więc iść stopniowo jak postępowali twórcy Mechaniki rozumowej, i od ruchów prostych wznieść się do ruchów składanych.

RUCH FIGURY PŁASKIEJ NA PŁASCZYZNIE.

65. Przypuśćmy że figura płaska ma ruch jakikolwiek na płasczyznie, i uważajmy dwa położenia nieskończenie sąsie-

dnie ABC... i A'B'C'... Każda z prostych AA', łączących dwa nieskończenie bliskie położenia A i A' tego samego punktu figury, jest cięciwą nieskończenie małego łuku krążnej tego punktu; więc prostopadła wyprowadzona ze środka cięciwy AA' staje się w granicy normalną do krążnej w punkcie A, i kąt nieskończenie mały AOA' jest kątem którym trzeba obrócić figurę A'B'C'... około środka wirowania O, albo raczej około osi mającej rzut O, aby ją sprowadzić do przystawania z figurą ABC... (46).

Widzimy tym sposobem że wszelki ruch nieskończenie mały figury płaskiej na jej płaszczyznie jest ruchem wirowym, przez czas nieskończenie mały dt, około środka O leżącego na tej płaszczyznie, ale który może być w nieskończoności. Te środki, około których odbywają się wirowania po sobie idące figury i stanowiące jej ruch, są w ogóle różne od siebie; figura obraca się około każdego z nich, ale tylko przez jedną chwilę; dlatego każdy z tych środków został nazwany *środkiem chwilowym wirowania.*

Łuki krążnych opisanych w czasie dt przez punkta figury, albo przez punkta stale z nią związane, mogą być uważane jako łuki kół. Z tego wszystkiego wynika następujące zadanie

TWIERDZENIE. *Gdy figura płaska niezmienna przemieszcza się na swojej płaszczyznie, wtedy :*

1° *Normalne do krążnych opisanych przez jej punkta, albo przez punkta stale z nią związane, poprowadzone przez jednoczesne położenia tych punktów, przechodzą wszystkie przez odpowiedający środek chwilowy wirowania.*

2° *Prędkości punktów figury ruchomej, albo punktów stale przywiązanych, są proporcyonalne do ich odległości od środka chwilowego wirowania.*

Gdy są wiadome kierunki prędkości dwóch punktów figury

ruchomej, w chwili jakiejkolwiek, znajduje się środek chwilowy wirowania prowadząc przez każdy z tych punktów prostopadłę do kierunku jego prędkości, i wyznaczając punkt spotkania dwóch prostopadłych. Ale, żeby się to udało, trzeba oczywiście żeby kierunki dwóch prędkości nie były oba prostopadłe do prostej która łączy te dwa punkta. Jeśli dwie proste, prostopadłe do kierunków prędkości dwóch punktów, są równoległe, wtedy środek chwilowy wirowania jest w nieskończoności, i ruch figury jest ruchem przeniesienia.

Jeśli, oprócz wiadomych kierunków prędkości dwóch punktów figury, jest jeszcze znana wielkość jednej z tych prędkości, można będzie ztąd wywieść prędkość wszystkich punktów tej figury. Dość tylko wyznaczyć środek chwilowy wirowania, i wyrazić że prędkości dwóch rzeczonych punktów są proporcyonalne do ich odległości od tego środka.

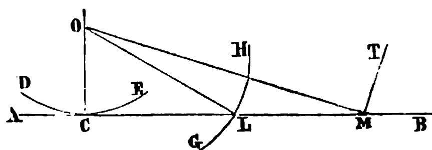
Dobrze jest uważać że środek chwilowy wirowania nie jest środkiem krzywizny w odpowiedającym punkcie krzywej ruchomej; bo wskazuje tylko kierunek stycznej, a nic nie wyraża względem krzywizny linii krzywej.

Na powyższem twierdzeniu opiera się metoda prowadzenia normalnych, i temsamem stycznych, do linij opisanych w ruchu figury niezmiennego kształtu. Zastosujemy tę metodę do kilku przykładów.

66. Styczna do konchoidy zogólnionej. Prosta ruchoma AB zostaje ciągle styczną do jednej krzywej DE, a spotyka drugą krzywę GH w punkcie L; począwszy od punktu L poniesiono na prostę AB długość stateczną LM. Konchoida zogólniona jest miejscem punktu M. Poprowadzić styczną do tej konchoidy w punkcie M (fig. poniżej).

Aby wykreślić styczną w punkcie M konchoidy danej przez określenie, uważajmy że prosta LM jest figurą niezmiennego kształtu, bo długość LM zostaje stateczna. Niech będzie O śro-

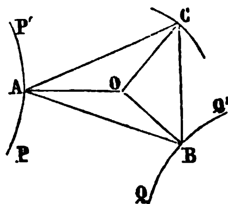
dek chwilowy wirowania figury; ponieważ punkt zetknięcia C



prostej AB ze swoją owłoką DE jest granicą punktu przecięcia dwóch położeń nieskończenie sąsiednich tej prostej, wynika ztąd że prosta CO jest normalną do owłoki DE. Otrzyma się zatem środek chwilowy wirowania O, prowadząc normalne CO i LO do danych krzywych DE i GH. Więc normalną do konchoidy w punkcie M jest prosta MO, a temsamem prosta MT prostopadła do MO jej styczną.

To wykreślenie stycznej do konchoidy, daleko prostsze od znalezionego przez metodę Roberval, zgadza się z ogólnym sposobem analitycznym, który się stosuje do wszelkiej krzywej; gdy tymczasem wykreślenia dane przez obie metody cynematyczne są ograniczone, ponieważ przypuszczają że są wiadome warunki ruchu figury niezmiennego kształtu do której punkt opisujący należy.

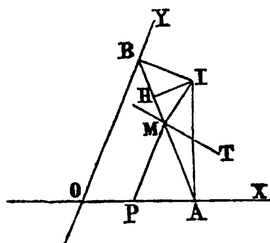
67. Zagadnienie. *Trójkąt* ABC *kształtu niezmiennego przemieszcza się na płaszczyznie dwóch linij jakichkolwiek* PP', QQ' *tak, że jego dwa wierzchołki* A, B *zostają ciągle na tych liniach, a trzeci wierzchołek* C *opisuje pewną krzywę. Nakreślić styczną do tej krzywej w punkcie* C.



Uważajmy że krążną punktu A jest linia PP', a krążną punktu B linia QQ'; zatem, jeśli poprowadzimy do tych dwóch linij, w punktach A i B, normalne AO i BO, punkt przecięcia O tych ostatnich będzie środkiem chwilowym wirowania trójkąta ABC przez czas *dt*. Owoż, w tym nieskończenie małym czasie, punkt C opisuje łuk normalny do prostej OC; więc otrzyma się styczną do krążnej wierzchołka C prowadząc przez ten punkt prostopadłę do OC.

Prędkości jednoczesne trzech wierzchołków A, B, C trójkąta są proporcyonalne do odległości OA, OB, OC odpowiedających danemu czasowi.

68. Zagadnienie. *Linia prosta* AB *długości stałej porusza się w kącie* XOY *tak, że jej skrajność* A *zostaje ciągle na osi* OX, *a skrajność* B *na osi* OY; *wiadomo*(*) *że w tym ruchu każdy punkt* M, *wzięty na kierunku prostej* AB, *opisuje ellipsę. Nakreślić styczną do tej ellipsy w punkcie* M.



Krążnemi punktów A i B są osie OX, OY; zatem, jeśli wyprowadzimy do tych osi prostopadłe AI i BI, ich punkt spotkania I będzie środkiem chwilowym wirowania prostej AB. Owoż, prosta IM jest normalną do krążnej punktu opisującego w jego

(*) Oznaczmy przez θ kąt XOY osi spółrzędnych, przez x, y spółrzędne punktu opisującego M, przez a, b długości odcinków MB, MA;

położeniu M; więc linia MT, prostopadła do IM, jest styczną do ellipsy którą ten punkt opisuje.

Punkt H, spodek prostopadłej spuszczonej ze środka chwilowego I na prostę AB, jest jednym z punktów *miejsca przecięć położeń po sobie idących prostej* AB, czyli jest jednym z punktów *owłoki* położeń tej prostej. Owoż, każdy punkt prostej AB opisuje ellipsę; więc ellipsa opisana przez punkt M jest styczną do prostej AB w pewnem jej położeniu. Ztąd wynika że ellipsy opisane przez różne punkta prostej AB są wszystkie stycznemi do jej owłoki, albo co to samo, mają spólną owłokę z tą linią (*).

---

będziemy mieli, w trójkącie AOB,

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 - 2OA.OB\,\text{dos}\,\theta.$$

Owoż, równoległa MP do OB daje

$$\frac{OA}{\frac{x}{a}} = \frac{AB}{1} = \frac{OB}{\frac{y}{b}};$$

więc podstawiając za OA, OB, AB ilości proporcyonalne $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, 1, znajdujemy równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{x}{a}\frac{y}{b}\,\text{dos}\,\theta = 1,$$

które przedstawia ellipsę mającą środek w punkcie O. Ta ellipsa spotyka oś $x$ów w punkcie którego odciętą jest a, i spotyka oś $y$nów w punkcie którego rzędną jest b. Gdy osie spółrzędnych są prostokątne, odcinki a i b wyrażają długości dwóch pół-osi ellipsy; wtedy jeśli $a = b$ ellipsa jest kołem promienia a.

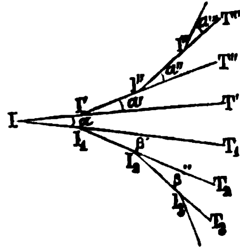
(*) Gdy kąt XOY jest prosty owłoka prostej AB ma równanie

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \overline{AB}^{\frac{2}{3}}.$$

RUCH EPICYKLOIDALNY PŁASKI.

69. Gdy na płasczyznie jedna figura toczy się, nie ślizgając, na drugiej figurze mającej położenie stałe, ten ruch nazywa się *ruchem epicykloidalnym*. Każdy punkt figury ruchomej kreśli linię której dano ogólne nazwisko *epicykloidy*. Cykloida jest epicykloidą którą się otrzymuje biorąc linię prostą za linię stałą czyli *podstawę*, a koło za *linię ruchomą* i punkt okręgu tego koła za *punkt opisujący*.

Aby mieć dokładne wyobrażenie ruchu figury płaskiej na jej płasczyznie, zastanówmy się nad przypadkiem następującym. Biorąc za podstawę linię wielokątną I, I_1, I_2..., wyobraźmy sobie że figura ruchoma obraca się najpierwej kątem $\alpha = T'IT_1$



około wierzchołka I, potem kątem $T'I'T'' + T_1I_1T_2 = \alpha' + \beta'$ około drugiego wierzchołka I_1, następnie kątem $\alpha'' + \beta''$ około trzeciego wierzchołka I_2; i tak dalej. Uważajmy figurę ruchomą w chwili kiedy ona zaczyna wirować około wierzchołka I; ten ruch sprowadza pewny jej punkt I′ na I_1. Aby znaleźć punkt I′, poprowadźmy prostę IT′ tak żeby czyniła z prostą II_1 kąt $T_1IT' = \alpha$, i weźmy na niej długość $II' = II_1$; aby mieć punkt I″, poprowadźmy prostę I′T″ w kierunku takim żeby czynił z prostą IT′ kąt $T'I'T'' = \alpha'$, i weźmy $I'I'' = I_1I_2$; następnie, dla wyznaczenia punktu I‴ poprowadźmy prostę I″T‴ tak żeby czyniła

z prostą $I''T''$ kąt $T''I''T''' = \alpha''$; i tak dalej. To ustaliwszy, przypatrzmy się całemu ruchowi. Gdy figura ruchoma, obracając się najpierwej około punktu I, uczyni kąt α, punkt I', uniesiony tym ruchem, przyjdzie na I_1, i prosta $I'T'$ weźmie kierunek I_1T_1. Od tej chwili figura ruchoma obraca się około punktu I_1, a gdy tym ruchem wirowym uczyni kąt $\alpha' + \beta'$, prosta $I'I''$ przystanie zupełnie do prostej I_1I_2, i punkt I'' padnie na I_2. Trzecie wirowanie figury ruchomej około punktu I_2 sprowadzi punkt I''' na I_3. Tak samo, wirowania około następujących wierzchołków stałego wielokąta przywiodą odpowiednie wierzchołki ruchomego. Tym sposobem, wielokąt ruchomy $II'I''I'''$... tocząc się po wielokącie stałym $II_1I_2I_3$... określa ruch figury ruchomej, która, będąc z nim stale związana, uczestniczy jego ruchowi. To wszystko jest niezależne od wielkości boków i kątów dwóch wielokątów, byle tylko odpowiednie boki były równe; a więc ma miejsce gdy boki stają się nieskończenie małemi, to jest gdy dwie figury toczące się jedne na drugiej są liniami krzywemi płaskiemi. Wtedy wszystkie punkta linii stałej są środkami chwilowemi wirowania linii ruchomej. Owoż, gdy figura płaska porusza się na swojej płaszczyznie, jej ruch jest ciągiem wirowań nieskończenie małych, około środków chwilowych, które tworzą nieprzerwany szereg punktów na tej płaszczyznie; ztąd wynika następujące zadanie :

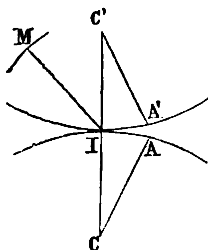
Twierdzenie. 1° Wszelki ruch figury płaskiej na jej płaszczyznie może być uważany jako ruch *epicykloidalny*.

2° *Gdy krzywa płaska toczy się, nie ślizgając, na krzywej leżącej na jej płaszczyznie, środkiem chwilowym wirowania wszelkiej figury, stale związanej z krzywą ruchomą, jest w każdej chwili punkt zetknięcia dwóch krzywych; i prosta łącząca ten punkt z punktem opisującym jest normalną do krążnej.*

To twierdzenie daje sposób prowadzenia normalnej, i temsamem stycznej, w danym punkcie M cykloidy, a ógólnie epi-

cykloidy, gdy punkt zetknięcia I krzywej ruchomej z krzywą stałą jest wiadomy. Prosta MI jest normalną do linii którą punkt M opisuje, a prostopadła do MI w punkcie M jest jej styczną.

70. Gdy boki II', I'I'',... i II_1, I_1I_2,... dwóch linij wielokątnych, z których jedna toczy się na drugiej, stają się nieskończenie małemi, wtedy kąty α', α'', α'''... są *kątami spółtyczności* krzywej ruchomej II'I''... a zaś β', β'', β'''... *kątami spółtyczności* krzywej stałej II_1I_2... W danej chwili krzywa ruchoma obraca się, około punktu w którym dotyka krzywej stałej, kątem równym summie odpowiedających kątów spółtyczności tych dwóch krzywych. Jeśli więc oznaczymy przez R i R' promienie krzywizny IC, IC' tych dwóch linij, względne do punktu zetknięcia I, i przez ds długości łuków równych IA', IA, będzie



$$\text{kąt } C = \frac{ds}{R}, \quad \text{kąt } C' = \frac{ds}{R'};$$

zatem

$$C + C' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) ds.$$

Dzieląc tę wartość kąta obrotu przez dt, otrzymujemy prędkość wirowania ω figury ruchomej,

$$\omega = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{ds}{dt}.$$

Na figurze przedstawiono wklęsłości dwóch linij, ruchomej i stałej, obrócone w strony przeciwne; dlatego kąt obrotu krzywej ruchomej jest równy summie kątów spółtyczności. Gdyby te wklęsłości były zwrócone w jedną stronę, krzywa ruchoma obróciłaby się kątem równym różnicy dwóch kątów spółtyczności, i prędkość wirowania wyraziłaby się przez różnicę krzywizn

$$\omega = \pm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)\frac{ds}{dt}.$$

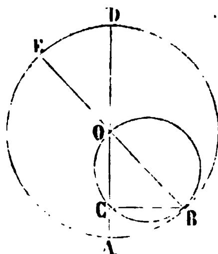
71. Powiedzieliśmy że *epicykloida* jest ogólnem nazwiskiem linij utworzonych przez punkta krzywej ruchomej która się toczy, nie ślizgając, na linii stałej jakiejkolwiek. Zwykle jednak nazywają epicykloidą linię utworzoną przez punkt okręgu koła który się toczy na innym okręgu. Epicykloidy w ostatniem znaczeniu rozróżniają się na *wewnętrzne* i *zewnętrzne*, według jak okrąg ruchomy jest wewnątrz albo zewnątrz okręgu stałego. Epicykloidy *zwyczajne* są jeszcze *wydłużone* albo *skurczone*, według jak punkt opisujący jest wewnątrz albo zewnątrz koła ruchomego. Tego rodzaju epicykloidy, jako wiadomo z Analizy, posiadają znakomitą geometryczną własność, mogą być utworzone dwojakim sposobem przez toczenie się okręgu ruchomego na tym samym okręgu stałym.

Epicykloidy, szczególniej zwyczajne, grają wielką rolę w machinach; dlatego zwłaszcza że, we wszystkich kwestyach krzywizny, można z dostatecznem przybliżeniem zastąpić krzywe ruchome przez koła przylegające.

Między epicykloidami wewnętrznemi znajduje się linia prosta. I w samej rzeczy,

Każdy punkt okręgu ruchomego, który się toczy wewnątrz okręgu mającego promień dwa razy większy, opisuje jedną z jego średnic.

Niech będzie B punkt zetknięcia tych dwóch okręgów,



C punkt opisujący. Poprowadźmy przez C promień OA = R, i wyraźmy miarę kąta AOB w dwóch kołach; otrzymamy

$$\frac{AB}{R} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}R} = \frac{BC}{R};$$

więc

$$\text{łuk } AB = \text{łuk.} BC.$$

Co dowodzi że punkt C opisuje średnicę AD.

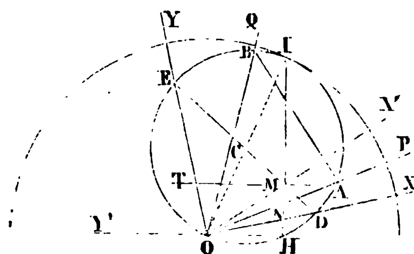
Wszelka cięciwa BC koła ruchomego może być uważana jako prosta długości statecznej, której skrajności B i C posuwają się na dwóch prostych stałych AD i BE; albowiem punkt B opisuje także średnicę BE. Więc punkta prostej BC opisują ellipsy. Ztąd wynika ogólne zadanie :

Twierdzenie. *Gdy okrąg toczy się wewnętrznie na okręgu promienia podwójnego, epicykloidy zwyczajne są średnicami okręgu stałego, a epicykloidy wydłużone albo skurczone ellipsami.*

Aby ruchem epicykloidalnym otrzymać ruch jaki ma linia

prosta długości niezmiennej, poruszająca się między dwiema prostemi stałemi, dość jest wyobrazić koło toczące się w kole promienia podwójnego i mające prostę ruchomą za cięciwę.

Niech będzie AB długość prostej ruchomej, i OP, OQ kierunki na których poruszają się jej skrajności A, B.



Wyznaczywszy środek chwilowy I sposobem już wiadomym, widzimy zaraz że OI jest średnicą koła ruchomego C i promieniem koła stałego O. Więc koło ruchome C, tocząc się wewnętrznie na kole stałem O, daje prostej AB ruch jaki ona rzeczywiście posiada, gdy się przemieszcza między dwiema prostemi stałemi OP, OQ.

Powiedzieliśmy wyżej że punkta płasczyzny koła ruchomego C opisują ellipsy; żeby to jaśniej okazać, przez jakikolwiek punkt M koła C poprowadźmy jego średnicę DE, i przez punkta D, E osie OX, OY. Ponieważ prosta DE opiera się na dwóch osiach prostokątnych OX, OY; ztąd wnosimy że punkt M opisuje ellipsę której środek jest w O, pół-oś $a = \text{ME}$, pół-oś $b = \text{MD}$, i kierunkami tych pół-osi proste OX, OY.

Dodajemy jeszcze że odcinki OM, MI wyrażają wielkości dwóch półśrednic sprzężonych a', b', mających kierunki OMX', HOY'. Jakoż, prosta MI jest normalną do ellipsy którą punkt M opisuje, i kąt $\text{MOH} = \pi - \theta$; a trójkąt OIM, w którym $\text{OI} = a + b$, $\text{OM} = a'$, sprawdza równanie

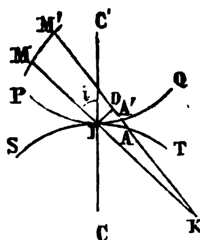
$$a + b = \sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b' \,\text{wst}\, \theta}.$$

Ta własność ellipsy może służyć do rozwiązania zagadnienia: *Mając dane dwie średnice sprzężone* a′, b′ *i ich kąt* θ, *znaleźć wielkość i kierunek obydwóch osi.*

Aby otrzymać rozwiązanie, trzeba najpierwej wykreślić kąt $MOH = \pi - \theta$; potem wziąć $OM = a'$, przez punkt M poprowadzić prostopadłę MH do OH, i wyznaczyć na niej $MI = b'$; nakoniec na OI jako średnicy wykreślić okrąg koła, i przez punkt M poprowadzić średnicę DE. Odcinki ME, MD będą pół-osiami a, b, i proste OD, OE kierunkami tych pół-osi.

Znając wielkość i kierunek obydwóch osi ellipsy, łatwo nakreślić jej ogniska; a mając normalnę MN, nietrudno znaleźć promień i środek krzywizny odpowiedający punktowi M (42).

72. Promień krzywizny epicykloid jakichkolwiek. Niech będzie punkt M opisujący, związany niezmiennie z krzywą ruchomą PQ która się toczy na krzywej stałej ST. Weźmy



na tych dwóch liniach, poczynając od punktu zetknięcia I, dwa łuki nieskończenie małe IA, IA′ równych długości, i oznaczmy przez M′ położenie które bierze punkt M gdy A′ przychodzi do A. Wiemy że normalną epicykloidy w punkcie M jest prosta MI, a normalną w M′ prosta M′A; te dwie normalne przecinają się w punkcie K, który jest środkiem krzywizny epicykloidy MM′, odpowiedającym punktowi M.

Niech będzie C środek krzywizny linii stałej ST, C′ środek

krzywizny linii ruchomej PQ. Uczyńmy

$$IC = R, \quad IC' = R', \quad IM = r, \quad MK = \rho, \quad IA = ds = IA'.$$

Dla przemieszczenia IA punktu zetknięcia dwóch linij, figura ruchoma wiruje, około środka chwilowego I, kątem który ma za miarę (70)

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)ds;$$

zatem, wartość nieskończenie małego łuku MM' wyraża się przez

$$MM' = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)rds.$$

A jeśli nazwiemy i kąt MIC' jaki czyni promień wodzący IM z linią środków krzywizny CC', i spuścimy z punktu I prostopadłę ID na M'K, trójkąty nieskończenie małe KMM', KID dadzą drugie wyrażenie wartości łuku MM', i będzie

$$MM' = ID \frac{\rho}{\rho - r} = ds \operatorname{dos} i . \frac{\rho}{\rho - r}.$$

Z porównania dwóch wartości łuku MM' wynika

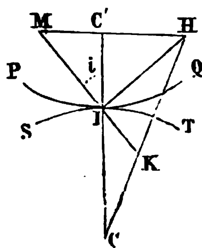
$$\frac{\rho \operatorname{dos} i}{r(\rho - r)} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$$

albo

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r}\right)\operatorname{dos} i = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}.$$

Ta formuła daje $IK = \rho - r$, i temsamem promień krzywizny ρ epicykloidy jakiejkolwiek, jeśli ilości i, r, R, R' są wiadome.

Wykreślenie Savary. Gdy środki krzywizny C i C′ są oznaczone, promień krzywizny ρ otrzymuje się bardzo prostem wykreśleniem które podał Savary.



Oto prawidło : *połącz punkt opisujący* M *ze środkiem chwilowym* I, *i z tego środka wyprowadź prostopadłę* IH *do* MI; *przez punkt* M *i przez środek krzywizny* C′ *linii ruchomej poprowadź prostę* MC′ *aż do spotkania* H *z prostą* IH; *poczem, punkt* H *i środek krzywizny* C *linii stałej złącz linią prostą* HC, *która przetnie normalnę* MI *w szukanym środku krzywizny* K.

Aby udowodnić to prawidło, dość będzie okazać że $IK = \rho - r$. Weźmy dwie proste prostokątne IK i IH za pół-osie spółrzędnych dodatnych; jeśli uczynimy $IK = \rho_1$, $IH = h$, równania linij prostych HM, HK, CC′ będą:

dla HM $$-\frac{x}{r} + \frac{y}{h} = 1,$$

dla HK $$\frac{x}{\rho_1} + \frac{y}{h} = 1,$$

dla CC′ $$y = mx.$$

Linia środków CC′ przecina proste HM i HK w punktach C′, C, których odcięte wyrażają się przez $-R'\cos i$, $+R\cos i$;

zatem powinno być

$$-\frac{1}{r}+\frac{m}{h}=-\frac{1}{R'\cos i},$$

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{m}{h}=\frac{1}{R\cos i}$$

zkąd

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{R\cos i}+\frac{1}{R'\cos i}$$

Otóż, na mocy formuły (1) mamy właśnie

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\rho-r}=\frac{1}{R\cos i}+\frac{1}{R'\cos i};$$

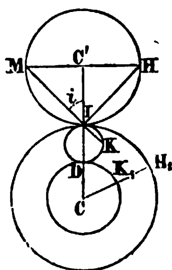
więc

$$\rho_1=\rho-r=\mathrm{IK},$$

wykreślenie *Savary* usprawiedliwione.

73. Rozwita epicykloidy zwyczajnej. Uważajmy epicykloidę zwyczajną, opisaną przez punkt M okręgu C' toczącego się na okręgu C. Formuła (1) daje

$$\frac{\cos i}{\rho-r}+\frac{\cos i}{r}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}.$$



Owoż figura pokazuje że

$$\frac{\text{dos}\,i}{\rho - r} = \frac{\text{dos}\,i}{\text{IK}} = \frac{1}{\text{ID}}; \qquad \frac{\text{dos}\,i}{r} = \frac{1}{2\text{R}'};$$

podstawiając te wartości, znajdziemy

$$\frac{1}{\text{ID}} = \frac{1}{\text{R}} + \frac{1}{2\text{R}'}.$$

Co dowodzi że ID jest ilością stateczną.

Ztąd

$$\text{ID} = \frac{2\text{RR}'}{\text{R} + 2\text{R}'},$$

i następnie

$$\text{CD} = \frac{\text{R}^2}{\text{R} + 2\text{R}'}.$$

Okrąg IKD wykreślony na ID jako średnicy i okrąg promienia CD są styczne, i mają się jako $\frac{\text{RR}'}{\text{R} + 2\text{R}'}$ do $\frac{\text{R}^2}{\text{R} + 2\text{R}'}$ czyli jako R′:R. Więc miejscem punktu D jest epicykloida, opisana przez punkt okręgu IKD toczącego się na okręgu CD.

Weźmy teraz łuk IH_1 równy łukowi IH, i oznaczmy przez K_1 punkt w którym promień CH_1 przecina okrąg CD. Ponieważ łuki DK i IH są podobne, mamy

$$\text{DK} = \text{IH}.\frac{\text{RR}'}{\text{R} + 2\text{R}'}.\frac{1}{\text{R}'} = \text{IH}.\frac{\text{R}}{\text{R} + 2\text{R}'}.$$

Dla tej samej przyczyny długość łuku DK_1 wyraża się przez

$$\text{DK}_1 = \text{IH}.\frac{\text{R}^2}{\text{R} + 2\text{R}'}.\frac{1}{\text{R}} = \text{IH}.\frac{\text{R}}{\text{R} + 2\text{R}'}.$$

To pokazuje że

$$\text{łuk } DK_1 = \text{łuk } DK.$$

Więc rozwitą epicykloidy jest nowa epicykloida.

74. W formule (1) uczyńmy

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{1}{a} \quad \text{albo} \quad a = \frac{RR'}{R + R'};$$

znajdziemy łatwo

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho - r}{a \operatorname{dos} i} = \frac{r}{r - a \operatorname{dos} i},$$

zkąd

$$(2) \qquad \rho = \frac{r^2}{r - a \operatorname{dos} i}.$$

Weźmy teraz na linii środków CC′ długość IA $= a$, i na niej jako na średnicy nakreślimy koło, które przetnie promień wodzący IM w punkcie B i da IB $= a \operatorname{dos} i$; będzie zatem

$$(3) \qquad \rho = \frac{r^2}{MB}.$$

Ostatnia formuła pokazuje że promień krzywizny ρ jest trzecią proporcyonalną do MB i MI.

Promień krzywizny ρ jest nieskończenie wielki dla wszystkich punktów dla których $r = a \cos i$. Co dowodzi że wszystkie punkta okręgu wykreślonego na prostej IA $= a$ jako średnicy opisują nieskończenie małe cząstki linij prostych, przechodzących w uważanej chwili przez punkt A. Rzeczone punkta okręgu są w ogóle punktami przegięć opisanych krążnych. Dlatego ten okrąg *średnicy a* nazwano *okręgiem przegięć.*

Punkt A nazywają *środkiem chwilowym drugiego rzędu.*

Znając okrąg przegięć można wyznaczyć punkt opisujący M, gdy odpowiedający środek krzywizny K jest wiadomy. Wykreślenie pokazuje że punkt M przechodzi w nieskończoność; to jest IM $= \infty$, gdy środek krzywizny K leży na okręgu symetrycznym okręgu przegięć względem stycznej w punkcie I.

Formuła (2) zostaje niezmienna kiedy, nienaruszając wartości a, zmienia się wielkość promieni krzywizny R i R′; można więc, dla otrzymania ρ, wziąć

$$R = \infty \quad i \quad R' = a;$$

to znaczy w gruncie że można zamienić ruch epicykloidalny na cykloidalny, jeśli chodzi tylko o wyznaczenie środków krzywizny krążnych opisanych przez punkta figury ruchomej. Tym sposobem widzimy że ruch punktów opisujących odbywa się tak jak gdyby one należały do płaszczyzny koła promienia AI $= a$ które się toczy, przez chwilę dt, na stycznej w punkcie I. To koło *promienia a* nazwano *kołem toczenia się.*

Gdy jest wiadomy środek A koła toczenia się, albo, co wychodzi na jedno, gdy jest znany okrąg przegięć, wyznacza się środek krzywizny K, przedłużając linię MA aż do spotkania E z prostopadłą IE do MI, i prowadząc przez punkt E równo-

ległę EK do CC'. Co jest właśnie wykreśleniem *Savary*, zastosowanem do przypadku w którym środek krzywizny C jest w nieskończoności. Zresztą, nietrudno wprost dowieśdź tego wykreślenia : albowiem, równoległa AI do EK i równoległa AB do EI dają

$$\frac{MK}{MI} = \frac{ME}{MA} = \frac{MI}{MB};$$

zkąd

$$MK = \frac{\overline{MI}^2}{MB} = \frac{r^2}{r - a \operatorname{dos} i}.$$

75. Wykreślenie *Savary* rzadko się zastosować może, bo wymaga znajomości środków krzywizny C, C' linii ruchomej i stałej, a wyznaczyć te dwa środki trudniej jest, w ogóle, niż znaleźć środek krzywizny epicykloidy. I w samej rzeczy, między punktem opisującym M, środkiem krzywizny K i punktem B jest związek

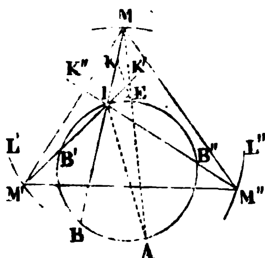
$$MK \cdot MB = \overline{IM}^2,$$

który wyznacza punkt B okręgu przegięć gdy punkta M i K są dane. Jeśli więc są wiadome środki krzywizny krążnych dwóch punktów, są temsamem znane dwa punkta okręgu przegięć, i ten okrąg, przechodzący przez środek chwilowy I, jest określony. Zatem będzie można otrzymać środek krzywizny krążnej punktu jakiegokolwiek M, tworzącego trójkąt z dwoma pierwszemi.

Na zastosowanie rozwiążmy następujące zagadnienie :

Podstawa M'M" *trójkąta niezmiennego porusza się między dwiema liniami stałemi* L', L" ; *znaleźć środek krzywizny krążnej którą opisuje wierzchołek* M *tego trójkąta.*

Niech będą K′ i K″ środki krzywizny linij L′ i L″ odpowie-



dające punktom M′ i M″. Normalne M′K′, M″K″ do tych dwóch linij przecinają się w punkcie I, który będzie środkiem chwilowym figury ruchomej. Jeśli więc, idąc od wierzchołków ku odpowiedającym środkom krzywizny, weźmiemy

$$M'B' = \frac{\overline{IM'}^2}{M'K'},$$

$$M''B'' = \frac{\overline{IM''}^2}{M''K''},$$

znajdziemy dwa punkta B′, B″ które ze środkiem chwilowym wyznaczą okrąg przegięć. Ten okrąg spotyka w B normalnę MI do krążnej wierzchołka M; zatem, biorąc

$$MK = \frac{\overline{IM}^2}{MB},$$

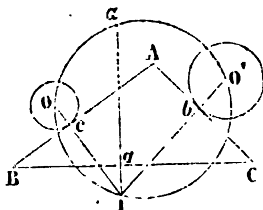
otrzymamy środek krzywizny K tej krążnej.

Mając okrąg przegięć, weźmy środek chwilowy A drugiego rzędu i połączmy MA; jeśli z punktu I wyprowadzimy prostopadłę IE do MI aż do spotkania E z prostą MA, i potem przez punkt E poprowadźmy prostą EK równoległą do AI, ta ró-

wnoległa przetnie MI w punkcie K który będzie środkiem krzywizny krążnej wierzchołka M. To drugie wykreślenie jest sprawdzeniem pierwszego.

Gdy dane linie L′, L″ są proste, wtedy $M'K' = \infty$, $M''K'' = \infty$; zatem $M'B' = 0$, $M''B'' = 0$. Co być powinno, ponieważ punkta M′, M″, opisując linie proste L′, L″, leżą na okręgu przegięć który przechodzi przez punkt spotkania tych dwóch linij (74).

76. Twierdzenie Bobiliera. *Gdy dwa boki trójkąta ślizgają odpowiednio na dwóch okręgach stałych, trzeci bok owleka trzeci okrąg.*



Niech będzie ABC trójkąt ruchomy którego bok AB zostaje ciągle styczny do okręgu O, a bok AC ciągle styczny do okręgu O′. Normalne Oc, O′b do tych okręgów w punktach ich zetknięć z bokami, przecinają się w punkcie I który jest środkiem chwilowym ruchu trójkąta; a ponieważ kąt OIO′ jest stateczny jako spełnienie kąta A, punkt I należy do okręgu wykreślonego na cięciwie OO′ odpowiedającej temu kątowi. Więc okrąg OIO′ jest miejscem środków chwilowych wirowania trójkąta ABC.

Aby znaleźć owłokę trzeciego boku BC, uważajmy że prostopadła Ia, spuszczona z punktu I na bok BC, jest normalną do tej owłoki, i przechodzi przez jej środek krzywizny który oznaczymy przez α. Owoż, kąty OIα, ABC, mające ramiona prostopadłe, są równe albo spełniające; zatem kąt OIα jest

stateczny, i jego wierzchołek I opisuje okrąg wykreślony na cięciwie $O\alpha$ przeciwległej temu kątowi. Więc ten okrąg musi się schodzić z okręgiem OIO′, bo inaczej punkt I byłby nieruchomy. Ztąd wynika że środek krzywizny α znajduje się na okręgu OIO′, i łuk $O\alpha$ mierzący kąt stateczny B jest ilością stateczną. Co dowodzi że normalne we wszystkich punktach owłoki boku BC przechodzą przez punkt stateczny α; więc tą owłoką jest okrąg promienia $a\alpha$.

Gdyby boki AB, AC ślizgały nie na okręgach ale na krzywych jakichkolwiek, możnaby za te krzywe, przez czas nieskończenie mały dt, podstawić koła przylegające w punktach b, c, i wykreślić jako wyżej środek krzywizny α owłoki boku BC.

Normalną do krzywej opisanej, na przykład, przez wierzchołek A trójkąta ABC, jest prosta IA. W ogóle, żeby wyznaczyć normalnę albo styczną do krążnej wierzchołka kąta A, którego ramiona AB, AC ślizgają na dwóch krzywych jakichkolwiek, dość jest, na cięciwie zetknięć bc, wykreślić odcinek koła obejmujący kąt A; okrąg bcA będzie styczny do krążnej wierzchołka A.

TOCZENIE SIĘ I ŚLIZGANIE LINIJ PŁASKICH.

77. Gdy są dane dwie linie płaskie, jedna ruchoma a druga stała, które muszą zostawać w ciągłem zetknięciu, wtedy, jakakolwiek jest ustawa przemieszczania punktu zetknięcia na tych liniach, trzeba odróżnić trzy następujące rodzaje ruchu :

1° Jeśli łuki nieskończenie małe, przebieżone przez punkt zetknięcia na obydwóch liniach, mają tę samą długość, mówi się że jest *toczenie się*.

2° Jeśli jeden z dwóch łuków jest zero, ruch jest *prostem ślizganiem*.

3° W każdym innym przypadku ruch jest mieszany, zarazem toczenie się i ślizganie.

Ruch nieskończenie mały jednej linii płaskiej na drugiej może być w ogóle uważany jako złożony z toczenia się i ślizgania. Jakoż, żeby sprowadzić linię ruchomą z jednego położenia na nieskończenie bliskie które bierze na linii stałej, można ją najpierwej toczyć na tej linii całym nieskończenie małym łukiem *ds*, i potem sunąć ostatni punkt zetknięcia łuku *ds* aż przyjdzie do położenia które ma zajmować na linii stałej.

Żeby ślizganie było zero, w ruchu dwóch linij które muszą się ciągle stykać z sobą, oczywiście trzeba i dość jest żeby punkt zetknięcia tych linij schodził się ze środkiem chwilowym wirowania względnego.

Toczenie się jest zero i ruch prostem ślizganiem, gdy punkt zetknięcia jest niezmienny na linii ruchomej albo na linii stałej. Ztąd wynikają dwie, godne uwagi, widoczne własności :

Gdy krzywa ruchoma ślizga na krzywej stałej, której dotyka zawsze tym samym punktem, jej normalna w tym punkcie toczy się na rozwitej linii stałej.

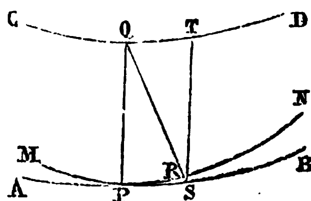
A gdy jedna krzywa porusza się dotykając drugiej krzywej w tym samym punkcie, rozwita krzywej ruchomej toczy się na normalnej stałej punktu zetknięcia.

ZAGADNIENIE ODWROTNE EPICYKLOID.

78. ZAGADNIENIE. *Mając dane na jednej płaszczyźnie dwie linie* AB, CD, *wyznaczyć trzecią* MN *taką żeby, gdy się toczy na pierwszej* AB, *punkt stale z nią związany kreślił drugą linię* CD.

Z punktu P, w którym szukana linia MN styka się z podstawą AB, spuśćmy prostopadłę PQ na linię CD. Gdy linia

ruchoma MN toczy się kątem nieskończenie małym na linii AB, punkt Q opisuje nieskończenie małą cząstkę linii CD, normal-



ną do PQ. Wyobraźmy sobie na linii MN punkt R nieskończenie sąsiedni punktu P, i weźmy na AB łuk PS = PR. Owoż, w toczeniu się linii MN na AB, punkt R przychodzi do S; jeśli więc z punktu S spuścimy na linię CD prostopadłę ST, wyznaczymy położenie T punktu który opisuje krążnę CD; bo oczywiście ST jest położeniem jakie bierze prosta RQ w skutku toczenia się linii MN na AB. Zatem długość ST = RQ, i kąt S, utworzony przez prostę ST z krzywą stałą AB, jest równy kątowi R jaki czyni prosta RQ z krzywą ruchomą MN.

Nazwijmy r długość prostej ST normalnej do CD; między tą długością i kątem S jest związek dany przez określenie linij AB i CD; jeśli więc weźmiemy punkt Q za biegun i prostę QR za promień wodzący r, będziemy mieli

$$r\frac{d\theta}{dr} = \text{sty}\,\text{R} = \text{sty}\,\text{S}.$$

równanie biegunowe szukanej linii MN.

79. Zastosujmy to do następującego przykładu. *Dane są dwie proste* AB, CD *które się przecinają pod kątem* α; *jaką linię trzeba*

toczyć na prostej AB, *aby punkt stale z nią związany opisał prostę* CD?

Poprowadźmy normalnę ST do CD; będzie

$$r\frac{d\theta}{dr} = \text{sty}\,S = \text{dol}\,\alpha.$$

Całkując, i nazywając A stateczną dowolną, otrzymujemy równanie

$$r = Ae^{\theta\,\text{sty}\,\alpha},$$

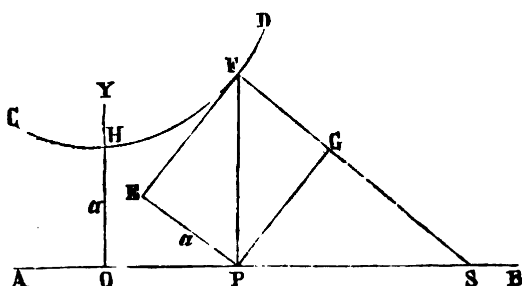
które przedstawia spiralnę logarytmiczną. Ta spiralna przecina promienie wodzące pod kątem statecznym $\frac{\pi}{2} - \alpha$, i ma za biegun punkt niemaltyczny T. Gdy rzeczona spiralna toczy się na linii prostej AB, jej biegun T opisuje linię prostą CD która tworzy z pierwszą kąt α.

Figura pokazuje inną ciekawą własność spiralnej logarytmicznej. Łuk tej krzywej, poczynając od punktu zetknięcia S aż do bieguna T, około którego okrąża nieskończoną liczbę razy, jest ilością skończoną i równa się linii prostej SO.

80. Rozwiążmy jeszcze drugie zagadnienie. Jest dana *łańcuszkowa* CD, odniesiona do osi odciętych AB względem której rzędna minimum rowna się parametrowi *a*. *Jaką linię trzeba toczyć na* AB, *żeby punkt stale z nią związany kreślił tę łańcuszkową?*

Równanie łańcuszkowej jest

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right).$$



Aby znaleźć związek między normalną $SF = r$ i sty S, uważajmy że, w trójkącie prostokątnym FPS, mamy

$$\text{wst}\,S = \frac{FP}{FS}.$$

Owoż, wiemy (tom I, n° 147) że

$$EP = OH = a, \qquad FP = \sqrt{FS.FG} = \sqrt{ar};$$

co daje

$$\text{wst}\,S = \sqrt{\frac{a}{r}};$$

zatem

$$r\frac{d\theta}{dr} = \text{sty}\,S = \sqrt{\frac{a}{r-a}}.$$

Trzeba więc całkować równanie

$$d\theta = \sqrt{a}\,\frac{dr}{r\sqrt{r-a}}.$$

Wedle zwyczajnych prawideł rachunku całkowego, uczyńmy

$$r - a = au^2;$$

zkąd

$$dr = 2audu.$$

Podstawiając te wartości, będzie

$$d\theta = \frac{2du}{1 + u^2};$$

Ztąd, całkując, otrzymujemy

$$d\theta + C = 2\,\text{łuk sty}\,u = 2\,\text{łuk sty}\sqrt{\frac{r-a}{a}}.$$

Owoż, w punkcie najniższym łańcuszkowej powinno być

$$r = a, \quad \theta = 0; \quad \text{zatem} \quad C = 0.$$

Co daje

$$r = a\left(1 + \text{sty}^2\frac{\theta}{2}\right),$$

albo

$$r = \frac{a}{\text{dos}^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2a}{1 + \text{dos}\,\theta},$$

równanie paraboli odniesionej do ogniska i osi. Więc łańcuszkowa jest miesjcem opisanem przez ognisko paraboli która się toczy, nie ślizgając, na linii prostej.

FIGURA SFERYCZNA RUCH [illegible]MA NA SFERZE.

81. Stosując do figury sferycznej rozumowania użyte w ru-

chu figury płaskiej na jej płaszczyznie, i zastępując linie proste przez łuki kół wielkich, dowiedzie się łatwo że :

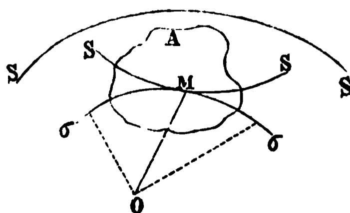
1° Figura sferyczna, ruchoma na swojej sferze, może być sprowadzona, z jakiegokolwiek położenia na inne, ruchem wirowym około jednego punktu powierzchni sferycznej jako bieguna, albo co to samo, ruchem wirowym około jednej średnicy sfery jako osi.

2° Ruch nieskończenie mały figury sferycznej na sferze jest nieskończenie małem wirowaniem około średnicy sfery. Ta średnica nazywa się *osią chwilową wirowania*, a punkta w których spotyka powierzchnię sferyczną są *biegunami chwilowemi*. Bieguny chwilowe wirowania są punktami w których się zbiegają wszystkie łuki kół wielkich, poprowadzone przez każdy punkt figury ruchomej normalnie do krążnej tego punktu.

3° Cały ruch figury na sferze jest ciągiem nieskończenie małych wirowań, i może się otrzymać przez toczenie się linii sferycznej, stale związanej z figurą ruchomą, na linii stałej na sferze. To jest, jednem słowem, ruch ciągły figury ruchomej na sferze jest *ruchem epicykloidalnym sferycznym*.

RUCH UKŁADU BRYŁOWEGO MAJĄCEGO PUNKT STAŁY.

82. Uważajmy układ bryłowy niezmienny który się porusza około punktu stałego O; przetnijmy go powierzchnią sferyczną



jakąkolwiek S, mającą punkt O za środek, i nazwijmy A figurę

sferyczną wynikającą z tego przecięcia. Gdy układ obraca się około punktu O, figura sferyczna A, stale z nim związana, porusza się na sferze S. Owoż, widzieliśmy że ruch nieskończenie mały figury sferycznej na swojej sferze jest nieskończenie małem wirowaniem około pewnej średnicy sfery; więc ruch nieskończenie mały układu bryłowego, około punktu stałego O, jest nieskończenie małem wirowaniem około osi chwilowej, przechodzącej przez ten punkt; albo, mówiąc po prostu: gdy układ bryłowy w ruchu ma punkt stały, istnieje w każdej chwili wewnątrz niego linia prosta której wszystkie punkta są nieruchome przez tę chwilę. Znajdujemy tym sposobem następujące, ważne twierdzenie D'Alemberta, ściśle dowiedzione przez Eulera :

Twierdzenie d'Alembert'a. *Ruch ciała, które się obraca sposobem jakimkolwiek około punktu stałego, jest wirowaniem około osi chwilowej, która przechodzi zawsze przez ten punkt ale co chwila zmienia kierunek.*

To znaczy innemi słowy, że prędkości wszystkich punktów ciała, obracającego się około punktu stałego, są takie same jak gdyby się ono istotnie obracało około jednej osi przez czas *dt*. Na końcu każdej chwili oś wirowania nie jest ta sama co na początku, ruch ciała jest jeszcze prostem wirowaniem ale już około innej osi. Wprawdzie rzeczy dzieją się tak że ruch ciała około punktu stałego jest nieprzerwanym ciągiem wirowań około coraz innej, ustawicznie zmiennej osi, która dlatego nazywa się *osią chwilową wirowania*. Żeby to jeszcze lepiej pokazać, i wyjaśnić trudność pojmowania tych wirowań ciągle zmiennych, przedstawimy widoczny obraz całego ruchu.

Wiemy już że wszelki ruch figury sferycznej A na sferze S jest to samo co ruch toczenia się krzywej ruchomej *ss*, związanej z figurą A, na krzywej stałej $\sigma\sigma$ leżącej na tej sferze. Ten ruch epicykloidalny sferyczny wyznacza zupełnie ruch ciała

bryłowego. Owoż, możemy sobie wyobrazić że linie ss i $\sigma\sigma$ są kierownicami dwóch stożków mających punkt O za spólny wierzchołek; toczenie się krzywej ss na krzywej $\sigma\sigma$ odpowieda toczeniu się stożka ruchomego (O, s) na stożku stałym (O, σ). Mamy więc ostatecznie ogólne twierdzenie które podał Poinsot.

Twierdzenie Poinsot'a. *Jakimkolwiek sposobem ciało się obraca około punktu stałego, jego ruch najogólniejszy jest zawsze ruchem pewnego stożka z niem związanego, który ma ten punkt za wierzchołek, i który się toczy, nie ślizgając, na drugim stożku, stałym w przestrzeni i mającym ten sam wierzchołek.*

Widzimy teraz dobrze że oś chwilowa wirowania jest, przez czas dt, spólną krawędzią zetknięcia stożka ruchomego ze stożkiem stałym.

83. Cecha osi chwilowej. Wyłożone twierdzenie niewątpliwie pokazuje że oś chwilowa musi być zarazem zmienna w ciele i w przestrzeni, albo nieruchoma w obydwóch. Ta własność jest *cechą* osi chwilowej. Jeśli więc spostrzegamy ciało obracające się około osi która się nam zdaje nieruchoma wewnątrz niego, ale które zmienia położenie w przestrzeni, możemy być pewni że ta oś nie jest osią chwilową około której odbywa się rzeczywiste wirowanie uważanego ciała. Dwa następujące przykłady potwierdzają te rozumowania :

Ruch dzienny ziemi. Dawniej uważano ruch dzienny słońca i nieba z gwiazdami jako jednostajny wirowy około *linii biegunów* czyli *osi świata,* poprowadzonej przez dwa punkta na niebie, średnicowo przeciwne, które zdają się być w spoczynku, na pewny czas przynajmniej; przypuszczano bezzasadnie że ta oś przechodzi przez środek ziemi. Hipparch, najsławniejszy astronom starożytności który żył na 150 lat przed Chrystusem, odkrył pierwszy że oś ziemi nie ma kierunku statecznego w przestrzeni, i w okresie 26000 lat opisuje, około prostopadłej

do płaszczyzny ekliptyki, stożek prosty, w którym połowa kąta przy wierzchołku zawiera prawie 23° 27′ 30″. Ten ruch niezmiernie powolny, który przemieszcza co rok, niemal o 50 sekund, linię przecięcia ekliptyki z równikiem, stanowi w astronomii tak zwane *cofanie się punktów równonocnych*. Mniemano z niejakim pozorem prawdy że, podczas gdy ziemia obraca się jednostajnie około swojej osi, ta oś ma pewny ruch w przestrzeni skutkiem którego opisuje rzeczony stożek. Ale Bradley dowiódł później że oś ziemi nie kreśli dokładnie stożka Hipparcha, tylko oscylluje na kilka sekund około jego powierzchni, w okresie blisko lat 18. Ten ruch nazywa się *kołysaniem* ziemi. Aby więc sobie wytłumaczyć ruch dzienny ziemi, wyobrażono stożek bardzo mało otwarty, mający wierzchołek w środku ziemi i stanowiący z nią jedno ciało, a potem drugi stożek, mający ten sam wierzchołek, ale stały w przestrzeni; i przypuszczono że pierwszy stożek toczy się na drugim wykonywając na nim każdego dnia jeden całkowity obrot.

Ten sposób pojmowania ruchu dziennego ziemi, chociaż się przedstawia naturalnie, nie jest całkiem prawdziwy, szczególniej z przyczyny rocznego ruchu ziemi około słońca. Ograniczając się na samym ruchu cofania się punktów równonocnych, a zaniedbując kołysanie i inne, znaleziono że biegun istotnego wirowania ziemi opisuje każdego dnia na jej powierzchni pewną krzywę, która jest bardzo małym okręgiem koła, mającym zaledwie $1^m,684$ długości. Ten przybliżony wynik dowodzi że wirowanie chwilowe rzeczywiste bieguna ziemi różni się bardzo mało od wirowania pozornego.

Wirowanie pocisków podłużnych. Wiadomo że, dla zmniejszenia oporu powietrza, dają dzisiaj pociskom kształt podłużny i udzielają im ruch wirowy około osi figury. Te pociski wychodząc z broni, opisują krążnę mniej więcej krzywą; zatem przedstawiają się pochyło do oporu powietrza dopóki oś figury zachowuje kierunek początkowy, to jest kierunek stycznej do

krążnej w punkcie wyjścia. Jeśliby chciano, dla zmniejszenia oporu, żeby oś figury pocisku zostawała styczną do jego krążnej w całym przebiegu, wtedy ta oś zmieniając ciągle położenie w przestrzeni, przestałaby już być osią wirowania; bo z określenia oś wirowania jest w każdej chwili linią której kierunek zostaje stały zarazem w ciele i w przestrzeni.

RUCH UKŁADU BRYŁOWEGO RÓWNOLEGLE DO PŁASZCZYZNY.

84. Niech będzie układ bryłowy którego wszystkie punkta przemieszczają się równolegle do płaszczyzny stałej P. Przetnijmy ten układ płaszczyzną P′ równoległą do P; otrzymamy figurę płaską która się będzie zarazem z nim poruszała, zostając ciągle na swojej płaszczyźnie. Owoż, wszelki ruch nieskończenie mały tej figury jest ruchem wirowym około pewnej osi chwilowej, prostopadłej do płaszczyzny P′; więc wszelki ruch nieskończenie mały układu bryłowego, którego punkta przemieszczają się równolegle do płaszczyzny stałej P, jest ruchem wirowym około osi chwilowej prostopadłej do tej płaszczyzny. Miejscem tych osi chwilowych, ciągiem po sobie idących, jest powierzchnia walcowa, prostopadła do płaszczyzny P.

Może się zdarzyć że oś chwilowa wirowania znajduje się w nieskończoności; wtedy ruch układu bryłowego o którym mowa jest ruchem przeniesienia.

Pojmuje się ruch skończony układu bryłowego równolegle do płaszczyzny, wyobrażając sobie dwa walce styczne, jeden wewnątrz tego układu i z nim ruchomy, a drugi stały w przestrzeni, i przypuszczając że pierwszy walec toczy się, nie ślizgając, na drugim.

Ruch figur na płaszczyznie i ruch układów bryłowych równolegle do płaszczyzny są szczególnemi przypadkami ruchu układu mającego punkt stały. Albowiem sfera O jest płaszczyzną gdy

jej promień staje się nieskończenie wielkim; wtedy środek O oddala się w nieskończoność, i stożki (O, s), (O, σ) stają się walcami, a linie ss, $\sigma\sigma$ przecięciami tych walców prostopadłemi do ich krawędzi. Ztąd zaraz wynikają twierdzenia któreśmy poprzednio wyłożyli.

RUCH UKŁADU BRYŁOWEGO W PRZESTRZENI. RUCH HELICOWY.

85. Ruch nieskończenie mały układu bryłowego. Uważajmy najpierwej ruch nieskończenie mały układu bryłowego który się przemieszcza sposobem jakimkolwiek w przestrzeni. Wiemy już że można sprowadzić ten układ z jednego położenia na inne sąsiednie, dając mu nieskończenie małe przeniesienie, i potem zaraz nieskończenie małe wirowanie około osi tego samego kierunku co przeniesienie. Ale trzeba dobrze uważać że te dwa ruchy nie stanowią rzeczywistego ruchu żadnego z punktów układu bryłowego; albowiem, każdy punkt układu ruchomego opisuje w czasie dt nieskończenie małą cząstkę swojej krążnej; gdy tymczasem w dwóch rzeczonych ruchach po sobie idących, ten punkt przebiega dwie linie prostokątne, to jest linię prostą i łuk koła normalny do niej. Owoż, gdy śruba przenika wewnątrz stałej mutry, każdy jej punkt opisuje helicę; i te wszystkie helice, będące krążnemi punktów śruby, znajdują się na różnych powierzchniach walcowych spólnej osi, i mają ten sam krok. Ruch tego rodzaju nazywa się *ruchem helicowym*. W tym ruchu, jako łatwo widzimy, śruba przechodzi, z położenia które ma na początku czasu dt do położenia które zajmuje na końcu tego czasu, za pomocą nieskończenie małego przeniesienia wzdłuż swojej osi, i zarazem nieskończenie małego wirowania około tej osi. Te dwa ruchy są jednoczesne. Ztąd wnosimy że przemieszczenie układu ruchomego w przestrzeni, otrzymane przez nieskończenie małe przeniesienie wzdłuż linii prostej i po niem idące nieskończenie małe wirowanie około osi równo-

ległej do tej prostej, może się uskutecznić odrazu, przez nieskończenie mały ruch helicowy około tej samej osi. Więc *ruch nieskończenie mały najogólniejszy jaki układ bryłowy wziąć może w przestrzeni jest ruchem helicowym, to jest podobnym do ruchu śruby która wchodzi do mutry.*

Na tem zależy twierdzenie podane przez Giulio Mozzi.

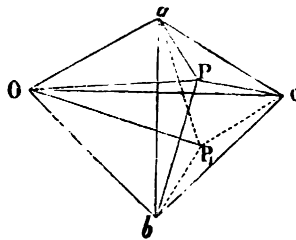
Oś chwilowa wirowania i ślizgania. Gdy śruba porusza się wewnątrz mutry, można ją uważać jakoby miała dwa ruchy jednoczesne, to jest mówić że się posuwa (ślizga) wzdłuż swojej osi, i zarazem się obraca około tej osi. Tym sposobem ruch nieskończenie mały układu w przestrzeni może być uważany jako pochodzący z dwóch ruchów spółistniejących, wirowania około pewnej osi i ślizgania wzdłuż tej osi.

Linia prosta, około której układ bryłowy się obraca i wzdłuż której ślizga, w każdym ze swoich nieskończenie małych ruchów, zmienia w ogóle co chwila położenie w przestrzeni. Dlatego dano tej linii nazwisko *osi chwilowej wirowania i ślizgania.*

86. Nazwijmy ε nieskończenie małą ilość którą się układ bryłowy posuwa wzdłuż osi chwilowej wirowania i ślizgania, przez czas nieskończenie mały dt; pojmujemy łatwo że odpowiedające rzuty przemieszczeń punktów układu, uczynione na tej osi, są wszystkie równe ilości ε. Owoż, otrzymuje się prędkość punktu jakiegokolwiek, dzieląc jego przemieszczenie w czasie dt przez tenże czas; otrzyma się więc rzut tej prędkości na osi wirowania i ślizgania, dzieląc $d\varepsilon$ przez dt. Zatem, gdy układ bryłowy porusza się w przestrzeni, rzuty prędkości jego punktów, w chwili jakiejkolwiek, na osi chwilowej wirowania i ślizgania względnej do tej chwili, są wszystkie równe między sobą jako wyrażone przez $\frac{d\varepsilon}{dt}$.

Wynika ztąd ważne następstwo. Jeśli *wyprowadzimy z jakiegokolwiek punktu* O *przestrzeni linie proste, przedstawiające wielkość i kierunek prędkości któremi różne punkta układu są ożywione*

w danej chwili, skrajności tych linij będą wszystkie na jednej płasczyznie, prostopadłej do odpowiedającej osi chwilowej wirowania i ślizgania. Zatem prostopadła spuszczona z punktu O na tę płasczyznę jest równoległa do osi chwilowej. Owoż, trzy punkta nie w linii prostej wyznaczają płasczyznę; więc, aby mieć kierunek osi chwilowej wirowania i ślizgania w danej chwili, dość jest przez punkt O przestrzeni poprowadzić trzy linie proste O*a*, O*b*, O*c*, przedstawiające wielkość i kierunek prędkości



jednoczesnych trzech punktów A, B, C układu; i z punktu O spuścić na płasczyznę *abc*, przechodzącą przez skrajności *a*, *b*, *c* tych trzech prostych, prostopadłę OP która wyznaczy kierunek szukanej osi. Żeby się to wykreślenie udało, trzy wzięte prędkości nie powinny być równoległe do jednej płasczyzny. Gdy zaś prędkości wszystkich punktów układu są równoległe do jednej płasczyzny, natenczas ruch tego układu jest ruchem wirowym około osi prostopadłej do rzeczonej płasczyzny.

Połączmy P*a*, P*b*, P*c*; możemy uważać prędkość O*a* jako wynikowę dwóch prędkości przedstawionych co do wielkości i kierunku przez proste OP i P*a*; tak samo prędkość O*b* jest wynikową prędkości OP i P*b*, a prędkość O*c* wynikową prędkości OP i P*c*. Trzy prędkości skierowane wedle OP składają się w jedną wynikowę, która przedstawia wielkość i kierunek prędkości przeniesienia układu. Prędkości P*a*, P*b*, P*c*, równoległe do płasczyzny *abc*, są prędkościami wierzchołków trój-

kąta ABC w ruchu wirowym około osi chwilowej równoległej do OP. Zatem, jeśli oznaczymy przez $A\alpha$ odległość punktu A od osi chwilowej, prędkość wirowania ω całego układu wyrazi się przez $\omega = \frac{Pa}{A\alpha}$.

Poprowadźmy teraz jakąkolwiek pochyłę OP_1 do płasczyzny *abc*, i rozłóżmy prędkość Oa na dwie prędkości jednoczesne OP_1 i P_1a; rozłóżmy tak samo prędkość Ob na składowe OP_1 i P_1b; nakoniec rozłóżmy prędkość Oc na składowe OP_1 i P_1c. Trzy prędkości skierowane wedle OP_1 składają się w jedną wynikowę która przedstawia prędkość przeniesienia układu wedle OP_1; drugie składowe, równoległe do płasczyzny *abc*, odnoszą się do ruchu wirowego punktów A, B, C około osi chwilowej prostopadłej do płasczyzny *abc*; ta oś nie jest równoległa do OP_1 ale do OP.

Więc, w różnych sposobach rozkładania ruchu układu bryłowego na nieskończenie małe przeniesienie i wirowanie, kierunek przeniesienia jest dowolny; gdy przeciwnie kierunek osi wirowonia jest wyznaczony w każdej chwili. Nadto, prędkość przeniesienia wedle osi wirowania i ślizgania jest najmniejsza możebna, bo w tym przypadku ma za miarę prostopadłę OP do płasczyzny *abc*; gdy tymczasem, w każdym innym przypadku prędkość przeniesienia jest mierzona przez pochyłę do tej płasczyzny.

87. Ruch skończony układu bryłowego. Wiemy że wszelki ruch punktu materyalnego może się otrzymać za pomocą przeniesienia i potem wirowania około osi przez ten punkt przechodzącej. Więc, biorąc zawsze ten sam punkt, widzimy że ruch układu bryłowego w przestrzeni jest przeniesieniem wziętego punktu i wirowaniem około tego punktu. Ztąd wynika że wszelki ruch układu może być uważany jako toczenie się stożka z nim związanego, na stożku spólnego wierzchołka, który ma w tym samym czasie ruch przeniesienia w przestrzeni.

Ale ten obraz ruchu nie jest dość wyraźny; bo zależy od branego punktu układu, a tych punktów jest mnóstwo. Przeciwnie, oś wirowania i ślizgania jest jedyna w każdej chwili; łatwiej więc będzie, opierając się na tej własności, szukać jakby najlepiej można sobie wyobrazić ruch układu bryłowego wolnego w przestrzeni. Co właśnie uczynimy.

Widzieliśmy że ruch nieskończenie mały układu bryłowego, przez czas *dt*, jest ruchem helicowym, to jest może być uważany jako pochodzący z dwóch ruchów spółistniejących : z wirowego około osi chwilowej przechodzącej przez jeden z punktów układu, i z postępowego wzdłuż tej osi. Aby mieć jasne pojęcie całego ruchu i niejako widoczny jego obraz, uważajmy najpierwej że położenia po sobie idące osi chwilowej wirowania i ślizgania tworzą powierzchnię prostorodną, stałą w przestrzeni; a położenia tej osi, ustawicznie zmienne wewnątrz układu, tworzą drugą powierzchnię prostorodną, ruchomą z tym układem. Oś chwilowa wirowania i ślizgania znajduje się zarazem na obydwóch powierzchniach; albo innemi słowy, wszystkie linie rodzące powierzchni ruchomej przychodzą jedna po drugiej do odpowiedających linij powierzchni stałej, i do nich przystają; tak że każda z nich jest z kolei osią chwilową wirowania i ślizgania. Otóż, w chwili gdy wirowanie około spólnej linii rodzącej sprowadza do przystawania dwie odpowiedne linie rodzące, powierzchnie prostorodne, mając dwie linie rodzące spólne, są styczne w całej rozciągłości tych linij. Ztąd wynika ogólne twierdzenie które podał Poncelet.

Twierdzenie Poncelet'a. *Najogólniejszy ruch układu bryłowego wolnego w przestrzeni jest ruchem powierzchni prostorodnej, z nim związanej, na powierzchni prostorodnej stałej, tak że powierzchnia ruchoma zostaje styczną wedle całej linii rodzącej do powierzchni stałej, na której* się toczy *i zarazem* ślizga *wzdłuż tej linii.*

Krok śruby która daje wyobrażenie ruchu helicowego może

być niekiedy zero; gdy się to zdarza, wtedy cały ruch układu bryłowego przywodzi się do prostego wirowania około stałej osi. Ale, ogólnie, niema w układzie żadnego punktu nieruchomego, nawet przez jedną chwilę; chociaż jest zawsze w każdej chwili linia prosta zachowująca położenie niezmienne przez czas nieskończenie mały.

88. Figura płaska ruchoma w przestrzeni. Niech będą F i F′ dwa różne położenia w przestrzeni tej samej figury płaskiej, albo co to samo, F i F′ dwie figury równe w przestrzeni; nazwijmy P i P′ płaszczyzny tych dwóch figur. Dwie płaszczyzny P, P′ przecinają się w ogóle wedle pewnej lini prostej LL′; zatem, biorąc prostę LL′ za oś i obracając około niej płaszczyznę P, w jedną albo w drugą stronę, widzimy łatwo że można nietylko sprowadzić figurę F′ na płaszczyznę P, ale jeszcze dać jej położenie F″ takie, żeby dwie figury równe F i F″, leżące na płaszczyznie P, mogły przystawać do siebie bez przewrócenia jednej z nich. W tem położeniu przywiedzie się figurę F″ na F przez wirowanie około pewnego punktu O płaszczyzny P, albo raczej przez wirowanie około pewnej osi OO′ prostopadłej do tej płaszczyzny. Można więc zawsze sprowadzić figurę płaską z położenia F′ na położenie F w przestrzeni, za pomocą dwóch wirowań prostokątnych, z których jedno około linii LL′ przecięcia się płaszczyzn dwóch figur F, F′, a drugie około prostej OO′ prostopadłej do płaszczyzny figury F.

Ztąd wynika że nieskończenie mały ruch figury płaskiej w przestrzeni jest wynikową dwóch nieskończenie małych wirowań około dwóch osi prostokątnych, z których jedna leży na płaszczyznie figury a druga jest normalną do tej płaszczyzny.

Oś LL′, przecięcie się płaszczyzny P z jej nieskończenie sąsiedniem położeniem P′ jakie bierze na końcu czasu *dt*, jest jedną z linij rodzących powierzchni rozwijalnej którą płaszczyzna P owleka. Ta oś LL′ nazywa się *charakterystyką* płaszczyzny P.

Druga oś OO′, około której odbywa się wirowanie figury płaskiej F, jest prostopadła do płaszczyzny P i przecina ją w punkcie O. Ten punkt O nazywa się *ogniskiem* płaszczyzny P. Dwie proste prostokątne LL′ i OO′ w przestrzeni, około których odbywają się dwa nieskończenie małe wirowania figury płaskiej, są *osiami sprzężonemi* dwóch wirowań jednoczesnych tej figury; będzie o nich mowa w składaniu wirowań.

SKŁADANIE RUCHÓW POJEDYNCZYCH NIESKOŃCZENIE MAŁYCH.

89. Ruchami pojedynczemi, jakośmy już widzieli, są przeniesienie i wirowanie. Przeniesienie jest wyznaczone gdy jego prędkość, kierunek i strona są znane. Linia prosta skończona AB, wzięta w stronę AB, wyrażająca wielkość, kierunek i stronę prędkości przeniesienia w danej chwili, określa zupełnie to przeniesienie. Będzie albowiem wiadomo że w rzeczonej chwili przeniesienie odbywa się równolegle do AB i w stronę AB to jest od A do B, z prędkością wyrażoną przez AB; tak że, w czasie nieskończenie małym *dt*, uważany układ w ruchu przebiega drogę AB.*dt*. Ztąd wynika że linia prosta AB, przedstawiająca przeniesienie, może przechodzić przez jakikolwiek punkt przestrzeni, byle tylko jej wielkość, równoległość i strona zostawały te same.

Wirowanie jest określone gdy położenie jego osi, prędkość kątowa i strona obrotu są dane. Wiemy że wirowanie może być przedstawione przez linię prostą (45). Oto jakim sposobem: prosta AB, mająca położenie wyznaczone w przestrzeni, jest w danej chwili osią wirowania układu bryłowego; jej długość AB, przedstawiająca prędkość kątową (*prędkość wirowania*), wyraża długość łuku opisanego *w jedności czasu* przez punkt obracającego się układu leżący na *jedność odległości* od osi. Ale nie dość jest znać położenie osi i prędkość kątową ruchu układu, trzeba jeszcze wiedzieć w którą stronę ruch się

odbywa. W tym celu, na oś wirowania poniesiono długość AB, która wyraża prędkość kątową, w taką stronę żeby widz, mający nogi na początku A tej długości a głowę na jej końcu B, spostrzegał ruch wykonywający się od lewej ręki ku prawej, jako ruch indeksów zegarka. Mówić że oś ma kierunek AB jest to powiedzieć że widz, oparty wzdłuż AB, spostrzega ruch wirowy układu idący w taką stronę w jaką się odbywa ruch pozorny słońca. Tym sposobem prosta AB przedstawia zarazem oś geometryczną wirowania układu, prędkość kątową ruchu i stronę obrotu.

Na mocy tej ugody, możemy odróżniać znakami *więcej* albo *mniej* wirowania układu bryłowego, około osi spółrzędnych prostokątnych OX, OY, OZ, według jak się odbywają w jedną stronę albo w stronę przeciwną. I tak, gdy układ wiruje około osi rzędnych ZZ', osią wirowania będzie pół-oś OZ jeśli wirowanie odbywa się od X do Y; bo wtedy dostrzegacz oparty wzdłuż OZ, mając nogi w O a głowę w Z, będzie widział ruch wirowy idący od lewej ręki do prawej. W tym przypadku osią wirowania jest pół-oś *rzędnych dodatnych*, i dlatego mówi się że *wirowanie* jest *dodatne*. Jeśli przeciwnie wirowanie odbywa się od Y do X, osią wirowania będzie pół-oś OZ' *rzędnych odjemnych*, i dlatego powie się że *wirowanie jest odjemne*.

Tak samo około osi YY'; wirowanie dodatne odbywa się około OY od Z do X, a odjemne około OY' od X do Z. Nakoniec, około osi OX wirowanie idące od Y do Z jest dodatne, a wirowanie idące od Z do Y odjemne. Widzimy więc że wirowania mają te same znaki co pół-osie spółrzędnych prostokątnych.

To ustaliwszy, będziemy szukali prawideł składania i rozkładania ruchów pojedynczych nieskończenie małych, które układ bryłowy posiada jednocześnie. i które teraz są przedstawione przez linie proste co do wielkości, położenia i strony.

Zagadnienie składania ruchów pojedynczych jednoczesnych

układu bryłowego zależy na szukaniu ruchu, któryby mógł zastąpić dwa po sobie idące, nieskończenie małe przemieszczenia tego układu. Trzy główne przypadki są do uważania:

Składanie dwóch przeniesień,

Składanie dwóch wirowań,

Składanie przeniesienia i wirowania.

90. Składanie dwóch przeniesień. Gdy układ bryłowy ma zarazem dwa nieskończenie małe ruchy przeniesienia, to jest gdy jego ruch względny i ruch uniesienia są oba ruchami przeniesienia, każdy punkt tego układu opisuje, na mocy ruchu wynikowego (13), przekątnę równoległoboku wystawionego na nieskończenie małych liniach, któreby przebiegał na mocy ruchów składowych. Owoż, te wszystkie równoległoboki, odpowiedające ruchom punktów układu, mają boki równe i równoległe; więc ich przekątne są także równe i równoległe. Ztąd wnosimy że ruch wynikowy układu jest ruchem przeniesienia. Do tego widzimy jeszcze że prędkość układu w tym ruchu jest przedstawiona, co do wielkości i kierunku, przez przekątnę równoległoboku zbudowanego na liniach prostych które przedstawiają prędkości ruchów składowych. Więc *ruch złożony z dwóch nieskończenie małych przeniesień jest ruchem przeniesienia, którego prędkość jest wynikową prędkości ruchów składowych.*

Jakakolwiek jest liczba nieskończenie małych przeniesień do składania, ruch wynikowy będzie zawsze przeniesieniem, którego prędkość wywiedzie się z prędkości ruchów składowych przez wielokąt prędkości jednoczesnych. Można więc zawsze zastąpić wszystkie nieskończenie małe przeniesienia jednoczesne układu bryłowego przez jedno przeniesienie. Nawzajem, można wieloma sposobami rozłożyć dane przeniesienie układu na dwa albo na trzy przeniesienia jednoczesne, tak jak się rozkłada prędkość, za pomocą równoległoboku albo równoległościanu.

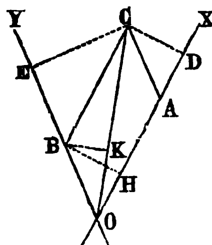
SKŁADANIE WIROWAŃ.

Przypuśćmy że ruch względny układu bryłowego jest wirowaniem około pewnej osi, i że ta oś, względnie nieruchoma, należy do innego układu który się obraca około osi stałej w przestrzeni. Będziemy szukali jakim sposobem można składać dwa takie ruchy jednoczesne, nieskończenie małe, zaczynając od przypadku w którym oś wirowania względnego i oś wirowania uniesienia są na jednej płasczyznie; te osie mogą się spotykać albo być równoległe. Potem zajmiemy się ogólnym przypadkiem w którym osie dwóch wirowań nie leżą na jednej płasczyznie.

91. Składanie dwóch wirowań których osie spotykają się. Niech będzie układ bryłowy mający dwa wirowania jednoczesne nieskończenie małe, około dwóch osi OX, OY przechodzących przez punkt O. Oznaczmy przez ω i ω' prędkości kątowe odpowiedające tym dwom wirowaniom. Punkt przecięcia O dwóch osi, jako nieruchomy w dwóch wirowaniach składowych, zostaje niezmienny w ruchu wynikowym; więc ruch wynikowy jest wirowaniem około osi poprowadzonej przez punkt O (82). Aby wyznaczyć kierunek tej osi, trzeba znaleźć drugi punkt mający prędkość zero. Takiego punktu trzeba szukać na płasczyznie XOY; albowiem dwie składowe prędkości punktu leżącego poza tą płasczyzną, nie będąc skierowane wedle tej samej linii prostej, nie mogą się niszczyć, i dlatego oś wirowania wynikowego nie może być poza płasczyzną dwóch osi wirowań składowych.

Przypuszczając wirowania składowe odbywające się od lewej ręki do prawej około osi OX, OY, uważajmy punkt C wewnątrz kąta XOY, i spuśćmy prostopadłe CD, CE na ramiona OX, OY.

Na mocy wirowania ωdt około osi OX, przez czas dt, punkt C zniża się pod płasczyznę XOY ilością ωdt. CD; a na mocy



wirowania $\omega' dt$ około osi OY, i w tym samym czasie, ten sam punkt C wznosi się nad płasczyznę XOY ilością $\omega' dt$.CE; więc punkt C zostaje nieruchomy jeśli istnieje równość

$$\omega dt.\mathrm{CD} = \omega' dt.\mathrm{CE},$$

albo proporcya

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}}.$$

Owoż, połączmy OC, a przez punkt C poprowadźmy równoległę CB do OX i równoległę CA do OY. Dwa trójkąty prostokątne CBE, CAD są podobne i dają

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{CD}} = \frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Porównywając tę równość z poprzedzającą, otrzymujemy

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}.$$

Ostatnia proporcya pokazuje że oś wirowania wynikowego ma kierunek przekątnej OC równoległoboku OACB, wysta-

wionego na dwóch liniach OA, OB, które przedstawiają kierunki dwóch osi wirowań składowych a zarazem wielkość stronę prędkości kątowych tych wirowań.

Przekątna OC przedstawia jeszcze wielkość i stronę prędkości kątowej wirowania wynikowego. Na dowodzenie tego, uważajmy ruch jakiegokolwiek punktu B leżącego na osi OY, i spuśćmy prostopadłe BH, BK na OA, OC. Punkt B, na mocy wirowania około OA przez czas dt, przemieszcza się ilością ωdt.HB, a nie przemieszcza się bynajmniej na mocy wirowania około OB; zatem ωdt.HB jest jego całem przemieszczeniem. Jeśli więc podzielimy to przemieszczenie przez KBdt, nazywając Ω prędkość kątową ruchu wirowego około osi OC, będziemy mieli

$$\Omega = \frac{\omega . \mathrm{HB}}{\mathrm{KB}}.$$

Owoż, wieloczyny OA.HB i OC.KB są równe, jako miary powierzchni równoległoboku OACB; zkąd wynika

$$\frac{\mathrm{HB}}{\mathrm{KB}} = \frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{OA}}.$$

Podstawiając tę wartość, otrzymujemy

$$\Omega = \frac{\omega\, \mathrm{OC}}{\mathrm{OA}},$$

albo

$$\frac{\Omega}{\mathrm{OC}} = \frac{\omega}{\mathrm{OA}}.$$

Co było do okazania.

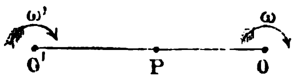
Równoległobok wirowań. Z tego co poprzedza łatwo wno-

simy że *wirowanie wynikowe dwóch nieskończenie małych wirowań jednoczesnych których osie spotykają się, jest przedstawione, co do wielkości, kierunku i strony, przez przekątnę równoległoboku wystawionego na osiach tych wirowań.*

Nietrudno teraz widzieć że wirowania nieskończenie małe jednoczesne, w liczbie jakiejkolwiek, których osie przechodzą wszystkie przez jeden punkt, składają się w jedno wirowanie wynikowe, tak jak się składają prędkości jednoczesne punktu ruchomego. To jest, buduje się wielokąt którego boki przedstawiają kierunki osi wirowań składowych, a zarazem wielkość i stronę prędkości kątowych tych wirowań; linia zamykająca wielokąt wskazuje kierunek osi wirowania wynikowego, i temsamem wyraża wielkość i stronę jego prędkości kątowej. To wykreślenie, za pomocą którego znajduje się wirowanie wynikowe układu bryłowego, mającego jednoczesne wirowania około osi przechodzących przez jeden punkt, nazywa się *wielokątem wirowań.*

W przypadku szczególnym, gdy wirowania składowe są w liczbie trzech, a ich osie przechodzące przez jeden punkt nie leżą wszystkie trzy na jednej płaszczyźnie, można, zamiast wielokąta wirowań, użyć *równoległościanu wirowań.* Ztąd wynika że wirowanie którego oś i prędkość kątowa są dane, może się zawsze rozłożyć na trzy wirowania jednoczesne około trzech osi prostokątnych albo pochyłych, które się krzyżują w jednym punkcie danej osi.

92. Składanie wirowań których osie są równoległe. Niech będzie układ bryłowy mający jednocześnie dwa wirowania około dwóch osi równoległych, zrzutowanych w O i O'; i niech ω, ω'



oznaczają prędkości kątowe tych wirowań. W jakąkolwiek

stronę odbywają się wirowania układu, widzimy zawsze że obie składowe prędkości każdego z jego punktów są na płasczyznie prostopadłej do osi O i O'; więc wszystkie punkta układu mają prędkości równoległe do tej płasczyzny, i przeto ruch całego układu jest wirowaniem około osi równoległej do danych osi wirowań.

Aby łatwiej wyznaczyć oś wirowania wynikowego, przypuśćmy najpierwej że oba nieskończenie małe wirowania odbywają się w jedną stronę jako wskazuje figura, i uważajmy na linii OO' punkt P. Na mocy wirowania około osi O punkt P wznosi się, przez czas dt, nad linię OO' ilością $\omega dt.OP$; a w tym samym czasie, na mocy wirowania około osi O', punkt P zniża się pod linię OO' ilością $\omega' dt.O'P$; więc punkt P zostanie nieruchomy, z przyczyny spółistnienia dwóch przeciwnych wirowań, jeśli jest równość

$$\omega dt.OP = \omega' dt.O'P.$$

Ztąd wynikają dwie równości

$$\frac{OP}{\omega'} = \frac{O'P}{\omega} = \frac{OO'}{\omega + \omega'},$$

które wyznaczają położenie osi P między osiami O i O'.

Te równości dowodzą że oś P wirowania wynikowego, równoległa do osi wirowań składowych, leży na płasczyznie tych osi, i dzieli ich odległość OO' na dwa odcinki PO, PO' odwrotnie proporcyonalne do prędkości kątowych ω, ω'.

Trzeba jeszcze znaleźć prędkość kątową Ω wirowania wynikowego. Aby ją wyznaczyć, dość będzie uważać ruch jakiegokolwiek punktu leżącego na osi O'. Całe przemieszczenie tego punktu, przez czas dt, pochodzi jedynie z wirowania ωdt około osi O, i równa się wieloczynowi $\omega dt.OO'$. Owoż, to przemieszczenie

może być uważane za pochodzące z wirowania wynikowego Ωdt około osi P, które się równa wieloczynowi $\Omega dt.\mathrm{PO}'$; mamy więc równość

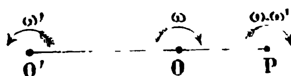
$$\Omega.\mathrm{PO}' = \omega.\mathrm{OO}' = \omega(\mathrm{OP} + \mathrm{PO}').$$

Ztąd, zastępując wieloczyn $\omega.\mathrm{OP}$ przez wieloczyn równy $\omega'.\mathrm{PO}'$, otrzymujemy

$$(1) \qquad \Omega = \omega + \omega'.$$

Więc prędkość kątowa wirowania wynikowego dwóch wirowań równoległych (mających osie równoległe), i w tę samą stronę, jest równa summie $\omega + \omega'$ prędkości kątowych tych wirowań.

93. Weźmy teraz przypadek w którym dwa wirowania składowe około osi równoległych O, O′ odbywają się w strony przeciwne. Rozumując jako w przypadku poprzedzającym, znaj-



dziemy łatwo że oś wirowania wynikowego, równoległa do osi O i O′ wirowań składowych, leży na płaszczyźnie tych osi, zewnątrz nich, i przechodzi przez punkt P dany przez równość

$$\omega.\mathrm{OP} = \omega'.\mathrm{O'P}.$$

Zkąd, przypuszczając $\omega > \omega'$, wyprowadzamy

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{OP}}{\omega'} = \frac{\mathrm{O'P}}{\omega} = \frac{\mathrm{OO'}}{\omega - \omega'}.$$

Znajdzie się prędkość kątową Ω wirowania wynikowego, wyrażając ruch jakiegokolwiek punktu leżącego na osi O'. Co zaraz daje równanie

$$\Omega . PO' = \omega . OO' = \omega(PO' - PO),$$

z którego, podstawiając za $\omega . PO$ wieloczyn równy $\omega' . PO'$, otrzymujemy

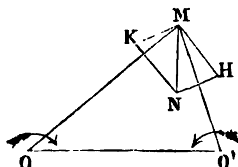
$$\Omega = \omega - \omega'. \tag{3}$$

Równania (2) i (3), wyznaczające położenie osi P i prędkość kątową Ω, dowodzą że : 1° prędkość kątowa wirowania wynikowego jest równa różnicy $\omega - \omega'$ prędkości kątowych dwóch wirowań składowych, i ma kierunek prędkości kątowej większej ω. 2° oś wirowania wynikowego, równoległa do obydwóch osi wirowań składowych, leży na płasczyznie tych osi, zewnątrz nich i ze strony osi O która odpowieda prędkości kątowej większej. 3° odległości PO, PO' osi wirowania wynikowego od osi wirowań składowych są odwrotnie proporcyonalne do odpowiedających prędkości kątowych ω, ω'.

94. Przypadek osobliwy. Im się mniej prędkości kątowe ω, ω' różnią między sobą, tem mniejsza jest prędkość kątowa $\omega - \omega'$ wirowania wynikowego, i tem więcej oś tego wirowania oddala się od osi wirowań składowych. Jeśli więc $\omega = \omega'$, wtedy prędkość kątowa wirowania wynikowego jest zero, i jego oś jest nieskończenie oddalona od osi O i O'. Ten wynik nie pokazuje nic więcej tylko to, że niema w układzie bryłowym ruchomym żadnego punktu stałego. Zatem, rzeczywisty ruch tego układu nie jest wirowaniem. I w samej rzeczy, nietrudno dowieść że, w tym osobliwym przypadku, ruch układu bryłowego jest prostem przeniesieniem.

Niech będą tedy O i O' osie dwóch wirowań składowych,

mających prędkość kątową spólną ω. Weźmy jakikolwiek punkt M układu ruchomego, i połączmy MO, MO′. Wirowanie około



osi O daje temu punktowi, w czasie dt, przemieszczenie MH normalne do MO i wyrażone przez $\omega dt.OM$; wirowanie około osi O′ daje mu, w tym samym czasie, przemieszczenie MK normalne do MO′ i wyrażone przez $\omega dt.O'M$; więc nieskończenie małe przemieszczenie wynikowe jest przedstawione przez przekątnę MN równoległoboku MHNK zbudowanego na bokach MH, MK. Owoż, w dwóch trójkątach MHN, MOO′ kąty MHN, OMO′, mające boki prostopadłe i podobnie ułożone, są równe; nadto, boki MH i HN są proporcyonalne do boków MO i MO′; więc dwa rzeczone trójkąty MHN i MOO′, mające kąt równy zawarty między dwoma bokami proporcyonalnemi, są podobne. Ztąd wynika że bok MN jest normalny do odpowiedniego boku OO′, i stosunek $\frac{MN}{OO'}$ jest ilością stateczną której wartość równa się

$$\frac{MN}{OO'} = \frac{MH}{MO} = \omega dt.$$

Zkąd

$$MN = \omega dt.OO'.$$

To dowodzi że wielkość MN jest niezależna od punktu M. Więc, gdy układ bryłowy ma jednocześnie dwa wirowania równoległe i równe ale w strony przeciwne, wszystkie jego punkta są ożywione tą samą prędkością, stateczną co do wiel-

kości i kierunku. Co właśnie cechuje ruch przeniesienia, którego prędkość wyraża się przez

$$\frac{MN}{dt} = \omega . OO'.$$

To przeniesienie, prostopadłe do płasczyzny dwóch osi O, O', jest skierowane w stronę w którą idą punkta zawarte między temi osiami pod wpływem dwóch prędkości kątowych.

Dwojany wirowań. Dwa wirowania równe, równoległe i w strony przeciwne, wzięte razem stanowią to co nazwano *dwojanem wirowań.*

Dwojan wirowań jest równowarty przeniesieniu prostopadłemu do jego płasczyzny (do płasczyzny dwóch osi). Wieloczyn $\omega . OO'$, wyrażający prędkość tego przeniesienia, nazywa się *momentem dwojanu*, a odległość OO' dwóch osi *ramieniem dźwigni* dwojanu.

Dwojan może być przeniesiony na swojej płasczyznie, albo na płasczyznie równoległej, i obrócony jak się podoba; bo wszystkie dwojany tak otrzymane są zawsze równowarte temu samemu przeniesieniu, a zatem równowarte między sobą.

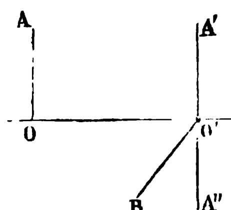
Dla tej przyczyny można zmieniać wielkość prędkości kątowej ω i wielkość ramienia dźwigni OO', byle tylko nie zmieniano momentu dwojanu $\omega . OO'$.

Nawzajem, mając dane jakiekolwiek przeniesienie, można je zastąpić przez dwojan wirowań którego płasczyzna, przechodząca przez jakikolwiek punkt przestrzeni, jest prostopadła do kierunku prędkości v tego przeniesienia. Nadto, można brać dowolnie na płasczyznie dwojanu spólny kierunek osi dwóch wirowań składowych, i jeszcze dowolnie jedną z dwóch ilości ω i OO', wyznaczając drugą przez równanie

$$\omega . OO' = v.$$

Wprowadzenie dwojanów wirowań do cynematyki nie może logicznie mieć na celu przemiany ruchu przeniesienia na dwa wirowania równe, równoległe i przeciwne; boby to było, za wyobrażenie jasne, podstawiać wyobrażenie mniej więcej zawiłe. Dwojany służą jako sposób przekształcania ruchu, aby uprościć rozumowanie i ułatwić rozwiązanie zagadnień.

I tak, za pomocą dwojanów wirowań, można zastąpić wiro-



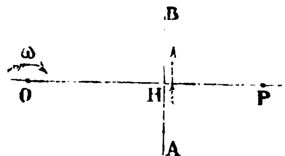
wanie około osi OA przez wirowanie równe około osi O'A' równoległej do OA, i przez przeniesienie O'B prostopadłe do płaszczyzny AOO'. Jakoż, nazywając ω prędkość kątową wirowania około OA, możemy przyłożyć do osi O'A' dwa wirowania O'A', O'A'', mające oba prędkość kątową ω ale w strony przeciwne. Te dwa wirowania, równe i wprost przeciwne, niszczą się i nie naruszają w niczem wirowania około OA. Ale teraz dwa wirowania OA, O'A'' równe, równoległe i w strony przeciwne, stanowią dwojan (OA, O'A''), który jest równowarty przeniesieniu O'B prostopadłemu do płaszczyzny AOO'. Zostaje więc wirowanie około O'A' z prędkością kątową ω, i przeniesienie O'B z prędkością $v = \omega . OO'$. Tym sposobem wirowanie OA przenosi się równolegle do siebie samego z punktu O do punktu O'.

95. Gdy układ bryłowy ma zarazem kilka wirowań równoległych i w tę samą stronę, znajduje się łatwo ruch wynikowy, składając najpierwej dwa z tych wirowań w jedno, jakośmy

widzieli szczegółowo w numerze 92; poczem, tak otrzymane wirowanie wynikowe składa się z trzeciem wirowaniem danem, a ztąd wynikające wirowanie składa się z czwartem danem; i tak dalej. Ruch wynikowy będzie oczywiście wirowaniem równoległem do wirowań składowych, jego prędkość kątowa będzie równa summie prędkości kątowych tych wirowań i w tę samą stronę.

W przypadku gdy jedne z wirowań składowych równoległych idą w jedną stronę a drugie w stronę przeciwną, znajduje się ruch wynikowy, składając najpierwej w jedno wszystkie wirowania idące w tę samą stronę, a potem składając także w jedno wszystkie te które idą w stronę przeciwną; nakoniec składa się dwa wirowania wynikowe częściowe. Ostatecznie ruch wirowy układu będzie wirowaniem albo przeniesieniem, według jak prędkości kątowe dwóch wirowań wynikowych przeciwnych będą nierówne albo równe.

96. Składanie przeniesienia i wirowania. Uważajmy najpierwej układ bryłowy mający przeniesienie i zarazem wirowanie około osi prostopadłej do tego przeniesienia. Niech będzie AB kierunek przeniesienia, i, na płasczyznie przechodzącej



przez AB, rzut O osi około której odbywa się wirowanie. Oznaczmy przez v prędkość przeniesienia i przez ω prędkość kątową wirowania, obie idące w strony wskazane przez strzały. To mając, z punktu O spuśćmy na AB prostopadłę OH, i na jej kierunku szukajmy punktu P któryby zostawał niezmienny

z przyczyny spółistnienia dwóch ruchów. Na mocy wirowania ωdt około osi O, przez czas dt, punkt P zniża się pod linię OH ilością $\omega dt . OP$, a na mocy przeniesienia ten punkt wznosi się, w tym samym czasie, nad linię OH ilością vdt; więc punkt P zostanie nieruchomy jeśli jest równość

$$\omega . OP = v,$$

która daje

$$OP = \frac{v}{\omega}.$$

Ztąd wnosimy że ruch wynikowy układu jest wirowaniem około osi przechodzącej przez punkt P, i równoległej do osi O wirowania składowego.

Nietrudo znaleźć prędkość kątową z jaką się odbywa wirowanie wynikowe. Widzimy albowiem że wszelki punkt osi O przemieszcza się, przez czas dt, ilością vdt na mocy przeniesienia AB, a nie przemieszcza się bynajmniej na mocy wirowania około osi O; zatem całe przemieszczenie każdego z punktów osi O jest równe vdt. Ale możemy uważać to przemieszczenie jako pochodzące z wirowania wynikowego Ωdt około osi P, i wyrazić je przez $\Omega dt . PO$; mamy więc

$$\Omega dt . PO = vdt;$$

zkąd, podstawiając za v jego wartość $\omega . PO$, wyprowadzamy

$$\Omega = \omega.$$

To dowodzi że wirowanie wynikowe ma prędkość kątową ω wirowania składowego.

97. Dobrze jest znać inny sposób otrzymania tego wyniku.

Dochodzi się do niego za pomocą dwojanu wirowań. Jakoż, możemy uważać przeniesienie AB jako dwojan wirowań którego płaszczyzna jest prostopadłą do AB; to jest rozłożyć to przeniesienie na dwa wirowania równe i przeciwne, mające oba prędkość kątową ω, jedno około osi O w stronę przeciwną wirowania składowego, drugie około osi P wyznaczonej przez równanie

$$\omega . OP = v.$$

Owoż, dwa wirowania równe i przeciwne około osi O niszczą się; zostaje więc wirowanie około osi P, równe danemu wirowaniu któreby przeniesiono na oś P.

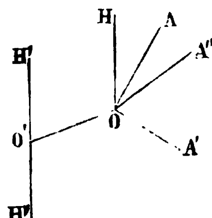
98. Gdy układ bryłowy ma przeniesienie i zarazem wirowanie około osi nieprostopadłej do kierunku przeniesienia, trzeba rozłożyć przeniesienie na dwa składowe, z którychby jedno było równoległe do osi wirowania a drugie do niej prostopadłe. Poczem, składa się pierwsze składowe przeniesienie z wirowaniem; co daje wirowanie równe około osi równoległej do drugiego składowego przeniesienia. Zostaje nakoniec wirowanie i przeniesienie równoległe do jego osi. Te dwa nieskończenie małe ruchy jednoczesne układu bryłowego stanowią ruch helicowy.

Nietrudno mieć wyrażenie prędkości jakiegokolwiek punktu układu ruchomego. Jakoż, nieskończenie mały ruch helicowy może być uważany jako pochodzący ze składania ruchu wirowego około osi chwilowej wirowania i ślizgania, i z ruchu przeniesienia wzdłuż tej osi; jeśli więc oznaczymy przez v prędkość przeniesienia, przez ω prędkość kątową wirowania, przez r odległość uważanego punktu od osi chwilowej wirowania i ślizgania, będziemy mieli dwie składowe v i $r\omega$ prędkości tego punktu; a ponieważ te składowe są prostokątne, prędkość wynikowa wyrazi się przez

$$\sqrt{v^2 + r^2\omega^2}.$$

Ta wartość pokazuje że prędkość jakiegokolwiek punkt układu jest tem większa im więcej punkt jest oddalony od osi chwilowej wirowania i ślizgania; a rzeczona oś jest miejscem punktów mających prędkość minimum. Wynik już wiadomy.

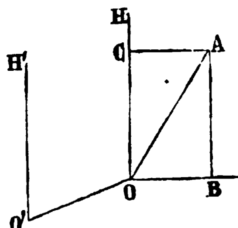
99. Możemy sobie wyobrazić najogólniejszy ruch nieskończenie mały układu bryłowego, przywiązując stale do jakiegokolwiek punktu O tego układu trzy osie prostokątne, mające ruch przeniesienia którego prędkość jest równa prędkości zmiennej OA tego punktu. Ruch układu względem tych trzech



osi spółrzędnych jest wirowaniem, z prędkością kątową ω około osi OH przechodzącej przez punkt O. Weźmy jeszcze drugi jakikolwiek punkt O′ układu, i przydajmy, do dwóch powyższych ruchów przeniesienia OA i wirowania OH, dwa wirowania równe i przeciwne, około osi O′H′ równoległej do OH, z prędkością kątową $\omega = O'H' = O'H''$. Ruch układu nie jest w niczem zmieniony; ale teraz składa się z dwojanu wirowań (OH, O′H″), z wirowania O′H′ i z przeniesienia OA. Owoż, dwojan wirowań (OH, O′H″) jest równowarty przeniesieniu OA′, prostopadłemu do płasczyzny HOO′, i mające mu prędkość $\omega . OO'$; to przeniesienie składa się z przeniesieniem OA w jedno wynikowe OA″. Zostaje więc przeniesienie OA″, i wirowanie O′H′ które jest właśnie wirowaniem OH przeniesionem do punktu O′. To dowodzi że, jakikolwiek obrano punkt O układu bryłowego za początek spółrzędnych rucho-

mych, znajduje się zawsze tę samą linię prostą, która przedstawia wielkość prędkości kątowej, kierunek i stronę osi wirowania układu. Oczywiście ta linia jest równoległa do osi chwilowej wirowania i ślizgania, zwanej także *osią środkową*.

Ruch przeniesienia zmienia się z punktem obranym za początek spółrzędnych ruchomych, ale zostaje ten sam dla wszystkich punktów prostej OH, równoległej do osi chwilowej wirowania i ślizgania. Prędkość przeniesienia jest najmniejsza możebna w ruchu helicowym. Jakoż, niech będą, jako wyżej, OH oś wirowania i OA prędkość przeniesienia układu. Rozłóżmy



przeniesienie OA na dwa składowe prostokątne, jedno OC równoległe a drugie OB prostopadłe do osi wirowania OH. Przeniesienie OB jest równowarte dwojanowi wirowań leżącemu na płasczyznie prostopadłej do OB. Owoż, można się zawsze tak urządzić żeby jedno z wirowań tego dwojanu niszczyło wirowanie OH; punkt O' w którym trzeba przyłożyć drugie wirowanie, będzie jednym z punktów osi chwilowej wirowania i ślizgania; będziemy więc mieli ruch helicowy około osi O'H' z prędkością ślizgania OC mniejszą od OA, ponieważ OC jest rzutem z OA na osi OH. To co poprzedza już jest wiadome (86); przydaliśmy drugie dowodzenie dlatego że nastręcza geometryczny sposób wyznaczenie osi chwilowej wirowania i ślizgania, gdy są wiadome, z wielkości i kierunku, przeniesienie OA i wirowanie OH; wtedy albowiem kierunek osi chwilowej wirowania i ślizgania jest dany przez oś OH,

a punkt O, jeden z jej punktów otrzymuje się przez równanie

$$OH.OO' = OB.$$

W przypadku gdy OC, prędkość minimum przeniesienia, jest zero, układ ma tylko ruch wirowy około osi chwilowej O'H', przez czas *dt*.

SKŁADANIE RUCHÓW JAKICHKOLWIEK.

100. Żeby składać nieskończenie małe ruchy jednoczesne które układ bryłowy posiada w danej chwili, dość jest wziąć w przestrzeni dowolny punkt O, i do niego przenieść wszystkie wirowania. Te wirowania złożą się w jedno wirowanie, do którego trzeba dołączyć wynikowę otrzymaną ze składania wszystkich przeniesień, tak danych jako i tych które pochodzą z przeprowadzenia wirowań do punktu O. Ostateczną wynikową tych wszystkich, nieskończenie małych, ruchów jednoczesnych jest ogólnie ruch helicowy.

Przeniesienie i wirowanie, do których się przywodzi wszelki ruch nieskończenie mały układu bryłowego, wolnego w przestrzeni, mogą się wyrazić przez dwa wirowania około osi nie leżących na jednej płasczyznie. Można albowiem zastąpić przeniesienie wynikowe przez dwojan wirowań, w którym jedna z dwóch osi spotyka oś wirowania wynikowego, i potem złożyć w jedno wynikowe dwa wirowania mające osie zbieżne. Tym sposobem nieskończenie mały ruch układu przywodzi się do dwóch wirowań których osie nie leżą na jednej płasczyznie.

Te dwie osie są *liniami sprzężonemi;* jedna z nich może być wzięta dowolnie.

Działając tak jak w dwojanach sił, nietrudno okazać że ruch nieskończenie mały układu bryłowego może się w ogóle przy-

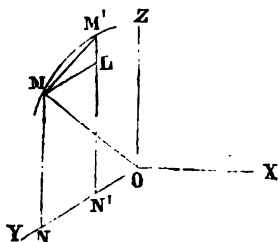
wieśdź do dwóch wirowań których osie są prostopadłe między sobą w przestrzeni.

To wszystko pokazuje że wirowania i przeniesienia składają się jako siły i dwojany sił; tosamość jest zupełna, byle przyrównano wirowania do sił i uważano przeniesienia za dwojany wirowań.

101. Rozkład nieskończenie małego ruchu układu bryłowego na trzy przeniesienia równoległe do trzech osi spółrzędnych prostokątnych, i na trzy wirowania około tych osi. Widzieliśmy że nieskończenie mały ruch układu bryłowego może być uważany jako wynikowy, z nieskończenie małego przeniesienia OA punktu O należącego do układu, i z wirowania OH około osi przez ten punkt przechodzącej (48). Owoż, jeśli przez punkt O poprowadzimy trzy osie spółrzędne prostokątne, będziemy mogli oczywiście rozłożyć przeniesienie OA na trzy przeniesienia wedle tych osi, a wirowanie OH na trzy wirowania około tych samych osi (91). Więc wszelki ruch nieskończenie mały układu bryłowego, wolnego w przestrzeni, może się zawsze rozłożyć na trzy przeniesienia równoległe do trzech osi spółrzędnych prostokątnych, poprowadzonych dowolnie przez jakikolwiek punkt O układu, i na trzy wirowania około tych osi.

102. Równanie osi chwilowej wirowania i ślizgania. Niech będzie układ bryłowy odniesiony do trzech osi ruchomych prostokątnych OX, OY, OZ, które przechodzą przez jeden z jego punktów. Aby łatwo znaleźć równania osi chwilowej wirowania i ślizgania, weźmy jakikolwiek punkt M układu, i, oznaczając przez x, y, z jego spółrzędne, przez u_x, u_y, u_z składowe prędkości przeniesienia u równoległe do osi spółrzędnych, przez p, q, r składowe prędkości kątowej ω około tych osi, wyraźmy w funkcyi ilości p, q, r składowe prędkości względnej tego punktu równoległe do osi ruchomych. W tym celu,

zrzutujmy najpierwej punkt M na płaszczyźnie YZ, i uważajmy że wirowanie p, przypuszczając je dodatne, sprowadza, przez czas dt, punkt M na M', obrotem około OX w stronę YZ. Poprowadźmy proste MN, M'N' równoległe do OZ, prostę ML równoległą do OY, i połączmy OM, MM'. Widzimy zaraz że,



w założeniu $p > 0$, rzędna z punktu M zwiększa się ilością LM', a zaś odcięta y zmniejsza się ilością ML. Stałoby się całkiem przeciwnie, gdyby było $p < 0$. Owoż, dwa trójkąty MLM' i OMN, mające boki odpowiednio prostopadłe, są podobne i dają

$$\frac{\mathrm{ML}}{\mathrm{MN}} = \frac{\mathrm{LM'}}{\mathrm{ON}} = \frac{\mathrm{MM'}}{\mathrm{OM}},$$

albo

$$\frac{\mathrm{ML}}{z} = \frac{\mathrm{LM'}}{y} = pdt;$$

zkąd, biorąc z przyzwoitemi znakami ilości ML, LM', p, otrzymujemy zawsze

$$\mathrm{ML} = -pzdt \qquad \mathrm{LM'} = +pydt.$$

Więc wirowanie p około OX, dodatne albo odjemne, daje następujące składowe nieskończenie małego przemieszczenia

punktu M,

$$-pzdt \text{ równoległe do } OY,$$
$$+pydt \text{ równoległe do } OZ.$$

Rozumując tak samo, znajdziemy że wirowanie q około OY daje składowe przemieszczenia

$$-qxdt \text{ równoległe do } OZ,$$
$$+qzdt \text{ równoległe do } OX.$$

Nakoniec wirowanie r około OZ daje przemieszczenia

$$-rydt \text{ równoległe do } OX,$$
$$+rxdt \text{ równoległe do } OY.$$

Zbierając w jedną summę składowe przemieszczenia, równoległe do każdej z trzech osi spółrzędnych, będziemy mieli

$$(qz-ry)dt, \quad (rx-pz)dt, \quad (py-qx)dt.$$

Ztąd

$$qz-ry, \qquad rx-pz, \qquad py-qx,$$

składowe prędkości względnej punktu M około punktu O, któreśmy innym sposobem otrzymali w Dynamice.

Ale punkt M ma jeszcze ruch przeniesienia z prędkością u; dodając składowe u_x, u_y, u_z tej prędkości do poprzedzających, znajdujemy ostatecznie

$$u_x+qz-ry, \qquad u_y+rx-pz, \qquad u_z+py-qx,$$

składowe prędkości jakiegokolwiek punktu M układu, równoległe do trzech osi spółrzędnych ruchomych.

Owoż, punkta osi chwilowej wirowania i ślizgania odróżniają się od wszystkich innych tą cechującą własnością że ich przemieszczenia są równoległe do kierunku tej osi; jeśli więc punkt M jest jednym z punktów rzeczonej osi, jego prędkość jest prędkością ślizgania, której wartość

$$u \operatorname{dos}(\omega, u) = \frac{pu_x + qu_y + ru_z}{\omega}$$

może się wyrazić przez każdą z trzech ilości

$$\frac{u_x + qz - ry}{\frac{p}{\omega}}, \quad \frac{u_y + rx - pz}{\frac{q}{\omega}}, \quad \frac{u_z + py + qx}{\frac{r}{\omega}}.$$

Ztąd wnosimy że równania osi chwilowej wirowania i ślizgania, odniesione do trzech osi prostokątnych ruchomych, są

$$\frac{u_x + qz - ry}{p} = \frac{u_y + rx - pz}{q} = \frac{u_z + py - qx}{r} = \frac{pu_x + qu_y + ru_z}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Te trzy równania, oczywiście zgodne między sobą, tworzą dwa tylko równania oddzielne.

Żeby mieć równania osi chwilowej wirowania i ślizgania względem trzech osi spółrzędnych stałych w przestrzeni, trzeba, za pomocą wiadomych formuł przekształcania spółrzędnych, wyrazić x, y, z w funkcyi spółrzędnych odniesionych do osi stałych. Tym sposobem oś chwilowa wirowania i ślizgania jest wyznaczona w każdej chwili względem układu bryłowego w ruchu, albo względem osi niezmiennych w przestrzeni; przypuszczając że u_x, u_y, u_z, p, q,... są funkcyami czasu t.

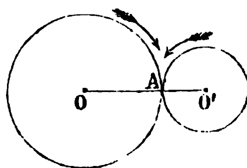
Rugując czas t między dwoma równaniami osi chwilowej wirowania i ślizgania, otrzyma się równanie powierzchni prostorodnej, która jest miejscem położeń, po sobie idących, tej osi w układzie ruchomym albo w przestrzeni.

RUCH WZGLĘDNY DWÓCH UKŁADÓW BRYŁOWYCH.

103. Gdy dwa układy bryłowe A, B poruszają się w przestrzeni, aby znaleźć ruch układu A względny do układu B, dość jest myślą nadać ogółowi dwóch układów ruch równy i przeciwny ruchowi układu B. Ten ruch spólny nie zmieni w niczem ruchu względnego; ale za pomocą niego układ B zostanie sprowadzony do spoczynku, a ruch własny układu A, złożony z ruchem nadanym, sprawi ruch wynikowy który będzie szukanym ruchem względnym układu A. Otrzymuje się to wszystko składając, podług wiadomych prawideł, ruch własny układu A z ruchem równym i przeciwnym ruchowi osi spółrzędnych ściśle związanych z układem B, i z nim ruchomych. Tym właśnie sposobem przywodzi się ruch względny do ruchu samoistego.

Na zastosowanie weźmy dwa następujące przykłady.

ZAGADNIENIE I. *Dwa walce proste, mające za podstawy koła* OA, O'A *styczne w punkcie* A, *obracają się każdy około swojej osi* O, O' *w strony przeciwne, tak że prędkości wszystkich punktów ich powierzchni są równe. Jaki jest ruch walca* O' *względem walca* O?



Oznaczmy przez R, R' promienie dwóch podstaw, przez v prędkość spólną wszystkim punktom dwóch powierzchni walcowych; prędkość kątowa wirowania około osi O, dla punktów

leżących na pierwszej powierzchni walcowej, wyrazi się przez $\frac{v}{R}$; a prędkość kątowa wirowania około osi O', dla punktów leżących na drugiej powierzchni walcowej, będzie $\frac{v}{R'}$. Jeśli nadamy całemu układowi dwóch walców ruch spólny, równy i przeciwny ruchowi walca O, wtedy walec O zostanie w spoczynku, a walec O' weźmie ruch złożony ze swojego własnego ruchu i z ruchu nadanego; ten ruch wynikowy będzie ruchem względnym szukanym.

Mamy więc teraz do składania wirowanie $\frac{v}{R}$ około osi O' z wirowaniem równem i przeciwnem wirowaniu $\frac{v}{R'}$ około osi O. Wirowanie wynikowe tych dwóch wirowań równoległych i w jedną stronę, jest do nich równolegle w tę samą stronę, i równa się ich summie $\frac{v}{R}+\frac{v}{R'}$. Oś wirowania wynikowego dzieli odległość OO' dwóch osi wirowań składowych w stosunku odwrotnym prędkości kątowych; co daje

$$\frac{\frac{v}{R}}{\frac{v}{R'}}=\frac{R'}{R}=\frac{AO'}{AO}.$$

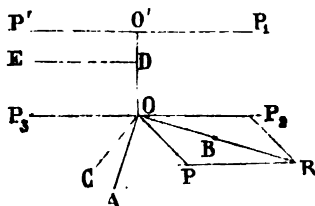
Równość pokazuje że ta oś przechodzi przez punkt zetknięcia A podstaw dwóch walców; zatem okrąg O' toczy się jednostajnie na okręgu O (77), i to stanowi jego ruch względny. Prędkość kątowa wirowania okręgu ruchomego, około punktu zetknięcia z okręgiem stałym, wyraża się przez już wiadomą formułę

$$v\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

którąśmy znaleźli innym sposobem w teoryi ruchu epicykloidalnego.

To wszystko stosuje się do każdego dwojanu okręgów stycznych, leżących na dwóch walcach; ztąd wnosimy że ruch względny walca O′ jest toczeniem się jednostajnem na walcu O, a prędkość kątowa wirowania walca ruchomego około krawędzi zetknięć z walcem stałym równa się $v\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)$.

Zagadnienie II. *Dwa ciała obracają się jednostajnie około osi nie leżących na jednej płaszczyznie; znaleźć ruch jednego z dwóch ciał względem drugiego, i wyznaczyć oś chwilową wirowania i ślizgania w tym ruchu.*



Niech będą OP, O′P′ osie dwóch wirowań danych ω, ω'. Poprowadźmy najkrótszą odległość OO′ tych osi, i uczyńmy $OO' = h$. Chcąc mieć ruch względny pierwszego ciała odniesiony do drugiego, trzeba składać pierwsze wirowanie $OP = \omega$ z wirowaniem $O'P_1 = -\omega'$ które jest równe i przeciwne wirowaniu drugiego ciała. Żeby zaś ułatwić to składanie, wprowadźmy dwa wirowania równe i przeciwne OP_2, OP_3 około osi równoległej do O′P′, z prędkością kątową ω'; przez co nie zmienimy w niczem uważanego ruchu. Ale teraz wirowania OP, OP_2 składają się w jedno wynikowe OR, i nadto mamy dwojan wirowań $(OP_3, O'P_1)$ który jest równowarty przeniesieniu OA prostopadłemu do płasczyzny $O'OP_3$.

Więc ruch względny szukany składa się z wirowania OR ma-

jącego prędkość kątową Ω, i z przeniesienia OA mającego prędkość $\omega' h$.

Szukajmy nakoniec osi chwilowej wirowania i ślizgania w ruchu względnym. Wiemy że ta oś jest równoległa do osi OR wirowania wynikowego; żeby więc wyznaczyć jej położenie w przestrzeni, dość znaleźć jeden z jej punktów. W tym celu rozłóżmy przeniesienie OA na dwa składowe, jedno OB wedle osi OR a drugie OC prostopadłe do OR. Wartości tych dwóch przeniesień składowych są :

$$\mathrm{OB} = \omega' h \, \mathrm{wst} \, \mathrm{ROP}_2,$$

$$\mathrm{OC} = \omega' h \, \mathrm{dos} \, \mathrm{ROP}_2.$$

Owoż, możemy zastąpić przeniesienie OC przez dwojan któregoby jedno z wirowań niszczyło wirowanie OR; drugie wirowanie będzie się odbywało około osi leżącej na płasczyznie ROO' prostopadłej do OC. Niech będzie DE ta oś; jeśli nazwiemy z ramie dźwigni dwojanu, otrzymamy

$$\Omega z = \omega' h \, \mathrm{dos} \, \mathrm{ROP}_2.$$

Oś DE, wyznaczona tem równaniem, jest osią chwilową wirowania i ślizgania w ruchu względnym.

Można odrazu otrzymać powyższe równanie osi chwilowej wirowania i ślizgania, stosując ogólne równania tej osi któreśmy wskazali w numerze 102. Jakoż, weźmy za osie ruchome spółrzędnych trzy osie prostokątne OR, OC, OO'; będziemy mieli

$$p = \Omega, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad u_x = \omega' h \, \mathrm{wst} \, \mathrm{ROP}_2, \quad u_y = \omega' h \, \mathrm{dos} \, \mathrm{ROP}_2,$$
$$u_z = 0.$$

Podstawiając te wartości w równaniach ogólnych o których mowa, znajdujemy

$$\frac{\omega' h \operatorname{wst} ROP_2}{\Omega} = \frac{\omega' h \operatorname{dos} ROP_2 - \Omega z}{0} = \frac{\Omega y}{0}.$$

Więc równania osi chwilowej wirowania i ślizgania w uważanym ruchu względnym są :

$$\Omega z - \omega' h \operatorname{dos} ROP_2 = 0, \qquad y = 0.$$

Uwaga. Z powyższych równań wywodzimy

$$z = \frac{\omega' h \operatorname{dos} ROP_2}{\Omega}, \quad \text{i} \quad h - z = \frac{\omega h}{\Omega} \operatorname{dos} ROP$$

zważając na związek

$$\Omega = \omega \operatorname{dos} ROP + \omega' \operatorname{dos} ROP_2.$$

Mamy zatem

$$\frac{z}{h-z} = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{\operatorname{dos} ROP_2}{\operatorname{dos} ROP}.$$

Ale

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\operatorname{wst} ROP}{\operatorname{wst} ROP_2};$$

więc

$$\frac{z}{h-z} = \frac{\operatorname{dot} ROP_2}{\operatorname{dot} ROP}.$$

Gdy osie OP, O′P′ dwóch danych wirowań są prostokątne, wtedy kąty ROP, ROP_2 są dopełniające; co daje

$$\frac{z}{h-z} = \operatorname{dot}^2 ROP_2 = \frac{\omega'^2}{\omega^2}.$$

Więc *oś chwilowa wirowania i ślizgania dzieli najkrótszą odległość dwóch prostokątnych osi wirowań w stosunku odwrotnym kwadratów prędkości kątowych.*

104. Toczenie się i ślizganie ciał bryłowych jednych na drugich. Gdy dwa ciała bryłowe poruszają się jedno względem drugiego tak, że ich powierzchnie stykają się w jednym tylko punkcie, miejscem tego punktu na każdej powierzchni jest ogólnie linia krzywa. Wtedy, jeśli pierwsza z dwóch linij krzywych toczy się na drugiej (77), albo co to samo, jeśli w każdej chwili łuki przebieżone przez punkt zetknięcia na dwóch powierzchniach mają długości równe, mówi się że pierwsze ciało *toczy się* na drugiem. Toczenie się jest ciągiem nieskończenie małych wirowań około osi chwilowych, z których każda przechodzi przez punkt zetknięcia, odpowiedający danej chwili, i leży na płaszczyznie stycznej spólnej dwom ciałom.

Ale, gdy dwa ciała bryłowe w ruchu zostają ciągle styczne tak, że jedno dotyka zawsze tym samym punktem drugiego w różnych jego punktach, wtedy mówi się że pierwsze ciało *ślizga* na drugiem. Ruch ślizgania jest przeniesieniem równoległem do płaszczyzny stycznej spólnej.

W ruchu dwóch ciał bryłowych stykających się może być zarazem toczenie się i ślizganie. To się łącznie nazywa *ślizganiem mieszanem*, i zdarza się wtedy gdy punkt spólnego zetknięcia dwóch ciał przebiega na ich powierzchniach dwa łuki równej długości. Ślizganie mieszane nazywają *styczennem* gdy dwie linie punktów zetknięć, po sobie idących, są styczne w punkcie zetknięcia dwóch ciał, a zaś *kątowem* gdy te linie przecinają się pod pewnym kątem w punkcie zetknięcia, na płaszczyznie stycznej spólnej.

Określenia toczenia się i ślizgania jednego ciała na drugiem nie przypuszczają bynajmniej żeby jedno z dwóch ciał było w spoczynku. Toczenie się jest *samoiste* albo *względne*, według

jak jedno z dwóch ciał zostaje nieruchome albo oba się poruszają. Ale toczenie się względne może się przywieśdź do toczenia się samoistego takim samym sposobem jakim się sprowadza ruch względny do ruchu samoistego. To wszystko stosuje się do ślizgania które, w tych samych okolicznościach, jest także samoiste albo względne. Będziemy więc tylko mówili o toczeniu się samoistem i o ślizganiu samoistem.

105. Jeśli dwa ciała bryłowe w ruchu mają więcej niż jeden punkt zetknięcia, ruch względny jest toczeniem się, ślizganiem, albo zarazem jednem i drugiem, według warunków jakim wszystkie punkta zetknięć czynią zadość.

W tym przypadku trzeba jeszcze odróżnić ruch *kręcenia się* jednego ciała na drugiem, który ma miejsce gdy pierwsze ciało w zetknięciu z drugiem obraca się około osi prostopadłej do niego. Ten ruch, jako łatwo widzimy, jest ślizganiem ciała ruchomego na ciele względnie stałem.

Gdy jest toczenie się w każdym punkcie zetknięć dwóch ciał bryłowych, ciało ruchome obraca się około osi przechodzącej przez ten punkt na płaszczyznie stycznej spólnej; zatem wszystkie punkta zetknięć leżą na jednej i tej samej linii prostej. Żeby więc jedno ciało mogło się toczyć na innem wzdłuż linii zetknięć, przez czas jakikolwiek, trzeba żeby powierzchnie tych dwóch ciał były powierzchniani *prostorodnemi*. Co się łatwo zdarza, gdy naprzykład walec toczy się na płaszczyznie albo na innym walcu, albo gdy stożek toczy się na płaszczyznie albo na innym stożku. Walec toczy się w linii prostej na płaszczyznie; ale, na tej płaszczyznie, stożek nie może mieć ruchu prostolinijnego ani walec ruchu kołowego, bez ruchu kręcenia się.

Jeśli powierzchnie dwóch ciał są prostorodne, ruch jednego z nich względem drugiego może być nieskończenie małem wirowaniem około linii punktów zetknięć i przeniesieniem wzdłuż tej linii, która jest linią rodzącą dwóch powierzchni.

Więc, w tym przypadku, ciało ruchome może się toczyć i zarazem ślizgać na ciele stałem.

W takim ruchu dwóch ciał, nieskończenie małem ślizganiem jest ilość o jaką się oddaliły od siebie dwa punkta które były razem w zetknięciu dwóch powierzchni; a prędkością ślizgania jest zawsze prędkość tego punktu który należy do ciała ruchomego. Ślizganie i odpowiedająca mu prędkość mają zawsze kierunek na płasczyznie stycznej spólnej dwom ciałom.

Gdy ciało bryłowe w ruchu dotyka ciała nieruchomego wieloma punktami, wtedy do każdego z tych punktów stosuje się wszystko cośmy powiedzieli o jednym punkcie zetknięcia. Ślizganie i prędkość ślizgania w tych punktach wyznaczają się w każdym jak gdyby dwa ciała dotykały się jednym tylko punktem.

ZASADY ZAZĘBIAŃ,

106. Zazębianie stanowią koła opatrzone zębami na całym okręgu, czyli jako się mówi *koła zębate*, osadzone stale na materyalnych osiach z któremi się obracają; zęby koła przystosowanego do jednej osi przenikają między zęby koła przymocowanego do drugiej, i te dwa koła *zazębiają* między sobą tak, że pierwsze nie może się obracać nie obracając drugiego; tym sposobem przeprowadza się ruch od jednego koła do drugiego. Głównym przedmiotem zazębiań jest przekształcenie ruchu wirowego około jednej osi na ruch wirowy około drugiej. Zazębiania przekształcają także ruch wirowy na ruch prostolinijny, i nawzajem; co jest szczególnym przypadkiem zagadnienia ogólnego. Zęby dwóch kół są tak urządzone żeby, jeśli ruch wirowy pierwszego koła jest jednostajny, ruch ztąd wynikający dla drugiego był także jednostajny, albo co to samo, żeby stosunek prędkości kątowych dwóch kół zostawał stateczny, jakikolwiek jest ruch jednego z tych kół.

Zazębiania odróżniają się między sobą położeniem dwóch geometrycznych osi około których odbywają się wirowania. Te osie mogą być równoległe albo zbiegające, a nawet mogą nie leżeć na jednej płasczyznie. Ztąd trzy następujące przypadki zazębiań :

Zazębianie którego osie są równoległe ma zęby walcowe, i nazywa się *zazębianiem walcowem.*

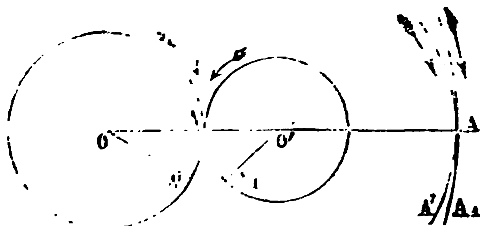
Zazębianie którego osie schodzą się w jednym punkcie ma zęby stożkowe, i nazywa się *zazębianiem stożkowem.*

Do trzeciego przypadku zazębiań, których osie nie są na jednej płasczyznie, należą szczególniej : *zazębianie hiperboloidowe* mające osie pochyłe, i *śruba bez końca* w której osie są prostokątne. Ten trzeci przypadek może się przywieśdź do dwóch pierwszych za pomocą osi posiłkowej, spotykającej dwie osie dane które nie leżą na jednej płasczyznie. Nie będziemy się nim zajmowali w szczególności, dlatego zwłaszcza że tylko ogólne wyobrażenie o zazębianiach w Mechanice rozumowej dać przystoi.

107. Niech będą O, O′ rzuty dwóch osi równoległych na płasczyznie prostopadłej do ich kierunku. Jeśli chcemy przekształcić ruch wirowy około osi O, odbywający się z prędkością kątową ω, na ruch wirowy wykonywający się około osi O′ z prędkością kątową ω', aby pojąć przekształcenie, możemy sobie wyobrazić dwa koła materyalne, mające punkta O, O′ za środki, których okręgi wywierają na siebie pewne parcie. Widzimy łatwo że koło O, doznając tarcia na kole O′, będzie je obracało około jego osi, i tym sposobem swój ruch mu przeszle.

Gdy punkt A, uważany jako należący do pierwszego okręgu O, weźmie położenie A_1, punkt drugiego okręgu, który się z nim schodził w położeniu A, przejdzie na położenie A′, i

łuki AA_1, AA' będą równe. Nadto, prędkości kątowe dwóch kół, mające za miarę kąty AOA_1, $AO'A'$ opisane w tym samym



czasie, wyrażają się przez

$$\omega = \frac{AA_1}{OA}, \qquad \omega' = \frac{AA'}{O'A},$$

i stosunek tych prędkości równa się

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA}{O'A}.$$

Więc *prędkości kątowe dwóch kół są w stosunku odwrotnym promieni.*

Ten stosunek jest stateczny; co dowodzi że ruch przesłany drugiemu kołu będzie jednostajny jeśli ruch pierwszego jest jednostajny. Można więc zawsze dać drugiemu kołu taką prędkość kątową jaka się podoba, nie zmieniając bynajmniej prędkości kątowej pierwszego koła; dość tylko wziąć promienie dwóch kół w stosunku odwrotnym ich prędkości kątowych, to jest podzielić odległość OO' danych osi tak żeby było

$$(1) \qquad \frac{OA}{O'A} = \frac{\omega'}{\omega} \quad \text{albo} \quad \omega . OA = \omega' . O'A.$$

Geometrya daje dwa punkta A, na linii środków OO', zadość czyniące temu równaniu; jeden z tych punktów A leży między dwoma środkami O, O', drugi znajduje się zewnątrz. Więc, jeśli z punktów O, O' jako środków promieniami OA, O'A

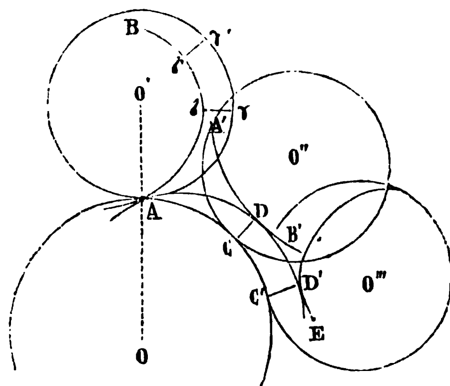
nakreślimy dwa okręgi, w przypadku punktu A wewnętrznego te okręgi będą styczne zewnętrznie, i ich wirowania będą się odbywały w strony przeciwne jako pokazuje figura; w przypadku punktu A zewnętrznego dwa okręgi będą styczne wewnętrzne, i ich wirowania będą się odbywały w tę samą stronę. Rzeczone okręgi, styczne zewnętrznie albo wewnętrznie, grają główną rolę w zazębianiach, i nazywają się *okręgami pierwotnemi* zazębiania. Według położenia tych okręgów stycznych, zazębiania są *zewnętrzne* albo *wewnętrzne*. Używa się jednych albo drugich stosownie do kierunku ruchu jaki wydać trzeba.

Jakiekolwiek są dwa okręgi pierwotne, styczne zewnętrznie albo wewnętrznie, zawsze łuk opisany w czasie dt przez punkt okręgu OA, w jego ruchu około osi O, równa się $\omega dt.\mathrm{OA}$; podobnie, łuk opisany w tym samym czasie przez punkt okręgu O'A, w jego ruchu około osi O', równa się $\omega' dt.\mathrm{O'A}$; więc te dwa łuki są równe na mocy równania (1). Ztąd wnosimy że, gdy dwa koła OA, O'A obracają się około swoich osi, z prędkościami kątowemi ω, ω' które zadość czynią warunkowi (1), łuki równe okręgów pierwotnych przechodzą w tym samym czasie przez linię środków; więc te okręgi toczą się jeden na drugim bez ślizgania (77). Ten sposób przekształcania ruchu przez tarcie jednego koła na drugiem jest używany w niektórych okolicznościach. Dla utrzymania dostatecznego tarcia, bez którego pierwsze koło ślizgałoby na drugiem nie obracając go, dzwona obydwóch kół są utworzone z materyi przylegającej, albo nawet okryte pasami rzemiennemi chropowatemi. Przylgnienie sprawia że niema ślizgania. Ale materya prędko się zużywa, i wkrótce koła przestają się stykać ściśle; przylgnienie maleje coraz bardziej, i nakoniec znika; aby je przywrócić trzeba zbliżać osie kół. To wszystko jest niedostateczne, gdy koło O' przeciwstawi kołu O opór przewyższający tarcie; wtedy jest tylko ślizganie koła O bez ruchu koła O'. Trzeba więc szukać sposobów skuteczniejszych do przesłania ruchu pierwszego koła drugiemu. W tym właśnie celu obsadzono

koła zębami. Zęby kół stanowiących zazębiania mają różne kształty, stosowne do ich przeznaczenia; zajmiemy się najpierwej zazębianiami walcowemi.

108. Zazębiania walcowe. Biorąc na powierzchnie zębów kół powierzchnie walcowe, których linie rodzące są równoległe do osi tych kół, aby mieć kształt zębów dość tylko wyznaczyć kształt podstaw powierzchni walcowych, to jest znaleźć profile zębów. Profil zębów jednego koła może być wzięty dowolnie, z niego się wyprowadza profil zębów drugiego koła; a ponieważ ruch ma przechodzić, za pośrednictwem zębów, od jednego koła do drugiego, trzeba i dość jest żeby okręgi pierwotne zazębiania toczyły się jeden na drugim. Zęby jednego koła powinny wchodzić bez zawady ani uderzenia w części wycięte w drugiem kole; więc, dla ciągłości ruchu dwóch kół zazębiających, muszą profile zębów w złączeniu być styczne między sobą tak żeby, gdy dwa zęby stykać się przestają, dwa następujące zaraz stykać się zaczynały.

Uważajmy zazębianie zewnętrzne, i niech będzie AB profil



koła O'. Jeśli damy kołom O, O' ruchy niezależne, z prędkościami ω, ω', profil odpowiedającego zębu koła O powinien

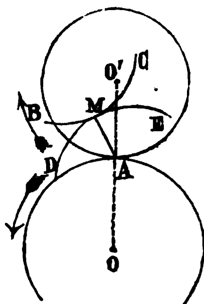
zostawać styczny do profilu AB, dopóki tylko długości dwóch zębów wystarczają do zetknięcia. Rzeczy będą się jeszcze miały tak samo, jeśli ogółowi dwóch kół nadamy ruch spólny wirowania, równy i przeciwny ruchowi koła O; w tym spólnym ruchu koło O zostanie w spoczynku, a koło O′ będzie miało ruch samoisty który będzie jego ruchem względnym odnoszącym się do koła O. Owoż, ruch względny koła O′ jest oczywiście toczeniem się okręgu pierwotnego O′A na okręgu OA, jak gdyby ten ostatni zostawał nieruchomy; więc profil ADE jaki dać trzeba zębowi koła O jest *owłoką* położeń po sobie idących krzywej AB, uniesionej ruchem okręgu O′A toczącego się na okręgu OA.

Dla wykreślenia owłoki ADE, uważajmy położenie O″ okręgu ruchomego O′A na okręgu OA, i niech będzie C punkt zetknięcia tych okręgów. Aby znaleźć odpowiedające położenie profilu AB, weźmy na okręgu O″, poczynając od punktu C, łuk CA′=CA; punkt A′ będzie położeniem punktu A, a zatem profil AB zajmie położenie A′B′. Jeśli teraz z punktu C, który jest środkiem chwilowym wirowania figury O″, spuścimy normalnę CD na A′B′, otrzymamy punkt D w którym krzywa AB, mająca położenie A′B′, dotyka swojej owłoki. Jakoż, w ruchu toczenia się figury O″ na okręgu OA, wszelki punkt D należący do krzywej A′B′ opisuje krążnę której normalną jest CD; a jeśli do tego jeszcze punkt D jest punktem zetknięcia krzywej A′B′ z owłoką ADE, wtedy kierunkiem ruchu punktu D, w nieskończenie małym czasie *dt*, jest styczna spólna tym dwom krzywym; ale kierunkiem ruchu tego samego punktu D jest także styczna do jego krążnej; ztąd wnosimy że w ruchu, o którym mowa, normalna w punkcie zetknięcia krzywej A′B′ z jej owłoką ADE, przechodzi przez środek chwilowy C wirowania figury O″. Ważna własność w teoryi zazębiań. Na mocy tej własności punkt D należy do owłoki ADE. Można więc tym sposobem otrzymać tyle punktów szukanego profilu ile się podoba.

Ale łatwo widzimy że niema potrzeby przemieszczać koła O′: dość tylko wziąć na jego okręgu łuki Aγ, Aγ′,... równe łukom AC, AC′,... i spuścić normalne γδ, γ′δ′,... na krzywę AB; te normalne będą równe normalnym CD, C′D′,...; poczem, trzeba poprowadzić przez punkta C, C′,... linie proste równe normalnym γδ, γ′δ′,... i czyniące z okręgiem OA kąty odpowiednio równe tym które te normalne czynią z okręgiem O′A; skrajności tak wykreślonych linij będą punktami D, D′... żądanego profilu ADE.

W praktyce, zamiast wyznaczać osobno punkta D, D′,... kreślą łuki kół promieniami γδ, γ′δ′,..., z punktów C, C′ jako środków, dostatecznie bliskich jeden drugiego, i potem prowadzą linię krzywą styczną do tych łuków, która będzie przybliżonym profilem ADE.

109. Wyprowadziwszy profil zębów koła O z dowolnie wziętego profilu dla zębów koła O′, uważajmy w położeniu jakiem-



kolwiek oba profile, dany BC i wykreślony DE, i niech będzie M ich punkt zetknięcia; na mocy tego cośmy wyżej powiedzieli, prosta AM jest spólną normalną tych profilów. Dopiero co widzieliśmy że ruch względny koła O′, odnoszący się do koła O, jest ruchem toczenia się okręgu pierwotnego O′A na

okręgu OA; ztąd wynika że ruch względny, nieskończenie mały, koła O′ jest nieskończenie małem wirowaniem około punktu zetknięcia A dwóch okręgów pierwotnych. W tem wirowaniu, przez czas nieskończenie mały *dt*, profil BC ślizga na profilu DE. Aby znaleźć wartość tego ślizgania, przypomnijmy sobie że, w ruchu toczenia się koła O′ na kole O, prędkość kątowa każdego punktu koła ruchomego *zewnętrznego* wyraża się przez (70)

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\frac{ds}{dt};$$

gdzie R, R′ znaczą promienie dwóch okręgów pierwotnych, a zaś *ds* drogę przebieżoną przez punkt zetknięcia w czasie *dt*. Jeśli więc nazwiemy *p* długość normalnej AM, łuk jaki punkt M przebiega na profilu DE przez czas *dt*, będzie równy ilości

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)pds,$$

która właśnie przedstawia nieskończenie małe ślizganie tego punktu.

Znaleziona wartość pokazuje że łuk ślizgania jest proporcyonalny do długości *p*; a ponieważ ten łuk ślizgania wchodzi jako czynnik do wyrażenia *pracy tarcia* (*), trzeba się starać żeby

(*) Oto wyrażenie nieskończenie małej pracy tarcia w zazębianiu zewnętrznem

$$Qf\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)pds,$$

w którem Q znaczy opór koła O′ a *f* spółczynnik tarcia. Zobaczymy to później.

w zazębianiach długość p była zawsze najmniejsza możebna. Co będzie miało miejsce, jeśli zetknięcie zębów przypada w punkcie A, bo wtedy $p = 0$ i nieskończenie małe ślizganie jest zero. Dlatego też daje się stosowną długość zębom, aby utrzymać p w pewnej granicy. Gdzie ząb się kończy tam zetknięcie dwóch profilów ustaje; ale ciągłość ruchu wymaga, jakośmy już powiedzieli, żeby zaraz w tej samej chwili dwa nowe profile dotykały się w punkcie A. Te dwa profile przemieniają się jednocześnie jako poprzednie; a gdy ich zetknięcie ustaje, zetknięcie znowu ma miejsce w punkcie A za pomocą dwóch następnych profilów; i tak dalej.

110. Pojmuje się łatwo że musi być pewna zależność między długością zębów i przedziałem dwóch po sobie idących profilów. Ten przedział nazwany *krokiem zazębiania*, mierzony na jednym z dwóch okręgów pierwotnych, składa się z grubości zębu koła O, z grubości zębu koła O′, i jeszcze z pewnej wielkości tem mniejszej im zazębianie doskonalsze, to jest bliższe geometrycznego kształtu.

Aby dwa koła zazębiały regularnie, trzeba żeby zęby były równe i równo rozstawione na obydwóch kołach, to jest żeby miały ten sam krok. Jeśli temu warunkowi staje się zadość, jakikolwiek jest kształt zębów, przesłanie ruchu od jednego koła do drugiego będzie okresowo jednostajne; ponieważ za każdym razem jak punkt zetknięcia przebiegnie, na okręgach pierwotnych, przestrzeń równą krokowi zazębiania, oba koła będą się znajdowały w tem samem położeniu względnem.

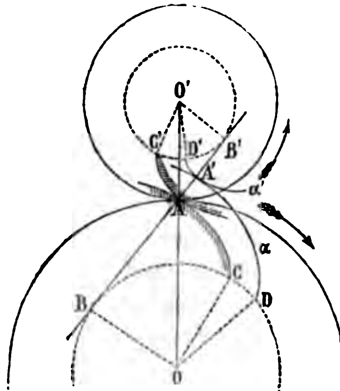
Gdy krok zazębiania jest przyzwoicie mały, można otrzymać z przybliżeniem wartość łuku ślizgania, od chwili w której zetknięcie dwóch profilów sprzężonych ma miejsce w punkcie A, aż do chwili w której przestaje. Przez ten czas dwa koła zrobiły jeden krok. Przypuszczając rzeczony krok dostatecznie mały, widzimy łatwo że normalna p mało się różni od łuku $AD = s$;

jeśli więc, zastępując p przez s, zcałkujemy nieskończenie mały łuk ślizgania w granicach 0 i S, nazywając S krok zazębiania, znajdziemy dla całego ślizgania następującą, przybliżoną wartość

$$\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)\int_0^S s ds=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)S.$$

111. Zazębiania z rozwijającemi koła. Powiedzieliśmy że zęby kół mogą mieć różne kształty; jako przykład wskażemy zazębianie w którem profilami zębów są rozwijające koła.

Niech będzie linia prosta BAB′ przechodząca przez punkt zetknięcia A dwóch kół OO′; poprowadźmy dwa koła OD, O′D′



styczne do tej linii i spółśrodkowe z danemi; promienie OB, O′B′ będą proporcyonalne do promieni OA, O′A. Wyobraźmy sobie teraz że prosta BA toczy się na kole OB; jej skrajność A opisze rozwijającę CA tego koła, mającą początek w punkcie C dla którego łuk BC = BA. To pokazuje że okrąg OB jest rozwitą krzywej CA; więc prosta BA, styczna do łuku BC, jest normalną do rozwitej CA w punkcie A. Tak samo, jeśli

prosta B'A toczy się na okręgu O'B', jej skrajność A opisuje rozwijającę C'A tego okręgu, który nawzajem jest rozwitą krzywej C'A; więc prosta B'A jest normalną do rozwijającej C'A w punkcie A. Ztąd wynika że prosta BB' jest normalną w punkcie A do obydwóch rozwijających CA, C'A; więc te rozwijające są styczne do siebie w punkcie A.

Przypuszczając rozwijające CA, CA' przymocowane do odpowiedających kół O, O', jeśli obrócimy te koła tak żeby punkta C, C' opisały łuki równe CD, C'D', obie rozwijające zostaną przeniesione na położenia $D\alpha$, $D'\alpha'$ w których będą się stykały w punkcie A' leżącym na prostej stałej BAB'. Jakoż, weźmy długość AA' = łuk.CD; punkt A będzie na nowem położeniu $D\alpha$ rozwijającej CA; ale także długość AA' jest równa łukowi C'D'; więc punkt A' jest na położeniu $D'\alpha'$ drugiej rozwijającej C'A. Te dwie nowe rozwijające $D\alpha$, $D\alpha'$, które przechodzą przez punkt A', są styczne w tym punkcie bo mają spólną normalnę BAB'. Owoż, kąty COD, C'O'D' mające za miarę stosunki $\frac{CD}{OB}$, $\frac{C'D'}{O'B'}$ są odwrotnie proporcyonalne do promieni OB, O'B' i temsamem do promieni OA, O'A; więc, jeśli będziemy obracali koło O w stronę wskazaną przez strzałę, rozwijająca CA będzie pchała rozwijającę C'A, do której jest ciągle styczną w punktach leżących na prostej stałej BAB', i wirowania ω, ω' kół O, O' będą w stosunku odwrotnym promieni. To dowodzi że zęby dwóch kół OA, O'A mogą mieć za profile linie CA, C'A, rozwijające okręgów kół OB, O'B'.

Zazębianie nazywa się *wzajemnem* gdy koło które prowadzi drugie może nawzajem być przez nie prowadzone. Zazębianie z rozwijającemi kół jest najdoskonalszym układem zazębiań, i przedstawia następujące korzyści : 1° to zazębianie jest wzajemne i każdy jego ząb jest utworzony z jednej tylko krzywej; 2° jedno koło może zazębiać z innem kołem jakiegokolwiek promienia, byle tylko, ma się rozumieć, kroki zazębiań były te same w obydwóch; 3° odległość środków kół może się zmieniać

bez naruszania regularności zazębiania; 4° wzajemne parcie dwóch kół na siebie ma kierunek stały, wedle spólnej normalnej BAB′; zatem zużycie profilów przez ślizganie jest prawie proporcyonalne do tarcia, i nie zmienia znacznie geometrycznych warunków zazębiania. Jedyny zarzut jaki można nczynić temu zazębianiu leży w tem, że działanie zębów na siebie, skierowane wedle spólnej normalnej, jest-pochyłe do linii środków kół; co stanowi dynamiczną niedogodność.

112. Nazywając S krok zazębiania, oznaczmy przez m liczbę zębów koła O i przez m' liczbę zębów koła O′, otrzymamy następujące związki

$$(2)\qquad \begin{aligned} mS &= 2\pi R \\ m'S &= 2\pi R'; \end{aligned}$$

zkąd

$$m = \frac{2\pi R}{S}, \quad m' = \frac{2\pi R'}{S}.$$

Te wartości pokazują że krok S jest częścią podwielowną każdego z dwóch okręgów pierwotnych, albo jeszcze że krok S jest spólną miarą tych okręgów.

Równania (2) dają

$$\frac{R}{R'} = \frac{m}{m'};$$

owoż, prędkości kątowe ω, ω' dwóch kół zazębiających są w stosunku odwrotnym ich promieni; mamy zatem proporcyę

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{m}{m'}$$

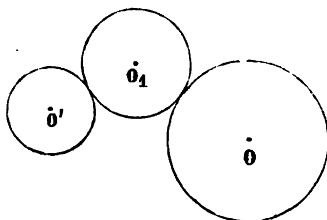
która dowodzi, że *prędkości kątowe dwóch kół zazębiających są odwrotnie proporcyonalne do liczb zębów tych kół.*

Więc użycie kół zębatych wymaga żeby ich prędkości kątowe były spółmierne między sobą. Aby można urządzić zazębianie w stosunku danym, trzeba niezbędnie żeby ten stosunek był wyrażony przez iloraz $\frac{m}{m'}$ dwóch liczb całkowitych, i trzeba nawet, jako niebawem zobaczymy, żeby te liczby nie były ani za małe ani za wielkie, mniej więcej od 8 do 120. Jeśli liczby *m* i *m'* są pierwsze między sobą, każdy ząb jednego z kół przychodzi następnie do zetknięcia z wszystkiemi zębami drugiego koła. To rozstawienie zębów jest pożądane w praktyce, bo czyni równem ich zużycie. Zegarmistrze, przeciwnie, wyszukują dwóch liczb *m, m'* mających spólne czynniki, dlatego żeby wyznaczony ząb jednego koła przychodził zawsze do zetknięcia z temi samemi zębami drugiego koła; przez co zapewnia się większą regularność zazębiania.

Nazywa się *stosunkiem zazębiania* iloraz $\frac{\omega'}{\omega}$ z prędkości kątowej drugiego koła przez prędkość kątową pierwszego; ten iloraz bierze się ze znakiem $+$ albo $-$, według jak wirowania odbywają się oba w jedną stronę albo w strony przeciwne.

113. Zazębiania walcowe wewnętrzne. Zazębiania wewnętrzne opierają się na tych samych zasadach co zazębiania zewnętrzne; a że wykreślenia obydwóch zazębiań do teoryi machin należą, przestajemy więc na kilku ogólnych uwagach. Zazębiania wewnętrzne nie są tak dogodne jak zewnętrzne, i nie będąc wzajemne, mniej są używane. Ale w zazębianiu wewnętrznem oba koła obracają się w jedną stronę; co niekiedy stanowi niezbędny warunek ruchu. Można jednak zachować ten ruch a uniknąć zazębiania wewnętrznego, wprowadzając tak zwane *koło luźne*. Jakoż, niech będą O, O' rzuty dwóch osi około któ-

rych mają się obracać, oba w jedną stronę, dwa koła O, O′ promieni R, R′. Weźmy trzecie koło O_1 zazębiające z dwoma



danemi, mające oś O_1 i promień R_1. Jeśli nazwiemy $\omega, \omega', \omega_1$ prędkości kątowe odpowiedające tym trzem kołom, będziemy mieli

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{R}{R_1}, \quad \frac{\omega'}{\omega_1} = -\frac{R_1}{R'};$$

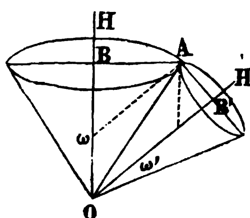
zkąd

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'}.$$

Ten wynik pokazuje że stosunek prędkości kątowych dwóch kół danych jest niezależny od promienia, prędkości kątowej, i liczby zębów koła pośredniego; jedynym skutkiem tego koła luźnego jest zmiana strony przeprowadzonego ruchu; przez co zachowuje się właśnie dany kierunek dwóch wirowań, ale kosztem powiększonego tarcia.

114. Zazębiania stożkowe. Przedmiotem zazębiań stożkowych jest przekształcenie ruchu wirowego który się odbywa około linii prostej stałej, na inny ruch wirowy około innej linii prostej która spotyka pierwszą pod kątem jakimkolwiek. Te zazębiania dlatego się nazywają stożkowemi że zęby kół zazębiających są zbudowane na dwóch stożkach obrotowych, mających za osie

dwie rzeczone linie proste a za spólny wierzchołek ich punkt spotkania. Rozumując jako w zazębianiach walcowych, wyznacza się zęby stożkowe sposobami podobnemi teorycznie chociaż różnemi w praktyce.



Niech będą OH, OH′ dwie osie, spotykające się w punkcie O, około których mają się odbywać dwa wirowania, jedno około OH z prędkością kątową ω, drugie około OH′ z prędkością kątową ω'. Weźmy na płasczyznie HOH′ punkt A taki, żeby jego odległości AB, AB′ od odpowiedających osi OH, OH′ były w stosunku odwrotnym prędkości kątowych ω, ω', to jest żeby zadość czyniły warunkowi

$$(4) \qquad \frac{AB}{AB'} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

To równanie określa przekątnę równoległoboku zbudowanego na kącie HOH′ z dwoma bokami proporcyonalnemi do prędkości kątowych ω, ω'. Wyobraźmy sobie teraz że prosta OA, obracając się około OH, utworzyła stożek obrotowy mający oś OH, a potem, obracając się około OH′, utworzyła drugi stożek obrotowy mający oś OH′. Te dwa stożki są styczne zewnętrznie wzdłuż całej linii rodzącej OA; jeśli więc damy im, około osi OH i OH′, ruchy wirowe z odpowiedającemi prędkościami kątowemi ω, ω' w strony przeciwne, to one nie będą miały ślizgania jeden na drugim, ponieważ, na mocy równania (4), prędkości kątowe wszystkich punktów w zetknięciu są

równe i skierowane w tę samą stronę w przejściu przez płasczyznę HOH'. Tak utworzone dwa stożki nazywają się *stożkami pierwotnemi*. Za pomocą nich można przekształcić wirowanie ω około OH na wirowanie ω' około OH', przez proste przylgnienie powierzchni stożkowych między sobą, tak jak się przekształca wirowania około osi równoległych (107), przez przylgnienie dwóch powierzchni walcowych między sobą.

Zamiast nietrwałego przylgnienia, daje się dwom kołom osadzonym na osiach OH, OH', zbiegających się w punkcie O, zęby stożkowe, to jest zęby których powierzchnie są stożkowe i mają punkt O za spólny wierzchołek. Wyznaczenie i budowa zębów stożkowych przedstawia wielką trudność w zastosowaniu teoryi do praktyki, którą tylko przybliżonem wykreśleniem przezwyciężyć potrafiono; ale szczęściem to przybliżenie jest dostateczne. Jednakże teoryę znać trzeba. Przypuśćmy tedy że jest wiadoma powierzchnia stożkowa zębów jednego koła. Aby z niej wywieśdź powierzchnię zębów drugiego koła które ma stanowić zazębianie stożkowe z pierwszem, opiszmy sferę z punktu O jako środka promieniem dowolnym OA; ta sfera przetnie dwa stożki pierwotne wedle okręgów kół BA, B'A. To uczyniwszy, na powierzchni sferycznej, zaczynając od punktu A, nakreślmy linię krzywą, przedstawiającą profil wiadomej części wyciętej koła B'A, na przykład, w którą będzie wchodził ząb koła BA; i potem szukajmy owłoki położeń po sobie idących tej krzywej sferycznej w ruchu względnym koła B'A odnoszącym się do koła BA. W tym ruchu, który jest toczeniem się pierwszego koła na drugiem, każdy punkt profilu ruchomego opisuje krzywę epicykloidalną sferyczną; znajdzie się więc owłokę położeń profilu na sferze tak jak się znajduje na płasczyznie owłokę profilu zębów walcowych, zastępując tylko linie proste przez łuki kół wielkich. Owłoka sferyczna będzie kierownicą dwóch powierzchni stożkowych mających punkt O za spólny wierzchołek; jedna z tych powierzchni jest właśnie szukaną powierzchnią zębu koła BA, druga jest odpowiedającą

powierzchnią części wyciętej koła B'A. W każdej chwili, jako łatwo widzieć, obie powierzchnie stożkowe są styczne wzdłuż linii rodzącej, i płasczyzna poprowadzona przez tę linię, normalnie do rzeczonych powierzchni w złączeniu, przechodzi przez linię zetknięć OA dwóch stożków pierwotnych.

To ścisłe rozwiązanie zagadnienia zazębiań stożkowych, zupełnie podobne do tego któreśmy dali w zazębianiach walcowych, nie jest używane w praktyce, z przyczyny trudności utworzenia sfery materyalnej, na którejby można kreślić profile zębów; a powierzchnia sferyczna nie jest rozwijalna, i wykreślenia sferyczne płaskiemi się zastąpić nie pozwalają. Ale są, jakośmy wyżej nadmienili, praktyczne sposoby otrzymania zębów stożkowych, z przybliżeniem przyzwoitem i do wykonania łatwem, które dają zupełną rękojmię możebnej materyalnej dokładności.

115. Możemy jeszcze wyznaczyć nieskończenie małe ślizganie zębów stożkowych, w punkcie M wziętym na ich linii zetknięć. Rozumując jako w zazębianiach walcowych, aby znaleźć ruch względny koła B'A odnoszący się do koła BA, dajemy ogółowi dwóch kół ruch spólny, równy i przeciwny wirowaniu koła BA; tym sposobem koło BA zostaje przywiedzione do spoczynku, a koło B'A ma zarazem prędkość kątową ω około osi OH i prędkość kątową ω' około osi OH', obie prędkości skierowane w tę samą stronę. Owoż, te dwa nieskończenie małe wirowania jednoczesne składają się w jedno wynikowe około osi OA, którego prędkość kątowa Ω, przedstawiona przez przekątnę OA (91), jeśli dla skrócenia uczynimy kąt AOB $=\alpha$ i kąt AOB' $=\alpha$, wyrazi się przez

$$\Omega = \omega \operatorname{dos} \alpha + \omega' \operatorname{dos} \alpha';$$

więc kąt opisany przez koło B'A, w jego ruchu względnym około osi OA przez czas dt, równa się

$$\Omega dt = (\omega \operatorname{dos} \alpha + \omega' \operatorname{dos} \alpha')dt.$$

Nazwijmy teraz p odległość punktu M od osi OA wirowania chwilowego; ślizganie tego punktu będzie

$$\Omega p dt = (\omega \operatorname{dos} \alpha + \omega' \operatorname{dos} \alpha') p dt.$$

Nakoniec, jeśli oznaczymy przez ds łuk nieskończenie mały jakim każdy z okręgów BA, B'A przechodzi płasczyznę HOH' w czasie nieskończenie małym dt, i przez R, R' promienie tych okręgów; będziemy mieli

$$\omega dt = \frac{ds}{R}, \qquad \omega' dt = \frac{ds}{R'}.$$

Więc ostatecznie wartość nieskończenie małego ślizgania punktu M w zazębianiu stożkowem, przez czas dt, równa się ilości

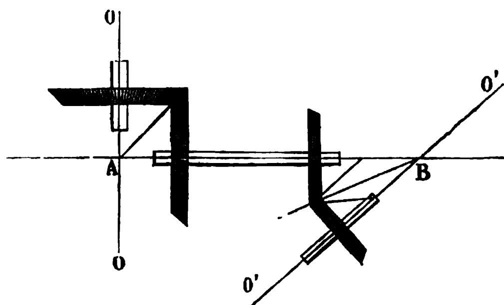
$$\left(\frac{\operatorname{dos} \alpha}{R} + \frac{\operatorname{dos} \alpha'}{R'}\right) p ds.$$

Wartość nieskończenie małego ślizgania punktu w zazębianiu walcowem, którąśmy na swojem miejscu podali, jest szczególnym przypadkiem powyższej; dość tylko uczynić $\alpha = 0$ i $\alpha' = 0$ w ostatniem wyrażeniu.

PRZEPROWADZENIE RUCHU WIROWEGO MIĘDZY DWIEMA OSIAMI NIELEŻĄCEMI NA JEDNEJ PŁASCZYZNIE.

116. Kiedy trzeba przekształcić ruch wirowy około danej osi na ruch wirowy około innej osi, która nie leży na jednej płasczyznie z pierwszą, można wykonać to przekształcenie za pomocą ruchu posiłkowego około linii prostej spotykającej dwie dane osie.

Niech będzie ruch wirowy ω około osi OO, który chcemy



przekształcić na ruch wirowy ω' około osi O'O' nie leżącej na jednej płasczyznie z osią OO. Przetnijmy te dwie osie linią prostą AB, około której zaprowadzimy ruch wirowy posiłkowy z prędkością kątową ω_1. Możemy najpierwej przekształcić wirowanie ω na wirowanie ω_1, za pomocą zazębiania stożkowego mającego wierzchołek w A; a potem przekształcić wirowanie ω_1 na wirowanie ω', za pomocą drugiego zazębiania stożkowego mającego wierzchołek w B. Jeśli oznaczymy przez m, m' liczby zębów dwóch kół osadzonych na osiach OO, O'O', i przez μ, μ' liczby zębów dwóch kół osadzonych na osi posiłkowej AB, będziemy mieli

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{m}{\mu}, \quad \frac{\omega'}{\omega_1} = -\frac{\mu'}{m'};$$

ztąd wynika waruuek

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{m\mu'}{\mu m'},$$

któremu podwójne zazębianie stożkowe zadość czynić powinno. Ale na tem niedosyć; dla możebności żądanego przekształcenia trzeba jeszcze znaleźć liczby całkowite m, m', μ, μ' przy-

zwoicie dobrane, któreby sprawdzały powyższe równanie. Ten sposób przeprowadzania ruchu, za pośrednictwem zazębiań posiłkowych, przedstawia niedogodność w praktyce, bo podwaja tarcia.

POCIĄGI KÓŁ ZĘBATYCH.

117. Nazywa się *cewą* albo *trybami* mniejsze z dwóch kół zazębiających. Koło które przesyła ruch drugiemu w zazębianiu jest *kołem wiodącem*, a to które ruch odbiera *kołem wiedzionem*. W ogóle koła zębate mają przynajmniej 6 albo lepiej 8 zębów, a rzadko więcej nad 120; zatem stosunek prędkości kątowych dwóch kół stanowiących zazębianie jest praktycznie ograniczony.

Dla uniknienia wielkiej liczby zębów któreby trzeba dawać kołu wiodącemu, aby otrzymać żądaną prędkość kątową koła wiedzionego, używa się szeregu kół zębatych który nazywają *pociągiem albo ekwipażem tych kół*. Pociąg kół zębatych jest ciągiem kół zazębiających, osadzonych na osiach równoległych stałych, w którym osie skrajne mają po jednem kole, a każda oś pośrednia ma ich dwa. Prędkości kątowe kół skrajnych są dane z wielkości i kierunku, a prędkości kątowe kół pośrednich dobierają się wedle potrzeby i okoliczności zagadnienia. Przykład najlepiej to wyjaśni.



Niech będzie do przekształcenia wirowanie jednostajne ω około osi a, na wirowanie jednostajne ω' około osi C równoległej do pierwszej. Uskutecznia się tę przemianę ruchu następującym sposobem:

Pierwsze koło a zazębia z kołem A; na osi drugiego jest osadzone koło b, które zazębia z kołem B; na osi tego ostatniego jest znowu osadzone koło c, które zazębia z kołem C'; i tak dalej. Przypuszczając że koła a i C są skrajnemi pociągu, nazwijmy ω i ω' ich prędkości kątowe, a zaś ω_1, ω_2,... prędkości kątowe kół pośrednich. Jeśli, dla skrócenia, wyrazimy liczbę zębów każdego koła literą przez którą je mianujemy, w założeniu że wszystkie zazębiania są zewnętrzne, otrzymamy ciąg równości:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{a}{A}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = -\frac{b}{B}, \quad \frac{\omega'}{\omega_2} = -\frac{c}{C};$$

zkąd

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{abc}{ABC}.$$

Stosunek $\frac{\omega'}{\omega}$, prędkości kątowej ostatniego koła do prędkości kątowej pierwszego, nazywa się *stosunkiem pociągu kół zębatych*. Ten stosunek, który oznaczymy przez ϵ, powinien być brany ze znakiem $+$ albo $-$, według jak wirowania skrajne ω, ω' odbywają się oba w jedną stronę albo w strony przeciwne. Mamy więc formułę

$$\epsilon = \pm \frac{abc}{ABC},$$

która pokazuje że stosunek pociągu kół zębatych, wzięty ze znakiem przyzwoitym, jest równy wieloczynowi liczb zębów kół *wiodących* podzielonemu przez wieloczyn liczb zębów kół *wiedzionych*.

118. WYRACHOWANIE ZĘBÓW KÓŁ POCIĄGU. Mając stosunek ϵ,

aby wyznaczyć liczbę zębów jaką każde koło pociągu mieć może, trzeba najpierwej znaleźć dwie liczby całkowite, którychby iloraz wyrażał ϵ dokładnie, albo z przybliżeniem jakiego dane zagadnienie ruchu wymaga; a potem rozłożyć obie liczby na tę samą liczbę czynników; te zaś czynniki, aby były przydatne, to jest aby mogły oznaczyć liczby zębów kół, nie powinny być mniejsze od 8 ani większe od 120. Gdy stosunek ϵ jest wyrażony wielkiemi liczbami, rozwija się go na ułamek ciągły, a z pomiędzy wartości przybliżonych ułamka bierze się tę która się bardzo mało różni od prawdziwej i rozkłada się na czynniki przyzwoitej wielkości.

Ułamki ciągłe, odkryte przez HUYGENSA (*Huyghens*), stanowią jedną z ważnych metod matematyki. Ta metoda dlatego jest wielce użyteczna do wyrachowania zębów kół, że daje wartość stosunku ϵ przez ułamek wyrażony najmniejszemi możebnemi liczbami, i bardziej przybliżony do prawdziwego niż żaden inny mający wyrazy mniejsze. Ale nie zawsze tak wyznaczone liczby służyć mogą. Czasem, wiedząc że wartość ϵ mieści się między $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, można wziąć $\frac{a+c}{b+d}$ za ϵ. Gdy dwa ułamki $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ zadość czynią warunkowi

$$\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd},$$

od którego jedynie zależy fundamentalna własność przybliżonych wartości ułamków ciągłych, wtedy wszelki ułamek zawarty między $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ ma wyrazy większe; w tym przypadku łatwo widzieć że ułamek $\frac{a+c}{b+d}$ posiada względem każdego z dwóch danych własność wyrażoną równaniem powyższem; więc ten ułamek jest najprostszy z ułamków pośrednich.

Weźmy przykład. Dajmy na to że trzeba urządzić pociąg kół

zębatych którego stosunek jest wyrażony przez

$$\iota = \frac{823}{407}.$$

Probujemy najpierwej rozkładu na czynniki, ale znajdujemy że 823 jest liczbą pierwszą. Szukamy więc wartości przybliżonej i najprostszej możebnej ułamka $\frac{823}{407}$, rozwijając go na ułamek ciągły

$$\frac{823}{407} = 2 + \cfrac{1}{45 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Wartości przybliżone tego ułamka są

$$\frac{2}{1}, \quad \frac{91}{45}, \quad \frac{366}{181}, \quad \frac{823}{407}.$$

Widzimy zaraz że nie można brać wartości $\frac{366}{181}$ za stosunek pociągu, bo 181 jest liczbą pierwszą większą od 120. Probujemy ułamka pośredniego między $\frac{91}{45}$ i $\frac{366}{181}$; dodając wyrazami te dwa ułamki, otrzymujemy

$$\frac{91 + 366}{45 + 181} = \frac{457}{226};$$

ułamek nieprzydatny, bo 457 jest liczbą pierwszą.

Zostaje nakoniec ułamek $\frac{91}{45}$, który bierzemy za przybliżoną wartość stosunku pociągu. Ten pociąg daje się uskutecznić jako następuje :

1° Przez zazębianie pojedyncze; koło mające 91 zębów może zazębiać z kołem o 45 zębach.

2° Przez pociąg dwóch obracających się wałów z kołami zębatemi; albowiem

$$91 = 7.13$$

$$45 = 9.\ 5.$$

Ale, ponieważ liczby 7 i 5 są mniejsze od granicy niższej 8, mnożymy je przez 2, czem nie nadwerężamy stosunku ε. Tym sposobem mamy pociąg którego stosunek wyraża się przez

$$\varepsilon = \frac{14}{9} \cdot \frac{13}{10},$$

i w którym liczby zębów kół są:

$$a = 14, \quad A = 9,$$

$$b = 13 \quad B = 10.$$

Ułamek $\frac{91}{45}$ różni się od prawdziwej wartości stosunku ε ilością mniejszą niż

$$\frac{1}{45.181} = \frac{1}{8145}.$$

Błąd byłby większy, gdyby zmieniono jednością wyrazy ułamków poprzednio probowanych, aby je uczynić rozkładalnemi na czynniki (Zob. CINÉMATIQUE p. EDOUARD COLLIGNON, *Paris*, 1873).

Na drugi przyklad weźmiemy ZAGADNIENIE. *Zbudować zegar dający zarazem czas gwiazdowy i czas średni.*

Można otrzymać taki zegar, umieszczając z tyłu wskazówki

godzin cyferblat ruchomy, mniejszy od zwyczajnego i z nim spółśrodkowy. Wskazówka godzin, wykonywając całkowity obrót w 24 godzinach słonecznych, pokazuje czas średni na cyferblacie stałym; ta sama wskazówka pokaże zarazem godzinę gwiazdową na cyferblacie ruchomym, jeśli dano temu cyferblatowi ruch wsteczny o $3^m56^s,555 = 236^s,555$ przez dzień średni. Owoż, 24 godzin zawierają 86400 sekund; więc stosunek prędkości wskazówki do prędkości cyferblatu ruchomego jest

$$\frac{86400000}{236555} = 60.\frac{288000}{47311}.$$

Ułamek $\frac{288000}{47311}$ daje następujący ułamek ciągły

$$\frac{288000}{47311} = 6 + \cfrac{1}{11 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}$$

którego wartości przybliżone są

$$\frac{6}{1}, \quad \frac{67}{11}, \quad \frac{140}{23}, \quad \frac{487}{80}, \quad \frac{627}{103}, \ldots$$

Biorąc ułamek $\frac{627}{103}$, mamy

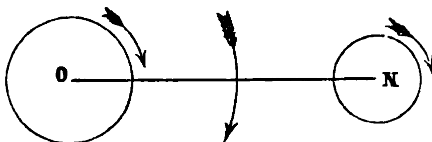
$$\frac{627}{103} = \frac{3.11.19}{103} = \frac{66}{103}.\frac{76}{8};$$

rozwiązanie z wielkiem przybliżeniem (Zob. Cours de Mécanique et des machines, p. Edm. Bour. *Paris*, 1865).

POCIĄGI EPICYKLOIDALNE.

119. Gdy ścisła dokladność jest niezbędnym warunkiem rozwiązania zagadnienia, wtedy pociągi kół zębatych, obracających się na osiach stałych, nie dają dostatecznego przybliżenia, i trzeba wprowadzać do pociągu jedno albo kilka kół z ruchem epicykloidalnym. O tem połączeniu kół, aby tylko dać wyobrażenie, kilka słów powiemy.

Nazywa się pociągiem epicykloidalnym układ kół zębatych w którym jedno koło jest osadzone na osi stałej O, a wszystkie inne mają osie przytwierdzone do ramy albo do dźwigni ON



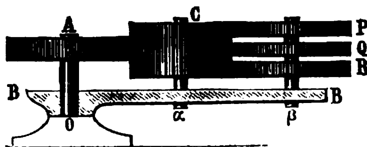
ruchomej około osi O. Jeśli, podczas gdy się obraca koło O, dano dźwigni ON ruch wirowy około osi O, istotny ruch wszystkich kół dźwigni będzie ruchem składanym, wynikającym ze związków tych kół z kołem O i z ruchu dźwigni. Dla uproszczenia, przypuśćmy że pociąg ma tylko dwa koła, jedno O stałe, drugie ruchome którego oś N jest osadzona na dźwigni w punkcie N; ale oś N mogłaby nie być różna od osi O. Oznaczmy przez ω, ω' prędkości kątowe dwóch kół skrajnych O, N. Prędkość kątowa ω' koła ruchomego N powinna być odnoszona do dwóch osi spółrzędnych Nx, Ny, mających kierunek stateczny i poprowadzonych na płaszczyznie koła N przez jego środek. Aby łatwo znaleźć stosunek ε pociągu epicykloidalnego, dajmy całemu układowi ruch wirowy około osi O, z prędkością kątową równą i przeciwną prędkości u dźwigni ON. Tym sposobem

dźwignia zostanie przywiedziona do spoczynku, a prędkość kątowa koła O względem dźwigni będzie $\omega - u$ (103, *zag.*), i prędkość kątowa koła N względem tejże dźwigni będzie także $\omega' - u$. Więc, na mocy samego określenia ilości ε, będziemy mieli

$$\varepsilon = \frac{\omega' - u}{\omega - u}.$$

Ta prosta formuła, podana przez R. Willis'a, zawiera całą teoryę pociągów epicykloidalnych. Przestaniemy na jednem jej zastosowaniu którem zakończymy cynematykę.

120. Paradoks Fergusson'a. Następujący mechanizm przedstawia ciekawą osobliwość która wyświeca własności kół pociągów epicykloidalnych.



Pierwsze koło A tego pociągu jest nieruchome, przymocowane do osi stałej AO; około tej osi obraca się rama albo dźwignia pozioma BB, na której są osadzone dwie osie α i β równoległe do osi OA; około osi α obraca się koło pośrednie C, zazębiające z jednej strony z kołem stałem A a z drugiej z trzema kołami niezależnemi P, Q, R, które się obracają na jednej osi β.

Koło stałe A ma n zębów; z trzech kół niezależnych pierwsze P ma $n + 1$ zębów, drugie Q ma ich n, trzecie R ma $n - 1$. Co do koła pośredniego C, liczba jego zębów jest obo-

jętna. Zachodzi tezaz pytanie : gdy dźwignia BB′ obraca się około osi AO z prędkością kątową u, jakie są prędkości kątowe ω_1, ω_2, ω_3 trzech kół P, Q, R?

Każde z trzech kół niezależnych P, Q, R powinno być uważane jako ostatnie koło pociągu szczególnego; co daje trzy pociągi epicykloidalne (A, P), (A, Q), (A, R). Owoż, formuła Willis'a jest ogólna; ale, żeby się stosowała do tych pociągów, trzeba w niej uczynić $\omega = 0$; mamy więc do wyrachowania prędkości kątowych ω_1, ω_2, ω_3 formułę szczególną

$$\omega' = u(1 - \varepsilon).$$

Stosując ostatnią formułę do każdego z trzech wymienionych pociągów, otrzymujemy :

Dla pierwszego pociągu (A, P) $\varepsilon = \frac{n}{n+1}$ (117), zatem

$$\omega_1 = u\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{u}{n+1}, \quad \text{wartość dodatna;}$$

dla drugiego (A, Q)

$$\omega_2 = u\left(1 - \frac{n}{n}\right) = 0;$$

dla trzeciego (A, R)

$$\omega_3 = u\left(1 - \frac{n}{n-1}\right) = -\frac{u}{n-1}, \quad \text{wartość odjemna.}$$

Znalezione prędkości pokazują że koło P obraca się w tę samą stronę co dźwignia BB. Koło Q zostaje nieruchome, a koło R obraca się w stronę przeciwną obrotu dźwigni. Ten

wynik jest na pozór paradoksalny, bo się zdaje że trzy koła P, Q, R, mające to samo położenie i prawie tę samą liczbę zębów, powinnyby się obracać jednakowo.

Pociągi epicykloidalne grają ważną rolę w mechanizmach wymagających wielkiej dokładności. Nie mogąc wchodzić w żadne szczegóły zastosowań, bo one nie są przedmiotem niniejszego dzieła, kończymy cynematykę z przekonaniem żeśmy ją wyłożyli daleko obszerniej niż tego mechanika rozumowa potrzebuje.

DYNAMIKA

RUCH UKŁADÓW MATERYALNYCH.

ROZDZIAŁ PIERWSZY

TWIERDZENIA ZASADNICZE DYNAMIKI OGÓLNEJ.

ZASADA D'ALEMBERTA.

121. Niech będzie jakikolwiek układ materyalny w ruchu, złożony z punktów połączonych wedle ustawy jakiejkolwiek. Pojmuje się łatwo że siły przyłożone do punktów materyalnych, powiązanych między sobą, nie dają im tego samego ruchu jak gdyby one były wolne i poruszały się osobno. Nazwano też *siłą bezwładności* punktu materyalnego siłę równą i przeciwną tej którаby mu nadawała, gdyby był wolny, ruch taki jaki ma istotnie w układzie. Siła przyłożona do jednego z punktów materyalnych, związanych w układ, rozwija w każdym z nich siłę bezwładności która jest poprostu oddziaływaniem tych punktów. Owoż, jeśli nazwiemy m massę punktu materyalnego, którego spółrzędne są x, y, z, siła nadająca istotny ruch temu punktowi będzie miała składowe, równoległe do trzech osi spółrzędnych, wyrażone przez

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2};$$

albo jeszcze jej składowemi będą

siła styczenna $m\dfrac{dv}{dt}$, i siła dośrodkowa $\dfrac{mv^2}{\rho}$;

zatem składowe siły bezwładności punktu m są:

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

albo jeszcze

siła bezwładności styczennna $-m\frac{dv}{dt}$, i siła odśrodkowa $\frac{mv^2}{\rho}$.

Gdyby więc można było oszacować siły pochodzące ze związków między punktami materyalnemi układu, przydając te siły wewnętrzne, odpowiedające każdemu punktowi, do sił zewnętrznych które są do niego wprost przyłożone, możnaby uważać wszystkie punkta stanowiące układ materyalny jako osobne wolne, i, stosując do nich wiadome równania ruchu punktu, mieć temsąmem równania ruchu całego układu.

Chociaż siły wewnętrzne nie są wiadome, ten sposób rozbierania rzeczy prowadzi do ważnego twierdzenia, znanego pód nazwiskiem *zasada d'Alemberta*, które daje odrazu równania ruchu układu materyalnego jakiegokolwiek. Jakoż, oznaczmy przez X, Y, Z składowe wynikowej sił zewnętrznych, wprost przyłożonych do punktu m, a przez X_1, Y_1, Z_1 składowe wynikowej sił wewnętrznych, które pochodzą ze związków łączących ten punkt z innemi punktami układu i wyrażają ich oddziaływania. Przykładając te wszystkie siły do punktu m, możemy go uważać jako wolny, i mieć tym sposobem następujące równania jego ruchu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1,$$

albo

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2} + X_1 = 0$$

(1) $$Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + Y_1 = 0$$

$$Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + Z_1 = 0.$$

Równania (1) wyrażają że jest równowaga między siłami poruszającemi (X, Y, Z) wprost przyłożonemi do punktu m, jego siłą bezwładności $\left(- m\frac{d^2x}{dt^2},\ - m\frac{d^2y}{dt^2},\ - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)$ jak gdyby do niego była przyłożona, i oddziaływaniami (X_1, Y_1, Z_1) jakich doznaje od wszystkich innych punktów materyalnych, z przyczyny związków układu.

To co poprzedza stosuje się do wszystkich punktów m, m', m'',... układu materyalnego.

Więc ,w ruchu jakiegokolwiek układu materyalnego punktów powiązanych między sobą, i podległych siłom jakimkolwiek, siły zewnętrzne poruszające czynią równowagę, za pomocą sił wewnętrznych wynikających ze związków, siłom równym i przeciwnym tym któreby nadawały każdemu punktowi materyalnemu, gdyby był wolny, ruch jaki ma w układzie.

Albo innemi słowy : *gdy układ punktów materyalnych poddanych związkom jakimkolwiek, porusza się pod działaniem sił jakichkolwiek, jest w każdej chwili równowaga, za pomocą tych związków, między siłami przyłożonemi i siłami bezwładności wszystkich punktów.*

Na tem polega sławna zasada podana przez D'ALEMBERTA. Na mocy tej zasady wszystkie kwestye ruchu przywodzą się do kwestyj równowagi, Dynamika do Statyki.

Gdy układ materyalny, którego ruch wyznaczyć chcemy, jest prostym tylko zbiorem punktów osobnych, mogących się poruszać sposobem jakimkolwiek jedne względem drugich pod działaniem sił wprost przyłożonych, wtedy użycie zasady d'Alemberta do znalezienia równań ruchu nie przedstawia istotnej korzyści; albowiem, stosować tę zasadę wyrażając równania równowagi w każdym punkcie, między siłami rzeczywiście działającemi i siłami bezwładności jak gdyby były przyłożone, albo pisać odrazu zwyczajnym sposobem równania ruchu tych punktów, jest zupełnie jedno i tosamo. Ale, gdy punkta materyalne tworzące układ są powiązane między sobą wedle pewnej ustawy, wtenczas zasada d'Alemberta, przywodząc zagadnienie ruchu układu do zagadnienia równowagi, pozwala korzystać z uproszczeń wprowadzonych przez związki do równań równowagi sił przyłożonych do układu materyalnego; a co jeszcze ważniejsze, dostarcza właśnie tyle równań ile potrzeba do wyznaczenia ruchu każdego z punktów. Zobaczymy to zaraz.

122. Jeśli punkta układu materyalnego są połączone między sobą, ich spółrzędne nie są już wszystkie dowolne. Aby pokazać jak zasada d'Alemberta daje tyle równań ile jest spółrzędnych niezależnych, i tym sposobem wyznacza te spółrzędne w funkcyi czasu t, oznaczmy przez X, Y, Z składowe wynikowej sił wprost przyłożonych do punktu mającego massę m i spółrzędne x, y, z; przez X', Y', Z' składowe wynikowej sił wprost przyłożonych do punktu mającego massę m' i spółrzędne x', y' z'; i tak dalej. Te siły mogą być zero dla niektórych punktów materyalnych układu.

Na mocy zasady d'Alemberta siły przyłożone czynią równowagę siłom bezwładności i siłom wewnętrznym pochodzącym ze związków układu materyalnego; jeśli więc nazwiemy X_1, Y_1, Z_1 składowe wynikowej sił wewnętrznych działających na punkt m, wyrazimy tę równowagę pisząc ogólne równanie pracy przy-

sposobionej (osie proctokqtue)

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2} + X_1\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + Y_1\right)\delta y\right.$$

$$\left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + Z_1\right)\delta z\right\} = 0.$$

Przemieszczenia $\delta x, \delta y, \delta z, \delta x', \ldots$, niezależne od czasu, powinny się zgadzać ze związkami układu istniejącemi w chwili uważanej. Owoż, w założeniu że układ materyalny bierze przemieszczenia zgodne ze swojemi związkami, summa prac przysposobionych, pochodzących z działania sił wewnętrznych, jest zero. (Tom I, nº 324); więc ogólne równanie pracy przysposobionej staje się

$$(2) \qquad \sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y\right.$$

$$\left. + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0.$$

Summa Σ rozciąga się do wszystkich punktów materyalnych układu, a ilości X, Y, Z będą uważane jako zero w punktach do których żadna siła nie jest wprost przyłożona.

Niech będzie teraz k równań

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0, \ldots$$

które wyrażają związki między punktami materyalnemi układu w funkcyi ich spółrzędnych x, y, z, x',..., i ogólnie w funkcyi czasu t.

Ponieważ układ materyalny powinien zadość czynić warun-

kom związków w położeniu jakie bierze istotnie w danej chwili, i w położeniach odpowiedających wszelkim przemieszczeniom przysposobionym które się zgadzają z jego stanem, spółrzędne $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, $x'+\delta x'$,... punktów materyalnych muszą sprawdzać równania związkowe; więc, jeśli zróżniczkujemy te równania, nie zmieniając czasu t, otrzymamy między zmiennościami δx, δy, δz, $\delta x'$,... k równań

$$
\begin{aligned}
&\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}\delta z + \frac{dL}{dx'}\delta x' + \ldots = 0,\\
(3)\qquad &\frac{dM}{dx}\delta x + \frac{dM}{dy}\delta y + \frac{dM}{dz}\delta z + \ldots\ldots\ldots = 0,\\
&\frac{dN}{dx}\delta x + \frac{dN}{dy}\delta y + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Przypuśćmy że układ ma n punktów materyalnych; równanie (2) będzie zawierało $3n$ zmienności które zadość czynią równaniom różniczkowym (3); a jeśli wyrugujemy k zmienności między równaniami (2) i (3), pozostanie $3n-k$ zmienności całkiem niezależnych : zatem, równając do zera spółczynniki każdej z tych zmienności niezależnych, znajdziemy $3n-k$ równań różniczkowych między siłami, czasem t, i spółrzędnemi punktów układu. Więc, dołączając k równań związkowych, mamy ze wszystkiem $3n$ równań, które wyznaczają spółrzędne wszystkich punktów układu w funkcyi czasu t. Tym sposobem zagadnienie przywodzi się do całkowania równań różniczkowych; co jest rzeczą analizy.

Aby znać położenie każdego punktu układu w jakiejkolwiek epoce ruchu, trzeba całkować, jakośmy dopiero co powiedzieli, $3n-k$ równań różniczkowych. Te równania są drugiego

rzędu; ich całkowanie wprowadzi $6n - 2k$ statecznych dowolnych, które się wyznaczą za pomocą wiadomych ilości stanu początkowego, to jest za pomocą danych położeń wszystkich punktów materyalnych układu jako też wielkości i kierunków ich prędkości, w pewnej epoce wziętej za początek czasu. Te położenia początkowe punktów nie są wszystkie dowolne, ponieważ powinny zadość czynić k równaniom warunkowym; dlatego można sobie dać tylko $3n - k$ spółrzędnych.

Tak samo składowe początkowych prędkości powinny sprawdzać następujące k równań:

$$\frac{dL}{dt}+\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dL}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\ldots=0.$$

$$(4)\quad \frac{dM}{dt}+\frac{dM}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dM}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dM}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dM}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\ldots=0,$$

$$\frac{dN}{dt}+\frac{dN}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dN}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dN}{dz}\frac{dz}{dt}+\frac{dN}{dx'}\frac{dx'}{dt}+\ldots=0.$$

. . . .

między składowemi $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \ldots$; zatem można sobie dać tylko $3n - k$ tych składowych. Ztąd wynika że wyznaczenie stanu początkowego, jako trzeba, wymaga żeby było $6n - 2k$ danych ilości, które mogą być wzięte dowolnie.

Po zcałkowaniu równań różniczkowych, do wyznaczenia spółrzędnych wszystkich n punktów układu, mamy k równań związkowych i $3n - k$ równań całkowych, co daje razem $3n$ równań potrzebnych; ale ostatnie zawierają $6n - 2k$ statecznych dowolnych. Owoż, równania całkowe powinny istnieć w każdej chwili; jeśli więc uczynimy w nich $t = 0$ i podsta-

wimy spółrzędne początkowe, otrzymamy $3n - k$ równań między stałecznemi dowolnemi. Poczem, jeśli zróżniczkujemy równania całkowe i uczynimy w nich $t = 0$, podstawiając wartości początkowe spółrzędnych i składowych prędkości, znajdziemy $3n - k$ nowych równań między stałecznemi dowolnemi. Będziemy więc mieli ze wszystkiem $6n - 2k$ równań do wyznaczenia $6n - 2k$ stałecznych dowolnych. Znając te stałeczne, mamy teraz, do wyznaczenia $3n$ spółrzędnych, najpierwej k równań związkowych danych a potem $3n - k$ równań całkowych; co właśnie czyni $3n$ równań. Więc spółrzędne wszystkich punktów układu są wyznaczone w funkcyi czasu, i temsamem prędkości tych punktów są wiadome w każdej chwili.

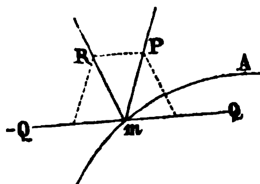
123. Można wykonać rugowanie k zmienności δx, δy, δz,... wiadomą metodą mnożników. Jakoż, pomnóżmy równania (3) przez niewyznaczone czynniki λ, μ, ν,... i dodajmy je do równania (2), a potem zrównajmy do zera spółczynnik każdej z $3n$ zmienności; otrzymamy

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&X - m\frac{d^2x}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots = 0,\\
&Y - m\frac{d^2y}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \nu\frac{dN}{dy} + \ldots = 0,\\
&Z - m\frac{d^2z}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \nu\frac{dN}{dz} + \ldots = 0\\
&X' - m\frac{dx'}{dt^2} + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \nu\frac{dN}{dx'} + \ldots = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Jeśli teraz wyrugujemy wszystkie k czynniki λ, μ, ν,... bę-

dziemy mieli $3n - k$ równań różniczkowych drugiego rzędu między spółrzędnemi x, y, z, x'.... i czasem t. Równania są te same któreśmy poprzednio znaleźli; ale sposób ich otrzymania przedstawia tę ważną korzyść że określa siły które zastępują równania związkowe, a przez wartości czynników λ, μ, ν..., wyznacza tężności i parcia wiązadeł układu; jakośmy to już widzieli, stosując metodę mnożników do zasady prędkości przysposobionych.

Aby to wszystko jeszcze jaśniej wykazać, rozłóżmy siłę poruszającą P punktu materyalnego m na dwie składowe Q i R;



oznaczając przez Q siłę *istotną* któraby dała punktowi m, gdyby był wolny, ruch jaki ma istotnie w układzie, a przez R *siłę straconą* na tym punkcie m. Rozłóżmy podobnie wszystkie inne siły poruszające P', P", P'''... punktów m', m'', m''',... na składowe Q' i R', Q" i R",... Siły — Q, — Q', — Q",... równe i wprost przeciwne siłom istotnym Q, Q', Q"... są siłami bezwładności punktów m, m', m''... Owoż, jest przez się oczywiste że, odejmując siły stracone R, R', R"... nie zmienia się w niczem ruchu żadnego z punktów m, m', m''...; albowiem, pod działaniem samych sił Q, Q', Q",... te wszystkie punkta, gdyby nawet stały się zupełnie wolnemi, zachowują zawsze ruch jaki mają w układzie, i, chociaż powiązane między sobą, poruszają się nie wywierając żadnego wpływu jedne na drugie. Zatem, gdy odjęto siły R, R', R".., wiązadła fizyczne układu nie doznają ani tężności ani tarcia. Jeśli zaś przywrócimy te siły

R, R′, R″..., to one będą sobie czyniły równowagę za pomocą związków układu, i ruch punktów m, m', m''... jeszcze ten sam zostanie. Widzimy więc dobrze że tylko same jedne siły stracone R, R′, R″... sprawiają tężności i parcia w wiązadłach układu; gdy te siły będą wiadome, będzie można znać działania wynikające ze związków na punkta materyalne układu, a następnie tężności i parcia wiązadeł, za pomocą czynników λ, μ, ν,... których wartości będą wyznaczone przez równania (5).

To co poprzedza daje łatwe dowodzenie zasady d'Alemberta. Jakoż, figura pokazuje że siła stracona R jest wynikową siły poruszającej P i siły bezwładności —Q; więc, mówić że w ruchu układu materyalnego, poddanego związkom jakimkolwiek, siły stracone czynią sobie równowagę za pomocą związków, jest to samo co mówić że siły poruszające czynią równowagę siłom bezwładności za pomocą tychże związków. Dowodząc wyżej pierwszego dowiodło się temsamem drugiego.

Ztąd wynika że składowe siły straconej R, równoległe do trzech osi spółrzędnych, wyrażają się analitycznie przez

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Użycie sił straconych jest często w zastosowaniach przydatne. I tak, chcąc przejść z równań równowagi układu materyalnego do równań ruchu, dość jest zastąpić siły wprost przyłożone przez siły stracone na wszystkich punktach; dowodem tego ogólne równanie (2) pracy przysposobionej, które znaczy właśnie równowagę sił straconych. Zobaczymy później inne przykłady.

124. Zastosowanie zasady D'Alemberta do sił chwilowych. Baczne dostrzeganie zjawisk przekonały że niema w naturze sił którebу nagle, w niepodzielnej chwili, zmieniały odrazu wielkość albo kierunek prędkości ciała jakiegokolwiek. Siła sta-

teczna mierzy się ilością ruchu jaką nadaje w jedności czasu punktowi materyalnemu; ztąd wynika że, aby wydać ilość ruchu wyznaczoną, siła powinna być tem większa im mniejszy jest czas jej działania. Niema więc żadnej siły, chyba nieskończenie wielka, któraby mogła udzielić jakiemukolwiek ciału prędkość skończoną w czasie nieskończenie małym. Ale są potężne siły uderzeń które sprawiają wielkie prędkości, w czasie tak krótkim że się ocenić nie daje. Te siły uderzeń nazywają się zwykle *siłami chwilowemi* i mierzą się ilością ruchu jaką nadają, przez chwilę swego działania, punktowi materyalnemu w spoczynku. Otóż, składowe prędkości punktu materyalnego, równoległe do trzech osi spółrzędnych stałych, powiększają się, przez działanie sił jakichkolwiek, tak jak gdyby prędkość początkowa była zero; zatem idzie że składowe siły chwilowej, działającej na punkt materyalny w ruchu, mierzą się ilościami ruchu które odpowiedają przyrostom składowych prędkości tego punktu.

Niech będzie teraz siła chwilowa P, działająca w kierunku osi OX, na punkt materyalny massy m; równanie ruchu tego punktu jest

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\mathrm{P}.$$

Nazwijmy θ chwilę przez którą siła P działa i na końcu której nadaje punktowi m prędkość u; jeśli zcałkujemy równanie ruchu od $t=0$ aż do $t=\theta$, przypuszczając że prędkość początkowa $u_0=0$; otrzymamy

$$mu=\int_0^\theta \mathrm{P}dt.$$

Nie podlega wątpliwości że ilość ruchu mu, równa *popędowi* siły chwilowej P, a nabyta przez punkt m w czasie niezmiernie

krótkim θ, może mieć wartość skończoną jakąkolwiek, byle tylko natężenie siły P było dostatecznie wielkie przez czas jej działania.

Jeśli na punkt materyalny m w spoczynku działa, przez czas θ, siła chwilowa P zmienna z wielkości i kierunku, nazywając X, Y, Z jej składowe równoległe do trzech osi spółrzędnych stałych, będziemy mieli

$$m\frac{dx}{dt}=\int_0^\theta Xdt, \qquad m\frac{dy}{dt}=\int_0^\theta Ydt, \qquad m\frac{dz}{dt}=\int_0^\theta Zdt.$$

Nietrudno pojąć że składowe $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ prędkości u, nabytej przez punkt m w czasie niezmiernie krótkim θ, mogą zawsze mieć wartości skończone, i nawet bardzo wielkie, jeśli natężenie siły chwilowej P jest dostatecznie wielkie.

To ustaliwszy, niech będą X, Y, Z składowe siły chwilowej P która działa na punkt materyalny m danego układu, od czasu t_0 do t; X_1, Y_1, Z_1 składowe wynikowej oddziaływań chwilowych jakich punkt m doznaje od wszystkich innych punktów z przyczyny związków układu. Nie zważając na siły ciągłe, jako ciężkość, którym układ jest poddany a których działania są nieznaczne w czasie bardzo krótkim $t-t_0$, mamy

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+X_1;$$

zkąd całkując wynika

$$(6) \qquad m\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_0}{dt}\right)=\int_{t_0}^{t} Xdt+\int_{t_0}^{t} X_1dt.$$

Zobaczmy teraz co znaczy to równanie. Całka $\int X dt$, określona w granicach t_0 i t wyraża składową, równoległą do osi *xów*, ilości ruchu *mu* jakąby siła chwilowa P udzieliła punktowi *m*, gdyby był wolny przez czas $t - t_0$ jej działania; tak samo całka określona $\int X_1 dt$ jest składową ilości ruchu, jakąby wynikowa wszystkich oddziaływań chwilowych nadała temu samemu punktowi w tych samych okolicznościach; następnie, $m\frac{dx}{dt}$ jest składową ilości ruchu *mv* jaką punkt *m* posiada na końcu czasu *t*, a zaś $m\frac{dx_0}{dt}$ składową ilośc ruchu jaką ten punkt ma na końcu czasu t_0. Owoż, powyższe ilości ruchu, będąc miarami sił chwilowych, mogą być uważane jako siły; więc, na mocy tej ugody, i ponieważ oś *xów* jest osią jakąkolwiek, równanie (6) wyraża że jest równowaga między ilościami ruchu jakieby siła chwilowa P i wynikowa oddziaływań nadały punktowi *m* gdyby był wolny, a ilością ruchu jaką ten punkt posiada na początku działania siły chwilowej i ilością ruchu jaką ma na końcu jej działania, ale ostatnia ilość ruchu wzięta w stronę przeciwną.

Zatem, stosując ogólne twierdzenie pracy przysposobionej do ilości ruchu jakoby sił, odpowiedających wszystkim punktom materyalnym układu, i zważając że ilości ruchu stracone

$$\int X dt - m\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_0}{dt}\right), \quad \int Y dt - m\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_0}{dt}\right),$$

$$\int Z dt - m\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_0}{dt}\right)$$

są w równowadze z ilościami ruchu rozwiniętemi przez od-

działywania (*), albo co to samo, że ilości ruchu stracone czynią sobie równowagę na mocy związków układu, otrzymujemy

$$(7) \quad \sum\left\{\left(\int Xdt + m\frac{dx_0}{dt} - m\frac{dx}{dt}\right)\delta x\right.$$

$$\left.+\left(\int Ydt + m\frac{dy_0}{dt} - m\frac{dy}{dt}\right)\delta y + \left(\int Zdz + m\frac{dz_0}{dt} - m\frac{dz}{dt}\right)\delta z\right\} = 0.$$

To ważne równanie wywodzą zwykle z równania (2); oto jakim sposobem. Zmienności δx, δy, δz, $\delta x'$,... zadość czynią równaniom różniczkowym (3), które się otrzymuje uważając czas t jako stateczny. Owoż, w przeciągu niezmiernie krótkim $t - t_0$ czasu przez który działa siła chwilowa, przemieszczenia punktów materyalnych są tak mało znaczne że ich spółrzędne x, y, z, x',... są prawie niezmienne, i równaniom (3) staje się zadość przez te same zmienności δx, δy, δz, $\delta x'$,... Można więc, uważając te zmienności jako stateczne, pomnożyć równanie (2) przez dt i zcałkować względem czasu t w granicach t_0 i t; zkąd właśnie wyniknie równanie (7).

Jeśli układ wychodzi ze spoczynku, $m\frac{dx_0}{dt}$, $m\frac{dy_0}{dt}$, $m\frac{dz_0}{dt}$, $m\frac{dx'_0}{dt}$,... są zero; wtedy równanie (7) uproszcza się, i wyraża równowagę między ilościami ruchu jakieby siły chwilowe nadały punktom materyalnym gdyby były wolne, a ilościami ruchu jakie istotnie układ posiada na końcu czasu $t - t_0 = \theta$, te ostatnie wzięte ze znakami przeciwnemi.

Znając wielkość i kierunek prędkości v_0 każdego z punktów m, m',... układu, na początku działania siły chwilowej P,

(*) zobacz MÉCANIQUE RATIONNELLE par *P.-J.-E. Finck*. PARIS 1865.

nietrudno wyznaczyć prędkości v, v',... wszystkich punktów na końcu działania tej siły; nie zważając na siły ciągle, jako ciężkość, których wpływ przez czas θ jest bardzo mały w porównaniu z siłą chwilową. Jakoż, posługując się metodą mnożników λ, μ, ν,... znajdujemy $3n$ równań

$$\int X dt + m\frac{dx_0}{dt} - m\frac{dx}{dt} + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \ldots = 0$$

$$\int Y dt + m\frac{dy_0}{dt} - m\frac{dy}{dt} + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \ldots = 0$$

$$\int Z dt + m\frac{dz_0}{dt} - m\frac{dz}{dt} + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \ldots = 0$$

$$\int X' dt + m'\frac{dx'_0}{dt} - m'\frac{dx'}{dt} + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \ldots = 0$$

. . . .

Przypuszczamy że w tych równaniach wartości składowych $\int X dt$, $\int Y dt$, $\int Z dt$, $\int X' dt$,... ilości ruchu jakieby siła chwilowa P udzielała w czasie θ punktom wolnym m, m',..., są wiadome z doświadczenia.

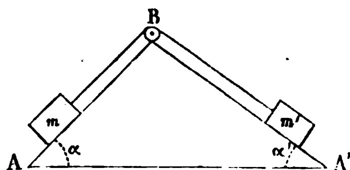
Jeśli wyrugujemy wszystkie k spółczynniki λ, μ, ν,..., otrzymamy $3n - k$ równań między $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$,... Ale w równaniach związkowych $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,... spółrzędne x, y, z, x',... są funkcyami czasu t; różniczkując te równania względem t, znajdziemy k równań (4). Będziemy więc mieli ze wszystkiem $3n$ równań do wyznaczenia $3n$ składowych pręd-

kości $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$,...; zatem prędkość każdego punktu będzie wiadoma.

Damy teraz parę przykładów na zastosowanie zasady d'Alemberta.

125. Zagadnienie I. Na dwóch płaszczyznach pochyłych BA, BA', opartych jedna na drugiej, poruszają się dwa ciała ciężkie związane nicią nierozciągalną, która łączy ich środki ciężkości przechodząc przez krążek umieszczony na szczycie B. Wyznaczyć ustawę ruchu tych dwóch ciał, zaniedbując massę nici, i przypuszczając że obie jej części Bm, Bm' są równoległe do płaszczyzn pochyłych i prostopadłe do ich przecięcia.

W tem założeniu, nazywając m, m' massy dwóch ciał, można uważać te massy jakoby zjednoczone w ich środkach ciężkości.



Niech będzie Bm=x, Bm'=x', i kąt BAA'=α, kąt BA'A=α'. Zaniedbując tarcia, widzimy łatwo że siłami *poruszającemi* mass m, m' w kierunkach ich ruchów są mg wstα, $m'g$ wstα'; a siłami *istotnemi*, któreby dały tym massom gdyby były wolne ruch jaki mają rzeczywiście w układzie, są $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m'\frac{d^2x'}{dt^2}$. Owóż, wedle zasady d'Alemberta, jest równowaga, za pomocą związków układu materyalnego, między siłami poruszającemi i siłami bezwładności; więc, wyrażając tę równowagę przez

twierdzenie pracy przysposobionej, mamy równanie

$$m\left(g \operatorname{wst}\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + m'\left(g \operatorname{wst}\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0.$$

Ale, nazywając l długość mBm' nici która jest niezmienna, mamy także równanie związkowe

$$x + x' = l;$$

zkąd

$$\delta x + \delta x' = 0.$$

Jeżeli teraz pomnożymy ostatnie równanie przez czynnik niewyznaczony λ i dodamy do pierwszego, a potem zrównamy do zera spółczynniki zmienności niezależnych δx, $\delta x'$, znajdziemy

$$m\left(g \operatorname{wst}\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \lambda = 0, \qquad m'\left(g \operatorname{wst}\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) + \lambda = 0.$$

Ztąd, rugując λ, wynika

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - m'\frac{d^2x'}{dt^2} - mg \operatorname{wst}\alpha + m'g \operatorname{wst}\alpha' = 0;$$

a zważając że, na mocy równania związkowego, mamy

$$-\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

będzie

$$(m + m')\frac{d^2x}{dt^2} = (m \operatorname{wst}\alpha - m' \operatorname{wst}\alpha')g,$$

albo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{m \operatorname{wst} \alpha - m' \operatorname{wst} \alpha'}{m + m'} \cdot g.$$

Całkując to równanie, otrzymujemy

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m \operatorname{wst} \alpha - m' \operatorname{wst} \alpha'}{m + m'} \cdot gt + C = v,$$

$$x = \frac{m \operatorname{wst} \alpha - m' \operatorname{wst} \alpha'}{m + m'} \cdot \frac{gt^2}{2} + Ct + C'.$$

C i C′ są dwie stateczne dowolne które się wyznaczy znając stan początkowy układu.

Ogólnie, jako widzimy, ruch dwóch ciał ciężkich m, m' jest jednostajnie przyspieszony. Co już było oczywiste przed całkowaniem, ponieważ przyspieszenie $\frac{d^2x}{dt^2}$ jest stateczne. Ale, gdyby było $m \operatorname{wst} \alpha - m' \operatorname{wst} \alpha' = 0$, to jest, gdyby ciężary dwóch ciał były odwrotnie proporcyonalne do długości płasczyzn pochyłych, mielibyśmy

$$v = C \quad \text{i} \quad x = Ct + C'.$$

W tem przypuszczeniu ruch byłby jednostajny. A gdyby do tego było jeszcze $v = 0$, wtedy dwa ciała ciężkie m, m' zostawałyby w spoczynku.

Można rozwiązać to szczególne zagadnienie bez zasady d'Alemberta, ale wprowadzając tężność T nici. Jakoż, dla każdego ciała osobno jest równanie ruchu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = mg \operatorname{wst} \alpha - T,$$

$$m' \frac{d^2x'}{dt^2} = m'g \operatorname{wst} \alpha' - T;$$

zkąd, rugując T, wynika

$$m\left(g \text{ wst } \alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) - m'\left(g \text{ wst } \alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) = 0$$

równanie otrzymane powyżej.

Widzimy teraz dobrze że tężność T nici jest równa sile straconej

$$T = m\left(g \text{ wst } \alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) = m'\left(g \text{ wst } \alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right);$$

i możemy łatwo sprawdzić, porównywając obecne równania z poprzedzającemi, że mnożnik λ wyraża wartość liczebną tężności T. Cośmy już dawno wiedzieli (*Tom* I, n° 328).

Podstawiając wartość $\frac{d^2x}{dt^2}$ znajdujemy

$$T = \frac{mm'g}{m + m'}(\text{wst } \alpha + \text{wst } \alpha') = -\lambda.$$

Ten wynik pokazuje że tężność nici w ruchu dwóch ciał m, m' zostaje stateczna.

Gdy prędkość początkowa v_0 i położenie początkowe x_0 są dane, wtedy zagadnienie jest zupełnie rozwiązane, ponieważ w każdej chwili są wiadome x i v, a nawet tężność nici która jest stateczna. Ale, jeśli ciała m, m' zostały w ruch wprowadzone przez siły uderzeń, natenczas wyznaczy się prędkość początkową wyrażając, za pomocą zasady d'Alemberta, że jest równowaga między ilościami ruchu jakieby siły uderzeń nadały ciałom m, m' gdyby były wolne, i między ilościami ruchu z któremi te siły zaczynają się poruszać, ostatnie ilości ruchu

wzięte w strony przeciwne. Oznaczmy przez a, a' prędkości jakie ciała m, m' odebrały rzeczywiście od sił uderzeń, i przez $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dx'_0}{dt}$ prędkości z któremi te ciała zaczynają się poruszać; będziemy mieli

$$m\left(a - \frac{dx_0}{dt}\right) + \lambda = 0, \quad m'\left(a' - \frac{dx'_0}{dt}\right) + \lambda = 0,$$

zkąd

$$m\left(a - \frac{dx_0}{dt}\right) = m'\left(a' - \frac{dx'_0}{dt}\right) = -\lambda.$$

Ale równanie związkowe

$$x + x' = l$$

daje

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = 0,$$

i temsamem

$$\frac{dx'_0}{dt} = -\frac{dx_0}{dt};$$

więc

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{ma - m'a'}{m + m'} = -\frac{dx'_0}{dt}.$$

Mamy także tężność początkową

$$-\lambda = \frac{mm'}{m + m'}(a + a').$$

126. To zagadnienie rozwiązane daje teoryę machiny

Atwood'a; dość tylko przypuścić $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, aby mieć formuły ruchu

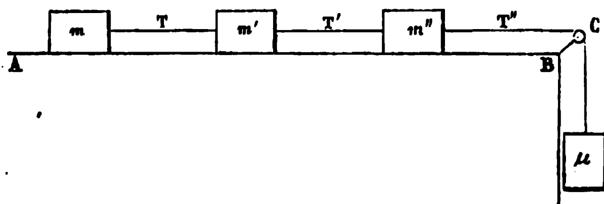
$$v = \frac{m - m'}{m + m'} . gt + C$$

$$x = \frac{m - m'}{m + m'} . \frac{gt^2}{2} + Ct + C'$$

$$T = \frac{2mm'g}{m + m'} .$$

Ale te formuły nie są ściśle prawdziwe, ponieważ nie zważano ani na tarcie krążka machiny ani na jego massę.

127. Zagadnienie II. Układ ciał ciężkich, mających massy m, m', m'' połączone między sobą sznurkami nierozciągalnemi, ślizga bez tarcia na płaszczyźnie poziomej AB pod działaniem ciężaru ciała massy μ które ciągnie ostatnie ciało m''. Wyznaczyć ustawę ruchu układu, przypuszczając że środki ciężkości mass m, m', m'' są na linii prostej stycznej do krążka C przez który przechodzi ostatni sznurek.



Nazywając x, x', x'', x''' odległości środków ciężkości mass m, m', m'', μ od punktu zetknięcia C krążka ze sznurkiem, wyrazimy nierozciągalność sznurków przez następujące równa-

nia związkowe, które oznaczają że odległości środków ciał zostają stateczne,

$$x - x' = l, \qquad x' - x'' = l', \qquad x'' - x''' = l''.$$

Teraz, wedle ustawy danego układu, wszystkie jego punkta mają tę samą prędkość v w każdej chwili; zatem $-m\frac{dv}{dt}$, $-m'\frac{dv}{dt}$, $-m''\frac{dv}{dt}$ są siłami bezwładności mass zkoncentrowanych w ich środkach ciężkości, a ciężar μg jest siłą poruszającą która powinna, wedle zasady d'Alemberta, czynić równowagę tym siłom bezwładności za pomocą związków układu. Więc, stosując ogólne twierdzenie pracy przysposobionej, mamy

$$-m\frac{dv}{dt}\delta x - m'\frac{dv}{dt}\delta x' - m''\frac{dv}{dt}\delta x'' + \mu\left(g - \frac{dv}{dt}\right)\delta x''' = 0.$$

Owoż, równania związkowe dają

$$\delta x - \delta x' = 0, \qquad \delta x' - \delta x'' = 0, \qquad \delta x'' - \delta x''' = 0;$$

jeśli więc pomnożymy ostatnie równania odpowiednio przez λ, λ', λ'', i dodamy do pierwszego, a potem zrównamy do zera spółczynniki zmienności δx, $\delta x'$, $\delta x''$, $\delta x'''$, będzie

$$-m\frac{dv}{dt} + \lambda = 0$$

$$-m'\frac{dv}{dt} - \lambda + \lambda' = 0$$

$$-m''\frac{dv}{dt} - \lambda' + \lambda'' = 0$$

$$\mu\left(g - \frac{dv}{dt}\right) - \lambda'' = 0.$$

Nakoniec, aby wyrugować niewyznaczone mnożniki λ, λ', λ'', dość jest dodać wszystkie razem równania. Tym sposobem znajdujemy równanie ruchu układu,

$$-(m+m'+m''+\mu)\frac{dv}{dt}+\mu g=0,$$

zkąd

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\mu g}{m+m'+m''+\mu}=\frac{\mu g}{M},$$

czyniąc dla skrócenia

$$m+m'+m''+\mu=M$$

Otrzymane równanie dowodzi że ruch układu jest jednostajnie przyspieszony.

Wprowadzając tężności sznurków, można się obyć bez zasady d'Alemberta i łatwo rozwiązać to samo zagadnienie. Jakoż, nazywając T, T', T'' tężności sznurków mm', $m'm''$, $m''\mu$, mamy zaraz osobne równania ruchu wszystkich ciał stanowiących układ,

$$m\frac{dv}{dt}=T$$

$$m'\frac{dv}{dt}=T'-T$$

$$m''\frac{dv}{dt}=T''-T'$$

$$\mu\frac{dv}{dt}=\mu g-T'';$$

zkąd, dodając razem te pojedyncze równania, wywodzimy równanie ruchu układu otrzymane innym sposobem

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu g}{M}.$$

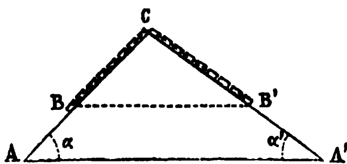
Powyższe równania, odniesione do podobnych poprzedzających, jasno pokazują że tężności T, T', T'', nie są czem innem jak czynnikami λ, λ', λ'', i wyrażają się przez ciąg stosunków

$$\frac{T}{m} = \frac{T'}{m + m'} = \frac{T''}{m + m' + m''} = \frac{\mu g}{M}.$$

Te stosunki dowodzą że tężności sznurków są proporcyonalne do mass ciał którym ruch nadają.

Uwaga. W obydwóch zagadnieniach I i II, zaniedbano massy sznurków; gdyby je wprowadzono, tężności byłyby zmienne w całej rozciągłości każdego sznurka.

128. Zagadnienie III. Wyznaczyć ruch łańcucha jednorodnego który, położony na dwóch płaszczyznach pochyłych CA, CA' pod kątami α i α' ślizga na nich bez tarcia.



Nazwijmy l długość BCB' łańcucha, x i x' jego części CB i CB', będzie

$$x + x' = l.$$

A jeśli oznaczymy przez ε massę jedności długości łańcucha, i przypuścimy że cały łańcuch leży na płasczyznie prostopadłej do przecięcia dwóch płasczyzn pochyłych, składowe ciężarów części CB i CB', równoległe do tych płasczyzn, wyrażą się przez $\varepsilon g x \text{wst}\alpha$ i $\varepsilon g x' \text{wst}\alpha'$; z drugiej strony, $-\varepsilon x \frac{dv}{dt}$ jest siłą bezwładności części CB, i równa się $-\varepsilon x \frac{d^2x}{dt^2}$, ponieważ środek massy części CB i skrajność B mają tę samą prędkość. Tak samo, $-\varepsilon x' \frac{d^2x}{dt^2}$ jest siłą bezwładności części CB'. Więc, na mocy zasady d'Alemberta, wyrażając równowagę między temi siłami przez równanie pracy przysposobionej, mamy

$$x\left(g\text{wst}\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + x'\left(g\text{wst}\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right)\delta x' = 0,$$

i następnie

$$x\left(g\text{wst}\alpha - \frac{d^2x}{dt^2}\right) + \lambda = 0, \quad x'\left(g\text{wst}\alpha' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right) + \lambda = 0;$$

zkąd, rugując λ i x', wynika

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (\text{wst}\alpha + \text{wst}\alpha')\frac{g}{l}x + g\text{wst}\alpha' = 0.$$

Aby zcałkować to równanie linijne, uczyńmy dla skrócenia

$$(\text{wst}\alpha + \text{wst}\alpha')\frac{g}{l} = n^2.$$

uważajmy że

$$\frac{g\text{wst}\alpha'}{n^2} = \frac{l\text{wst}\alpha'}{\text{wst}\alpha + \text{wst}\alpha'};$$

będzie zatem

$$\frac{d^2x}{dt^2} - n^2\left(x - \frac{l\,\mathrm{wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,\alpha'}\right) = 0.$$

Nakoniec, jeśli położymy

$$x - \frac{l\,\mathrm{wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,\alpha'} = y,$$

będziemy mieli równanie linijne bardzo proste

$$\frac{d^2y}{dt^2} - n^2y = 0,$$

które zcałkowane daje

$$y = \mathrm{A}e^{nt} + \mathrm{B}e^{-nt}.$$

Więc

$$x = \mathrm{A}e^{nt} + \mathrm{B}e^{-nt} + \frac{l\,\mathrm{wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,\alpha'},$$

A i B są dwie stateczne dowolne które się wyznaczy przez stan początkowy. Przypuszczając że dla $t = 0$ jest $x = x_0$ i $\frac{dx}{dt} = v_0$, wyprowadzi się wartości A i B z dwóch równań

$$x_0 = \mathrm{A} + \mathrm{B} + \frac{l\,\mathrm{wst}\,\alpha'}{\mathrm{wst}\,\alpha + \mathrm{wst}\,\alpha'},$$

$$v_0 = n(\mathrm{A} - \mathrm{B}).$$

Jaki jest warunek żeby łańcuch jednorodny, położony na dwóch płaszczyznach pochyłych, zostawał w spoczynku? Znajdziemy odpowiedź szukając prędkości $\frac{dx}{dt}$.

Owoż

$$\frac{dx}{dt} = n(Ae^{nt} - Be^{-nt});$$

więc, żeby łańcuch zostawał w spoczynku, trzeba żeby było

$$Ae^{nt} - Be^{-nt} = 0$$

albo

$$Ae^{2nt} = B,$$

jakikolwiek jest czas t; co wymaga oczywiście

$$A = 0 \quad i \quad B = 0.$$

Jeśli te dwie stateczne są zero, wtedy

$$x = \frac{l \operatorname{wst} \alpha'}{\operatorname{wst} \alpha + \operatorname{wst} \alpha'}$$

i temsamem

$$x' = \frac{l \operatorname{wst} \alpha}{\operatorname{wst} \alpha + \operatorname{wst} \alpha'}.$$

Ztąd wynika

$$\frac{x}{x'} = \frac{\operatorname{wst} \alpha'}{\operatorname{wst} \alpha} = \frac{CA}{CA'}.$$

Więc warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi łańcucha jest, żeby linia prosta BB′ była równoległa do poziomej AA′.

WŁASNOŚCI OGÓLNE RUCHU UKŁADÓW MATERYALNYCH.

Widzieliśmy w ruchu punktu materyalnego trzy zasadnicze twierdzenia, z których każde wskazuje jedną własność ruchu, i, w pewnych dość ogólnych przypadkach, daje całkę pierwszą równań różniczkowych. W ruchu układów materyalnych istnieją także zasadnicze twierdzenia, które grają wielką rolę w Mechanice rozumowej. Wprawdzie ważna zasada d'Alemberta, która dostarcza tyle równań różniczkowych ile trzeba, nie daje poznać żadnej własności ruchu; ale są *cztery ogólne twierdzenia* z których każde wyraża jedną własność ruchu. Te zasadnicze twierdzenia teraz wyłożymy.

TWIERDZENIE RUCHU ŚRODKA CIĘŻKOŚCI.

129. Niech będzie m massą jednego którego kolwiek z punktów materyalnych układu; oznaczmy przez x, y, z spółrzędne tego punktu odniesione do trzech osi prostokątnych albo pochyłych, i przez X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1,... składowe wszystkich sił, tak zewnętrznych jak wewnętrznych, które działają na ten punkt materyalny. Równania różniczkowe punktu m będą

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1 + \dots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1 + \dots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1 + \dots$$

Wyobraźmy sobie żeśmy napisali podobne równania ruchu dla wszystkich punktów materyalnych układu, i żeśmy dodali

razem równania które się odnoszą do ruchów rzutowanych na tej samej osi; znajdziemy tym sposobem trzy następujące równania:

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X,$$

$$\Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y,$$

$$\Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z,$$

w których znaki Σ pierwszych stron wskazują summy rozciągające się do wszystkich punktów materyalnych układu, a w drugich stronach wyrażają summy rozciagające się do wszystkich sił działających na różne części układu materyalnego. Ale trzeba uważać że siły wewnętrzne układu nie wchodzą do drugich stron równań; bo te siły są po dwie równe i wprost przeciwne, zatem ich rzuty, na osi jakiejkolwiek, także równe i wprost przeciwne, niszczą się. Jeśli więc układ materyalny jakikolwiek porusza się wolny w przestrzeni, summy algebryczne ΣX, ΣY, ΣZ zawierają same tylko siły zewnętrzne poruszające; a jeśli, przeciwnie, układ ma punkt stały, albo jeśli niektóre jego punkta muszą się poruszać na liniach stałych albo na powierzchniach stałych, wtedy oddziaływanie punktu stałego jakoteż oddziaływania stałych linij i powierzchni, będąc siłami *zewnętrznemi* dla tego układu, wchodzą koniecznie do ΣX, ΣY, ΣZ.

Nazwijmy teraz M massę całego układu materyalnego, x_1, y_1, z_1 spółrzędne jego środka ciężkości w epoce jakiejkolwiek; będziemy mieli (*Tom* I, nº 74)

$$Mx_1 = \Sigma mx, \quad My_1 = \Sigma my, \quad Mz_1 = \Sigma mz.$$

Ztąd, różniczkując względem czasu t, wynika

$$M\frac{dx_1}{dt}=\Sigma m\frac{dx}{dt}, \qquad M\frac{dy_1}{dt}=\Sigma m\frac{dy}{dt}, \qquad M\frac{dz_1}{dt}=\Sigma m\frac{dz}{dt}.$$

Te trzy równania dowodzą że summa rzutów ilości ruchu punktów materyalnych układu, na osi jakiejkolwiek, jest równa rzutowi na tej osi, ilości ruchu całej massy układu skoncentrowanej w jego środku ciężkości.

Zróżniczkujmy jeszcze drugi raz; będzie

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Z przyczyny tych wartości, równania ruchu otrzymane powyżej stają się

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2}=\Sigma X,$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2}=\Sigma Y,$$

$$M\frac{d^2z_1}{dt^2}=\Sigma Z.$$

Ostatnie równania wyznaczają spółrzędne x_1, y_1, z_1 środka ciężkości układu materyalnego w funkcyi czasu t, i dają jedno ze czterech ogólnych twierdzeń któreśmy zapowiedzieli.

Twierdzenie. *Srodek ciężkości układu materyalnego wolnego w przestrzeni porusza się jako punkt materyalny któryby miał massę równą całej massie układu, i do któregoby wszystkie siły zewnętrzne były przeniesione równolegle do siebie samych.*

Gdy, pomijając rozmiary, uważamy ciało za punkt materyalny, jako w ruchu pocisków sferycznych, planet albo innych ciał niebieskich, wtedy, na mocy wysłowionego twierdzenia, tym punktem powinien być środek ciężkości ciała mający za massę całą massę jego zkoncentrowaną. Do tego właśnie środka ciężkości stosuje się dynamika punktu materyalnego, jakośmy na jej początku powiedzieli, i tym tylko sposobem daje się urzeczywiścić wyobrażenie ruchu punktu materyalnego.

Układ materyalny może być w ruch wprowadzony przez siły uderzeń. Aby w tym przypadku wyznaczyć prędkość początkową jego środka ciężkości, dość uważać że, oznaczając przez X, Y, Z składowe siły uderzenia, i przez θ czas jej działania, mamy

$$\Sigma m\frac{d^2x}{dt^2}=\Sigma \mathrm{X}, \quad \text{zkąd} \quad \Sigma m\frac{dx}{dt}=\int_0^{\theta}\mathrm{X}dt.$$

Owoż, jeśli nazwiemy a, b, c składowe prędkości którąby siła uderzenia nadała punktowi m gdyby był wolny, będzie

$$\int_0^{\theta}\mathrm{X}dt=\Sigma ma;$$

ztąd wnosimy

$$\Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma ma, \qquad \Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma mb, \qquad \Sigma m\frac{dz}{dt}=\Sigma mc.$$

Więc, na mocy formuł ilości ruchu środka ciężkości, otrzymujemy

$$\mathrm{M}\frac{dx_1}{dt}=\Sigma ma, \qquad \mathrm{M}\frac{dy_1}{dt}=\Sigma mb, \qquad \mathrm{M}\frac{dz_1}{dt}=\Sigma mc.$$

Ostatnie trzy formuły wyznaczają żądane składowe prędkości początkowej środka ciężkości układu.

130. ZASADA ZACHOWANIA RUCHU ŚRODKA CIĘŻKOŚCI. Jeśli niema żadnej siły poruszającej, albo ogólniej, jeśli wynikowa przeniesienia sił działających na układ materyalny jest zero; co się zdarza gdy siły poruszające stanowią dwojany, albo gdy są siłami wzajemnemi jako żobopólne przyciągania punktów materyalnych między sobą, albo jeszcze gdy te siły przedstawiają tarcia różnych części układu, parcia ciał bryłowych albo płynnych, uderzenia ciał między sobą, wybuchy rozbijające ciała, gwałtowne przejścia ze stanu ciekłego do stanu bryłowego i nawzajem, albo inne podobne działania wewnętrzne; w tych wszystkich przypadkach summy ΣX, ΣY, ΣZ są zero; więc

$$M\frac{dx_1}{dt} = A, \qquad M\frac{dy_1}{dt} = B, \qquad M\frac{dz_1}{dt} = C.$$

Co pokazuje że w takich okolicznościach środek ciężkości układu materyalnego ma ruch prostolinijny i jednostajny albo zostaje nieruchomy. Na tém polega *zasada zachowania ruchu środka ciężkości.*

131. Aby dobrze rozumieć znaczenie i doniosłość pierwszego ogólnego twierdzenia, uważajmy ruch bomby rzuconej w przestrzeń. Zaniedbując opór powietrza, widzimy, że jedyną siłą zewnętrzną która działa na bombę jest ciężkość; ztąd wnosimy że środek ciężkości bomby opisuje parabolę na płaszczyznie pionowej przechodzącej przez kierunek jego prędkości początkowej. Przypuśćmy teraz że bomba pęka nim padnie na ziemię. Ponieważ, na mocy dowiedzionego twierdzenia, ten wybuch, sprawiony jedynie przez siły wewnętrzne bomby, nie wpływa bynajmniej na ruch jej środka ciężkości, więc środek ciężkości ogółu wszystkich kawałków rozpryśniętej bomby będzie, po jej rozbiciu, dalej ciągnął ruch paraboliczny który miał przed rozbiciem. A dopiero wtedy gdy jeden z odłamów bomby spotyka ciało obce, albo gdy pada na ziemię, ruch środka

ciężkości całego układu zmienia się; bo oddziaływanie doznane przez ten odłam jest siłą zewnętrzną która się przyłącza do siły ciężkości i razem z nią sprawia ruch tego środka. Rozumie się oczywiście że to wszystko jest tylko z pewnem przybliżeniem prawdziwe; albowiem, uważając nawet ciężkość za siłę stateczną w różnych wysokościach do których pociski dosięgają, gdy bomba porusza się w powietrzu, ten płyn przeciwstawi opór ruchowi bomby i wszystkich jej odłamów, a będąc siłą zewnetrzną wpływa na ruch środka ciężkości całego układu.

Nasz układ słoneczny, będąc niezmiernie oddalony od gwiazd, które dla tej przyczyny nie wywierają na niego żadnego wpływu, może być uważany jako poddany samym tylko siłom wewnętrznym, to jest siłom wzajemnego działania wszystkich części składowych; ztąd wnosimy że jego środek ciężkości musi się poruszać jednostajnie w lini prostej, albo zostawać nieruchomy. Ale idźmy jeszcze dalej. Jeśli zasada równości działania i oddziaływania, którą spostrzegamy w ciałach ziemskich, jest powszechną ustawą w naturze, jako się zdaje (*Tom* I, n° 310), wtenczas środek ciężkości naszego układu, który się prawie schodzi ze środkiem ciężkości słońca, nie może być nieruchomy ani się poruszać jednostajnie. Otóż, obserwacye astronomiczne już od ostatniego wieku niewątpliwie okazały że słońce z całym swoim orszakiem postepuje z pewną prędkością w przestrzeni. Więc to dowodem że jesteśmy cząstką powszechnego układu materyalnego, albo jednem słowem, że nasz świat stanowi cząstkę składową wszechświata którego środek ciężkości jest zapewne nieruchomy.

Weźmy teraz zastosowanie bliżej nas obchodzące. Wyobraźmy sobie człowieka zupełnie odosobnionego w przestrzeni; przypuśćmy że nie podlega żadnej sile zewnętrznej, i że jego środek ciężkości jest nieruchomy. Ten człowiek nie będzie mógł, przez swoje własne siły, nadać żadnego ruchu swojemu środkowi ciężkości; naprożno, ściągając muskuły, będzie przemieszczał

różne części ciała w tę albo ową stronę, nie rozwinie nigdy tylko same siły wewnętrzne które nie mogą wyprowadzić środka ciężkości z jego stanu pierwotnie nieruchomego.

Nawzajem, gdy widzimy jakiekolwiek ciało ożywione ruchem jednostajnym, jako na przykład statek płynący, możemy twierdzić że wynikowa przeniesienia wszystkich sił zewnętrznych jest zero, albo czyni równowagę wynikowej wszystkich oporów.

Ponieważ jestestwo ożywione, jako na przykład człowiek, nie może przemieszczać swojego środka ciężkości bez pomocy sił zewnętrznych, jego chód byłby niemożebny bez tarcia. Jakoż, gdyby tarcie nie istniało, oddziaływanie gruntu na którym człowiek stoi byłoby tylko siłą normalną, i człowiek nie mógłby tylko wznosić się albo zniżać; a jeśli tarcie istnieje, oddziaływanie gruntu mogąc się stać pochyłem, może wydać siłę poziomą która sprawia ruch przeniesienia. Gdy człowiek pochylony stoi nieruchomy, oddziaływanie gruntu jest równe jego ciężarowi; a gdy wstaje, siła bezwładności zaraz się rodzi i zmienia wielkość tego oddziaływania.

Gra billardu przedstawia jeszcze zastosowanie tej samej zasady. Niech będzie bila G którą chcemy skierować na punkt A. Możemy to uskutecznić uderzając bilę w jakimkolwiek jej punkcie, byle tylko siła uderzenia miała kierunek poziomy, i koniecznie taki żeby, przeniesiona równolegle do siebie samej do środka ciężkości bili, przechodziła przez punkt A. Chybionoby punkt A gdyby wprost do niego celowano.

TWIERDZENIE OGÓLNE ILOŚCI RUCHU RZUTOWANYCH NA OSI.

132. Niech będzie jakikolwiek układ punktów materyalnych poruszający się w przestrzeni. Oznaczmy przez X, Y, Z składowe wynikowej wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do punktu materyalnego m, a przez X_1, Y_1, Z_1 składowe wyni-

kowej wszystkich sił wewnętrznych układu pochodzących, bądź to z działań tych punktów jednych na drugie, bądź też z ich związków; równanie rzutu punktu m na osi $x^{ów}$ będzie

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1,$$

zkąd

$$m\frac{dx}{dt} - m\frac{dx_0}{dt} = \int_0^t (X + X_1)dt.$$

Jeśli napiszemy podobne równania odnoszące się, w tym samym czasie, do rzutów wszystkich punktów układu na osi $x^{ów}$, i weźmiemy summę, uważając że rzuty odpowiedające siłom wewnętrznym układu niszczą się po dwa dlatego że te siły są po dwie równe i wprost przeciwne, otrzymamy równanie którego druga strona będzie zawierała same tylko siły zewnętrzne.

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} - \Sigma m\frac{dx_0}{dt} = \Sigma\int_0^t Xdt.$$

Summa $\Sigma m\frac{dx}{dt}$ nazywa się *całą ilością ruchu układu rzutowaną na osi* $x^{ów}$. Wedle tego, powyższe równanie, stanowjące *drugie ogólne twierdzenie*, tak się wysłowia :

Twierdzenie. *Przyrost summy wszystkich ilości ruchu układu rzutowanych na osi stałej jakiejkolwiek, i przez czas także jakikolwiek, jest równy summie wszystkich popędów sił zewnętrznych rzutowanych na tej samej osi i przez ten sam czas.*

Na mocy tego twierdzenia, cała ilość ruchu jakiej układ materyalny, wolny w przestrzeni, nabyć może wedle kierunku stałego jakiegokolwiek i pod działaniem sił jakichkolwiek, jest

niezależna od spółrzędnych punktów przyłożenia tych sił i od związków układu. Ta summa ilości ruchu zostaje zupełnie taka sama, czy punkta materyalne są osobne czy powiązane między sobą; można nawet zmienić raptem związki, albo wprowadzić nowe i przekształcić układ na bryłowy niezmienny, nie naruszając bynajmniej jego całej ilości ruchu; a co najważniejsze, ta ilość ruchu nietylko nie zależy od sił wewnętrznych układu, ale także nie zależy od tych sił zewnętrznych których składowe, równoległe do uważanej osi, są równe i wprost przeciwne.

133. ZASADA ZACHOWANIA CAŁEJ ILOŚCI RUCHU. Jeśli siły zewnętrzne są po dwie równe i wprost przeciwne, albo jeśli niema tylko same siły wewnętrzne, summy ΣX, ΣY, ΣZ są zero, i będzie

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = \Sigma m \frac{dx_0}{dt},$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} = \Sigma m \frac{dy_0}{dt},$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} = \Sigma m \frac{dz_0}{dt}.$$

Wtedy cała ilość ruchu wedle kierunku jakiegokolwiek jest stateczna. Ta własność jest znana pód nazwiskiem *zasada zachowania całej ilości ruchu.*

W układzie planetarnym wszystkie siły przywodzą się do wzajemnych działań ciał niebieskich między sobą, a ciała niebieskie nie mają żadnych punktów któreby się musiały poruszać na stałych liniach albo powierzchniach; więc cała ilość ruchu zostaje niezmienna w przestrzeni.

Cofanie się strzelby po wystrzale, tłumaczy się naturalnie za pomocą powyższej zasady. Człowiek, trzymający przyłożoną do ramienia strzelbę nabitą ostrym ładunkiem, strzela; gaz

spalonego prochu swoją rozprężliwością wyrzuca kulę w stronę otworu lufy, a pcha całą strzelbę w stronę przeciwną. Oznaczmy przez m massę kuli z częścią gazu który z nią wylata, przez M massę strzelby z resztą gazu; jeśli nazwiemy v i V prędkości tych mass po wystrzale, w kierunku osi strzelby, mv będzie ilością ruchu kuli, a ilość ruchu MV, udzielona strzelbie, będzie miarą uderzenia którego dozna ramie strzelca. Owoż, przed wystrzałem strzelba i ładunek tworzą układ nieruchomy; zatem summa ich ilości ruchu rzutowanych na osi strzelby jest zero. Ta summa zostaje zero dopóki niema sił zewnętrznych któreby, rzutowane na osi strzelby, dały summę popędów różną od zera. A ponieważ wybuch prochu rozwija same tylko siły wewnętrzne, ztąd wynika że kula i strzelba biorą zarazem ruchy w kierunkach wprost przeciwnych, tak żeby summa ilości ruchu całego układu, rzutowanych na osi strzelby, zachowała pierwotną wartość zero. Co daje równanie

$$mv - MV = 0,$$

które pokazuje że prędkości v i V, kuli i cofania się strzelby, są odwrotnie proporcyonalne do mass m i M. Jeśli więc strzelec opiera mocno kolbę o ramie, jego ciało stanowi ze strzelbą jedną massę daleko większą niż M; wtedy prędkość V cofania się strzelby może się stać bardzo małą, i nie sprawiać dotkliwego uderzenia.

To samo rozumowanie stosuje się do cofania się dział po wystrzale. Zaniedbując massę prochu, możnaby powiedzieć że pocisk i działo, w chwili wybuchu prochu, biorą prędkości odwrotnie proporcyonalne do swych mass i skierowane w strony przeciwne. W istocie rzeczy mają się trochę inaczej; z przyczyny massy prochu, której zaniedbywać nie wolno w porównaniu do massy kuli, prędkość cofania się działa jest większa niżby była nie licząc massy prochu.

Puszczanie rac opiera się na tej samej własności ruchu. Po-

stępowe palenie się prochu, wchodzącego do składu racy, wyprowadza coraz większą ilość materyi przez otwór wyrobiony w części niższej; więc ciało racy musi się cofać w górę, to jest brać ruch z dołu do góry. Wprawdzie ciężkość modyfikuje ten ruch; ale jej działanie zmniejsza tylko prędkość racy, niszcząc część siły pionowej która sprawia wzniesienie.

TWIERDZENIE OGÓLNE MOMENTÓW ILOŚCI RUCHU

134. Równania ruchu punktu materyalnego m pod działaniem sił jakichkolwiek są

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1 + X_2 + \dots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1 + Y_2 + \dots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1 + Z_2 + \dots$$

Pomnóżmy pierwsze równanie przez y a drugie przez x, i dodajmy stronami, otrzymamy równanie

$$m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = Yx - Xy + Y_1x - X_1y + \dots$$

które wyraża że moment siły istotnej punktu m względem osi $z^{ów}$ jest równy summie momentów względem tej samej osi, wszystkich sił działających na ten punkt.

Znajdziemy tak samo równania momentów sił względem osi $y^{ów}$ i osi $x^{ów}$,

$$m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = Xz - Zx + X_1z - Z_1x + \dots$$

$$m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = Zy - Yz + Z_1y - Y_1z + \dots$$

Te trzy równania, jeśli osie spółrzędne są prostokątne, dowodzą że moment siły istotnej punktu m względem osi jakiejkolwiek jest równy summie momentów wszystkich sił tak zewnętrznych jak wewnętrznych które na ten punkt działają.

Wyobraźmy sobie teraz że napisano podobne równania dla wszystkich punktów materyalnych składających układ wolny w ruchu; jeśli dodamy stronami te równania, zważając że momenta wszystkich sił wewnętrznych, po dwa równe i przeciwne, niszczą się między sobą w drugich stronach, otrzymamy trzy jedyne równania

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),$$

$$(1)\qquad \Sigma m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \Sigma(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x),$$

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \Sigma(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z),$$

które, przedstawione w kształcie

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \Sigma(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y),$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = \Sigma(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x),$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \Sigma(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z),$$

wyrażają następujące zadanie :

TWIERDZENIE OGÓLNE. *W układzie materyalnym wolnym w przestrzeni, pochodna summy momentów ilości ruchu, względem osi*

stałej, jakiejkolwiek jest równa summie momentów sił zewnętrznych poruszających, względem tej samej osi.

To twierdzenie istnieje jeszcze gdy układ materyalny w ruchu ma punkt stały, byle tylko ten punkt był wzięty za początek spółrzędnych; bo wtenczas siła zewnętrzna zastępująca punkt stały, to jest przedstawiająca jego oddziaływanie, daje moment zero i dlatego nie wchodzi do drugich stron równań.

135. Zasada zachowania momentów. Jeśli drugie strony wyżej otrzymanych równań są zero; co się zdarza gdy niema żadnej siły zewnętrznej, albo gdy wszystkie siły zewnętrzne układu, uważanego za niezmienny, mają wynikowę która przechodzi przez początek spółrzędnych albo jest zero, na przykład gdy układ jest pod działaniem samych tylko sił wzajemnych jako układ planetarny, wtedy będzie :

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = 0,$$

(2) $$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = 0.$$

Zkąd, całkując i nazywając c, c', c'' trzy stateczne dowolne, wynika

$$\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = c,$$

(3) $$\Sigma m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = c',$$

$$\Sigma m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = c''.$$

Te równania uważane osobno i wszystkie trzy razem dowodzą następującego twierdzenia:

Gdy układ materyalny jakikolwiek porusza się pod działaniem sił zewnętrznych których summa momentów względem jednej osi stałej jest zero, wtedy summa momentów ilości ruchu względem tej osi jest stateczna.

A gdy niema żadnej siły zewnętrznej, albo gdy summy momentów sił zewnętrznych są zero względem trzech osi prostokątnych stałych, wtenczas summa momentów ilości ruchu względem osi stałej jakiejkolwiek jest stateczna.

136. UWAGA. Twierdzenie ilości ruchu rzutowanych i twierdzenie momentów ilości ruchu wyprowadzają się bardzo prosto z zasady d'Alemberta zkombinowanej z zasadą prędkości przysposobionych. Aby mieć pierwsze twierdzenie, dość jest w ogólnem równaniu

$$\Sigma\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

uczynić $\delta y = \delta z = 0$; co daje

$$\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

Ztąd, mnożąc przez dt i całkując, otrzymujemy

$$\Sigma m\frac{dx}{dt} - \Sigma m\frac{dx_0}{dt} = \int_0^t Xdt,$$

równanie które wyraża twierdzenie ilości ruchu rzutowanych na jakiejkolwiek osi wziętej za oś $x$ów.

Równie łatwo wywodzi się z ogólnego równania twierdzenie

momentów ilości ruchu. Jakoż, możemy dać układowi materyalnemu, takiemu jaki jest w chwili uważanej, przemieszczenie przysposobione kątowe $\delta\theta$ około osi $z^{\text{ów}}$; dość tylko uczynić

$$x = r\,\mathrm{dos}\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\,\theta, \qquad z = \text{statecz.}$$

co daje

$$\delta x = -\,y\delta\theta, \qquad \delta y = x\delta\theta, \qquad \delta z = 0.$$

Podstawiając te wartości, mamy

$$-\Sigma\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y + \Sigma\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x = 0$$

albo

$$\Sigma m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(Yx - Xy)\,;$$

co jest właśnie jednem z równań (1).

Widzimy oczywiście że te dwa ogólne twierdzenia dostarczają sześciu równań oddzielnych; a rozumując jako w równowadze (*Tom* I, n° 325), przekonywamy się niewątpliwie że wszystkie inne równania z nich pochodzące przywodzą się do tych sześciu, które są równaniami ogólnemi ruchu, odpowiedającemi sześciu równaniom ogólnym równowagi. Te równania między samemi siłami zewnętrznemi stosują się do wszelkich ciał bryłowych albo niebryłowych jakichkolwiek.

ZASADA POWIERZCHNI.

137. Wiemy już z dynamiki punktu materyalnego, że moment ilości ruchu punktu M względem osi jest równy podwój-

nemu wieloczynowi jego massy przez powierzchnię którą opisuje rzut promienia wodzącego na płasczyznie prostopadłej do tej osi; to jest, nazywając λ wycinek opisany przez rzut promienia wodzącego $Om = r$ na płasczyznie xy, i θ kąt tego rzutu z osią OX, mamy

$$m(xdy - ydx) = mr^2 d\theta = 2md\lambda;$$

różniczka $d\theta$ wyraża znak momentu ilości ruchu i znak powierzchni $d\lambda$.

Zatem, na mocy twierdzenia momentów ilości ruchu, będzie

$$\frac{d}{dt}\Sigma m \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Sigma m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \frac{1}{2}\Sigma(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y).$$

Jeśli więc summa momentów sił zewnętrznych działających na układ jest zero względem osi $z^{ów}$, będziemy mieli

$$\frac{d}{dt}\Sigma m \frac{d\lambda}{dt} = 0;$$

zkąd, całkując dwa razy, otrzymujemy

$$\Sigma m\lambda = ct.$$

Nie przydaliśmy drugiej statecznej dowolnej, bo liczymy powerzchnię wycinka λ od $t = 0$.

Ztąd TWIERDZENIE : *Gdy układ materyalny jakikolwiek porusza się pod działaniem sił których summa momentów względem osi stałej jest zero, summa wieloczynów mass wszystkich punktów przez powierzchnie opisane w czasie* t, *przez rzuty promieni wodzących na płasczyznie prostopadłej do tej osi, jest proporcyonalna do czasu* t.

Na tem twierdzeniu polega *zasada zachowania powierzchni*,

która się nie różni w gruncie od zasady zachowania momentów ilości ruchu; ale przedstawiona pod tym kształtem jest wydatniejsza w następstwach i łatwiej się zastosować może. Zasada powierzchni jest wielce użyteczna; twierdzenie ogólne momentów ilości ruchu daje tylko poprostu równanie różniczkowe zagadnienia, gdy tymczasem zasada powierzchni daje całkę ruchu.

Dla rozpoznania czy summa momentów sił zewnętrznych, przyłożonych do różnych punktów układu materyalnego, jest zero względem pewnej osi, dość jest, uważając te siły jak gdyby działały na układ bryłowy niezmienny, szukać wynikowej i dwojanu przeniesienia do jednego z punktów tej osi. Owoż, rzut momentu linijnego dwojanu wynikowego na osi jest to samo co summa momentów sił względem tejże osi; więc, żeby ta summa momentów była zero, trzeba żeby oś dwojanu wynikowego była prostopadła do osi uważanej.

Zajmiemy się teraz przypadkiem w którym summy momentów sił są zero względem trzech osi prostokątnych, przechodzących przez punkt stały przestrzeni; co się zdarza gdy wszystkie siły zewnętrzne układu, uważanego za bryłowy niezmienny, mają wynikowę przez ten punkt przechodzącą. W tym dość ogólnym przypadku, zasada powierzchni istnieje nietylko dla trzech osi spółrzędnych, ale jeszcze dla wszelkiej osi przechodzącej przez rzeczony punkt stały; mamy więc

$$\Sigma m\lambda = ct,$$

$$(4) \qquad \Sigma m\lambda' = c't,$$

$$\Sigma m\lambda'' = c''t.$$

A gdy wynikowa sił zewnętrznych układu jest zero, wtenczas równania dane przez zasadę powierzchni mają miejsce dla wszystkich punktów powierzchni.

Nawzajem, jeśli równaniom (4) staje się zadość, summa momentów sił działających na układ jest zero, względem każdej osi przechodzącej przez początek spółrzędnych. Albowiem, równania (4) zróżniczkowane dwa razy prowadzą do równań (2), i temsamem dają równania momentów względem osi OZ, OY, OX,

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0, \qquad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \qquad \Sigma(Zy - Yz) = 0,$$

które dowodzą wzajemnicy, i zarazem pokazują że siły poruszające czyniłyby sobie równowagę, gdyby układ był bryłowym niezmiennym a początek O spółrzędnych punktem stałym.

138. Weźmy kilka przykładów zastosowania zasady powierzchni.

Widzieliśmy już, mówiąc o ruchu środka ciężkości, że jestestwo ożywione, naprzykład człowiek, jeśli jest odosobnione w przestrzeni i zostaje w spoczynku, nie może bez pośrednictwa sił zewnętrznych, przemieścić swojego środka ciężkości; dodajemy teraz że owo jestestwo, z przyczyny zasady zachowania powierzchni, nie posiada możebności nadania sobie ruchu wirowego około tego punktu. « Jakoż (*), jakimkolwiek sposobem człowiek usiłuje za pomocą muskułów wydobyć ruch z siebie samego, rozwija zawsze same tylko siły wewnętrzne; zatem summa wieloczynów mass punktów ruchomych przez powierzchnie, opisane przez promienie wodzące około środka ciężkości i rzutowane na płaszczyznie jakiejkolwiek przez ten punkt przechodzącej, zachowuje statecznie tę samą wartość. Więc ta summa wieloczynów musi być ciągle zero, ponieważ była zero na początku ruchu, na mocy założenia że jestestwo, o którem

---

(*) Mówi Delaunay, w swem dziele *Traité de Mécanique rationnelle*, 5e édition. Paris, 1870.

mowa, było pierwotnie nieruchome. Gdy to jestestwo porusza niektóre części swego ciała tak, że summa wieloczynów z ich mass przez odpowiedające powierzchnie rzutowane na pewnej płasczyznie ma wartość dodatną, są koniecznie inne części ciała które się poruszają w tym samym czasie w inną stronę i dają, na tej samej płasczyznie, summę podobnych wieloczynów odjemną, i taką żeby summa wszystkich razem wieloczynów odnoszących się do całego ciała była zero. I tak, jeśli naprzykład człowiek zwraca głowę na prawo, reszta jego ciała będzie się obracała koniecznie ku stronie lewej; a jeśli człowiek wystawi nogę naprzód jakby do zrobienia kroku, to jego ciało pochyli się w stronę przeciwną, to jest głowa pójdzie także naprzód a środek ciała wtył.

» Gdy człowiek stoi na ziemi, i, będąc pierwotnie w spoczynku, zaczyna iść przed sobą, to przeprowadza swój środek ciężkości ze stanu spoczynku do stanu ruchu. Zobaczmy co się dzieje w tym przypadku, aby pojąć i wytłumaczyć sobie cały ruch chodzenia. Człowiek zostający w spoczynku jest poddany siłom zewnętrznym, które są : z jednej strony, działanie ciężkości na wszystkie cząstki jego ciała, a z drugiej strony, parcia których doznaje od ziemi w punktach zetknięcia; te siły zewnętrzne czynią sobie równowagę. Owoż, ten człowiek gdy chce zacząć iść i wystawia jedną nogę naprzód, rozwija w sobie same tylko siły wewnętrzne które nie mogą przemieszczać jego środka ciężkości. Ale, na mocy zasady powierzchni, i stosownie do tego cośmy dopiero co powiedzieli, w tym samym czasie gdy występuje jedna noga, środek ciała nabiera dążności do cofania się z drugą nogą; ta druga noga cofnęłaby się istotnie, gdyby się jej nic nie sprzeciwiało, i środek ciężkości całego ciała nie postąpiłby naprzód. Ponieważ zaś druga noga nie może się cofać inaczej jak tylko ślizgając na powierzchni ziemi, ta dążność do ślizgania rozwija tarcie które mu się sprzeciwia, aż do pewnej granicy. Otoż właśnie to tarcie, które ziemia wywiera na część spodnią drugiej nogi, sprawia ruch środka ciężkości ciała.

Każdemu wiadomo że, gdy grunt jest śliski a jedna noga wysuwa się naprzód, to zaraz druga noga cofa się w tył, tak że człowiek może upaśdź jeśli się nie strzeże. To się zdarza na lodzie, zwłaszcza gdy nogi są opatrzone łyżwami.

» Tak samo, gdy tancerz, wznosząc się na palcach jednej tylko stopy, chce sobie dać ruch wirowy około pionowej przechodzącej przez środek ciężkości, to nie może uskutecznić tego ruchu samem jednem działaniem swoich sił muskularnych; bo te siły, będąc wewnętrzne, nie zdołają dokazać żeby summa wieloczynów mass przez powierzchnie opisane około środka ciężkości przez promienie wodzące, i zrzutowane na płasczyznie poziomej, przeszła z wartości zero, którą ma, do wartości jakiejkolwiek innej. Ale, jeśli tancerz chce się kręcić na lewo, to daje swemu ciału ruch skręcenia, na mocy którego część wyższa obraca się na lewo, gdy tymczasem część niższa nabiera dążności do kręcenia się na prawo. Owoż, ten ostatni ruch nie może się wykonać inaczej jak przez ślizganie różnych części stopy na ziemi; ztąd wynika opór przeciw ślizganiu w każdym punkcie zetknięcia stopy z ziemią, a te wszystkie opory są siłami zewnętrznemi, dla których summa momentów względem poziomej, poprowadzonej przez środek ciężkości, nie jest zero; więc za pomocą tych sił zewnętrznych ciało tancerza może wziąć ruch wirowy około pionowej środka ciężkości. Gdy tancerz obrócił się trochę tym sposobem, nie przestając jedną nogą dotykać ziemi, podnosi raptem tę nogę aby znieść skręcenie ciała które z niej wynikło; a powtarzając to wszystko kilka razy, dochodzi nareszcie do ruchu wirowego. Gdyby tancerz stał na gruncie śliskim jak na lodzie, albo gdyby się opierał jednym tylko punktem na ziemi, nie mógłby na żaden sposób obracać się około siebie samego. »

139. PŁASCZYZNA NIEZMIENNA. Niech będzie układ punktów materyalnych m, m', m'',... w ruchu dla którego zasada powierzchni ma miejsce. Biorąc za początek spółrzędnych prostokątnych punkt O przyzwoity, szukajmy płasczyzny takiej, żeby

summa wieloczynów mass punktów układu przez powierzchnie jakie opisują rzuty ich promieni wodzących na tej płasczyznie, była największa możebna. W tym celu, nazwijmy P szukaną płasczyznę, $d\omega$ nieskończenie małą powierzchnię opisaną na niej przez rzut promienia wodzącego Om, w czasie dt; i oznaczmy przez α, β, γ kąty jakie normalna do płasczyzny P czyni z osiami spółrzędnych; będziemy mieli

$$d\omega = d\lambda'' \mathrm{dos}\alpha + d\lambda' \mathrm{dos}\beta + d\lambda \mathrm{dos}\gamma.$$

Jeśli teraz weźmiemy summę podobnych powierzchni, pomnożonych przez massy odpowiedających punktów, i zcałkujemy, będzie

$$\Sigma m\omega = (\mathrm{dos}\alpha\Sigma m\lambda'' + \mathrm{dos}\beta\Sigma m\lambda' + \mathrm{dos}\gamma\Sigma m\lambda)t$$

albo

$$\Sigma m\omega = (c''\mathrm{dos}\alpha + c'\mathrm{dos}\beta + c\mathrm{dos}\gamma)t.$$

Owoż, można zawsze dobrać trzy kąty A, B, C takie żeby było

$$\frac{c''}{\mathrm{dos}A} = \frac{c'}{\mathrm{dos}B} = \frac{c}{\mathrm{dos}C} = \sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2};$$

wprowadzając te dostawy do ostatniej formuły, otrzymujemy

$$\Sigma m\omega = t\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}(\mathrm{dos}A\,\mathrm{dos}\alpha + \mathrm{dos}B\,\mathrm{dos}\beta + \mathrm{dos}C\,\mathrm{dos}\gamma),$$

albo

$$\Sigma m\omega = t\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}\,\mathrm{dos}\varphi$$

nazywając φ kąt dwóch kierunków (A, B, C) i (α, β, γ).

Formuła pokazuje że summa $\Sigma m\omega$ będzie największa mo-

żebna, w czasie t, gdy kąt φ stanie się zero, to jest gdy płasczyzna P będzie prostopadła do kierunku (A, B, C). Ale ten kierunek jest stateczny, bo kąty A, B, C zależą od samych tylko statecznych c, c', c''. Więc istnieje płasczyzna wyznaczona, mająca równanie

$$c''x + c'y + cz = 0,$$

na której opisane powierzchnie przez rzuty promieni wodzących punktów układu i pomnożone przez ich massy czynią summę maximum w czasie t. To maximum summy $\Sigma m\omega$ ma wartość

$$\Sigma m\omega = t\sqrt{c^2 + c'^2 + c''^2}.$$

Dlatego że płasczyzna prostopadła do kierunku (A, B, C) daje rzeczoną summę największą możebną, i zostaje ta sama jakikolwiek jest czas upłyniony, nazwano ją *płasczyzną powierzchni maximum* albo *płasczyzną niezmienną*.

Płasczyzna niezmienna, będąc niezależna od wielkości działań wzajemnych, zostaje tasama choćby się nawet ustawa przyciągania materyi zmieniła, albo ciała niebieskie inną przybrały postać; bo te zmiany pochodziłyby od sił równych i przeciwnych, dla których drugie strony równań (2) nie przestają być zero. Na planetach części ciekłe albo płynne mogłyby się zjednoczyć z częściami bryłowemi, planety mogłyby się połączyć między sobą, albo się uderzyć nawzajem i rozbić, albo rozprysnąć przez wybuch gazów, a jeszcze płasczyzna niezmienna nie byłaby naruszona.

Można wyznaczyć płasczyznę niezmienną jeśli, w pewnej chwili, są wiadome massy różnych punktów układu, ich położenia i składowe prędkości; bo z nich wyprowadzają się wartości statecznych c, c', c''. Jakoż, różniczkując równania

$$\Sigma m\lambda = ct, \qquad \Sigma m\lambda' = c't, \qquad \Sigma m\lambda'' = c''t,$$

mamy

$$\Sigma m \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = c,$$

$$\Sigma m \frac{d\lambda'}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c',$$

$$\Sigma m \frac{d\lambda''}{dt} = \frac{1}{2} \Sigma m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) = c''.$$

Te trzy równania dają wartości statecznych c, c', c'', gdy są wiadome, w epoce jakiejkolwiek, ilości x, y, z i $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dla wszystkich punktów materyalnych układu.

Znając wartości c, c', c'', nietrudno wykreślić równanie $c''x + c'y + cz = 0$ płaszczyzny niezmiennej. Dość tylko, na osiach spółrzędnych OX, OY, OZ, wziąć długości proporcyonalne do c'', c', c, i zbudować na nich równoległościan; przekątna tego równoległościanu przechodząca przez początek O będzie prostopadła do szukanej płaszczyzny niezmiennej.

140. Patrząc na równania (3) z innego punktu widzenia, można z nich wywieśdź równie ważne jak ciekawe następstwa. Jakoż, w układzie bryłowym niezmiennym wolno zastąpić wszystkie siły poruszające przez trzy siły skierowane wedle osi spółrzędnych, i przez trzy dwojany leżące na płaszczyznach spółrzędnych. Jeśli więc, uważając ilości ruchu jako siły, będziemy je składali jak gdyby były przyłożone do układu bryłowego niezmiennego, w tem założeniu równania (3) będą wyrażały że summy momentów ilości ruchu względem trzech osi spółrzędnych są stateczne, albo co to samo, że trzy dwojany składowe, pochodzące z przeniesienia ilości ruchu do początku spółrzędnych, są stateczne. Ztąd wnosimy że dwojan wynikowy przeniesienia jest stateczny, i jego oś czyni z trzema osiami

spółrzędnemi kąty stałe których dostawy są proporcyonalne do statecznych c'', c', c. Otoż, płasczyzna tego dwojanu, mająca kierunek niezmienny w przestrzeni, i ta sama w każdej epoce, jest właśnie płasczyzną powierzchni maximum.

ZASADA SIŁ ŻYWYCH.

141. Widzieliśmy w dynamice punktu że, gdy punkt materyalny m, do którego jest przyłożona siła P, przebiega w czasie dt nieskończenie małą przestrzeń ds, wieloczyn

$$P ds \cos(P, ds) \quad \text{albo} \quad P dp$$

nazywa się nieskończenie małą pracą siły P. (*Tom* I, n^ro^ 242.)

Ten wieloczyn siły i długości, gdy osie spółrzędne są prostokątne, bierze kształt dogodny do zastosowań

$$P dp = X dx + Y dy + Z dz,$$

który zarazem wyraża twierdzenie : *Praca wynikowej jest równa summie prac sił składowych.*

Powtarzając teraz dowodzenie użyte w zasadzie prędkości przysposobionych, łatwo się znajduje że dwie siły równe i przeciwne, działające z natężeniem I na dwa punkta materyalne mające odległość r, rozwijają w nich, przez czas dt, nieskończenie małe prace których summę przedstawia ogólnie wieloczyn

$$I dr ;$$

byle tylko wzięto siłę I ze znakiem — gdy jest przyciągająca, a ze znakiem + gdy jest odpychająca.

To ustaliwszy, jeśli oznaczymy przez P wynikowę sił

zewnętrznych wprost przyłożonych do punktu materyalnego m, przez I wynikowę sił wewnętrznych układu i różnych oddziaływań które na ten punkt wpływają, różniczka siły żywej punktu m wyrazi się przez

$$d^2.mv^2 = 2\mathrm{P}dp + 2\mathrm{I}di.$$

Przypuśćmy że napisano podobne równania dla wszystkich punktów materyalnych stanowiących układ, i weźmy ich summę, będzie

$$d.\Sigma mv^2 = 2\Sigma \mathrm{P}dp + 2\Sigma \mathrm{I}di.$$

Owoż, jeśli układ porusza się wolny w przestrzeni oddziaływania zewnętrzne są zero; a siły wewnętrzne, bedąc po dwie równe i wprost przeciwne, dają prace wyrażone przez wieloczyny $\mathrm{I}dr$. Jeśli zaś punkta materyalne układu muszą się poruszać na stałych liniach albo powierzchniach, oddziaływania tych linij albo powierzchni nie wydają żadnej pracy, bo są prostopadłe do dróg przebieżonych. Więc, jakikolwiek jest układ materyalny w ruchu wolnym albo przymuszonym, mamy zawsze różniczkę summy sił żywych

$$(1) \qquad d.\Sigma mv^2 = 2\Sigma \mathrm{P}dp + 2\Sigma \mathrm{I}dr;$$

której daje się zwykle ogólną postać

$$(2) \qquad d.\Sigma mv^2 = 2\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Ztąd, całkując względem czasu t, otrzymujemy *ogólne równanie sił żywych*

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\Sigma \int (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

W tem równanie, X, Y, Z oznaczają rzuty jednej z sił zewnętrznych albo wewnętrznych układu materyalnego na trzech osiach spółrzędnych prostokątnych; znaki Σ w pierwszej stronie wskazują summy rozciągające się do wszystkich punktów materyalnych układu, a znak Σ w drugiej stronie wskazuje summę rozciągającą się do wszystkich sił, tak zewnętrznych jak wewnętrznych, które działają na różne części materyalne stanowiące układ.

Nazywa się *siłą żywą układu materyalnego* w ruchu summa Σmv^2 sił żywych różnych punktów z których układ jest utworzony; ta summa sił żywych jest ze swojej istoty dodatna. Według tego, ostatnie równanie wyraża ogólne twierdzenie, zwane *zasadą sił żywych*, które tak wysłowić można:

Przyrost siły żywej układu materyalnego w ruchu, przez czas jakikolwiek, jest równy podwójnej summie prac wszystkich sił, tak zewnętrznych jak wewnętrznych, które działają na różne punkta tego układu.

Trzeba uważać że w wysłowieniu twierdzenia siły wewnętrzne nie znikają tak jak w dwóch poprzedzających twierdzeniach ogólnych. Wiemy albowiem że summa nieskończenie małych prac dwóch sił równych i przeciwnych, wyrażających działania wzajemne dwóch punktów materyalnych, wtedy tylko jest zero gdy odległość tych punktów nie zmienia się przez nieskończenie mały czas do którego się te prace odnoszą. Więc summa prac sił wewnętrznych układu materyalnego w ruchu, przez czas jakikolwiek, jest ogólnie różna od zera i wchodzi do rachunku razem z pracami sił zewnętrznych.

142. Całka sił żywych. Istnieje ważny przypadek w którym summa $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ prac sił tak zewnętrznych jak wewnętrznych jest różniczką dokładną pewnej funkcyi

$$f(x, y, z, x', y', z', \ldots)$$

spółrzędnych uważanych jako zmienne niezależne. Wtedy równanie sił żywych całkuje się, i daje całkę określoną w granicach $t = 0$ i t,

$$(3)\quad \Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2f(x, y, z, x', \ldots) - 2f(x_0, y_0, z_0, x'_0, \ldots).$$

Więc, gdy układ materyalny przechodzi z jednego położenia do drugiego, przyrost summy sił żywych zależy tylko od samych spółrzędnych odpowiedających tym dwom położeniom punktów układu. Aby wyznaczyć ten przyrost niema potrzeby znać ani związków między punktami, ani dróg któremi szły, ani czasu przez który je przebiegały.

Równanie (3) pokazuje że siła żywa Σmv^2 układu bierze napowrót tę samą wartość za każdym razem jak funkcya $f(x, y, z, x', \ldots)$ powraca do tej samej wartości statecznej.

Jeśli punkta ruchome układu zajmują te same położenia w przestrzeni w dwóch epokach różnych, summa sił żywych Σmv^2 będzie miała tę samą wartość w tych epokach, albowiem będzie wtedy

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 0.$$

Ale to przypuszcza że, z powrotem tych samych spółrzędnych, powraca ta sama wartość funkcyi $f(x, y, z, x', \ldots)$; co mogłoby nie mieć miejsca. I tak, gdyby summa $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ zawierała część $\dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ która jest różniczką dokładną ilości łuk styczna $\dfrac{y}{x} = \theta$, łuk θ znajdowałby się w funkcyi f. Owoż, jeśli w ogólnym ruchu układu punkt $m(x, y, z)$ powraca do położenia które już zajmował, opisując na przykład około osi OZ spółrzędnych pewną krzywę, oczywiście w tych dwóch położeniach wartości łuku θ nie będą równe, ale będą się różniły

ilością 2π; tym sposobem funkcya f nie weźmie napowrót w drugim przypadku wartości jaką miała w pierwszym.

Summa $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ jest różniczką dokładną, gdy punkta materyalne układu są przyciągane albo odpychane przez środki stałe; albo jeszcze gdy te punkta materyalne przyciągają się albo odpychają nawzajem; ale zawsze w przypuszczeniu że, w obydwóch przypadkach, siła przyciągania albo odpychania jest jedynie funkcyą odległości od środka stałego albo od punktu ruchomego z którego wypływa. Jakoż, niech będzie $K(a, b, c)$ środek stały, przez który przechodzi siła P działająca na punkt materyalny $m(x, y, z)$ i zależąca jedynie od odległości $Km = r$. Przypuszczając siłę P przyciągającą, mamy

$$Xdx + Ydy + Zdz = P\left(\frac{a-x}{r}\,dx + \frac{b-y}{r}\,dy + \frac{c-z}{r}\right);$$

ale równanie

$$r^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2$$

daje

$$rdr = -(a-x)dx - (b-y)dy - (c-z)dz;$$

więc

$$Xdx + Ydy + Zdz = -Pdr = -\varphi(r)dr.$$

Ten wynik, który można było wprost otrzymać (*Tom* I, n^{ro} 253), pokazuje że ilość Pdr jest różniczką funkcyi spółrzędnych punktu m na który działa siła $P = \varphi(r)$.

W przypadku gdy X, Y, Z, X′, Y′, Z′ są składowemi dwóch sił P równych i przeciwnych, które wyrażają działania wzajemne dwóch punktów materyalnych m, m' układu, a których natężenie zależy od samej tylko odległości r tych punktów,

będziemy mieli, na mocy tego cośmy na początku poprzedzającego numeru powiedzieli,

$$Xdx + Ydy + Zdz = Pdr.$$

Ilość Pdr, w której $P = \varphi(r)$ z założenia, jest różniczką funkcyi spółrzędnych x, y, z, x', y', z', ponieważ

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Więc w tych przypadkach summa $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$, która się rozciąga do wszystkich sił działających na układ, jest różniczką funkcyi spółrzędnych $x, y, z, x', y', z', x'',$... ich punktów przyłożenia. Nasz układ planetarny, którego różne części są poddane samym tylko działaniom wzajemnym, może tu służyć za przykład. W nim siła żywa raz się zwiększa drugi raz zmniejsza, a ilość ruchu, jakośmy widzieli, zostaje stateczna.

Planeta opisuje ellipsę około słońca; od perihelium do aphelium odległość r rośnie, a ponieważ jest przyciąganie, będzie $-Pdr < 0$; więc siła żywa zmniejsza się. Przeciwnie, od aphelium do perihelium jest $-Pdr > 0$; więc wtedy siła żywa powiększa się.

Gdy ciało jest ściskane, jego cząsteczki składowe zbliżają się, ale odpychając się wzajemnie; wtedy praca jest $Pdr < 0$, i zmniejsza siłę żywą. A jeśli to ciało ściśnięte będzie zostawione sobie samemu, to się rozszerzy; jego praca rozszerzania się będzie $Pdr > 0$, i rozwinie siłę żywą.

Gdy ciało jest rozszerzane przymusem, na przykład wyciągane na drót, jego cząsteczki składowe oddalają się ale przyciągając się wzajemnie; wtedy praca jest $-Pdr < 0$, i zmniejsza siłę żywą. A jeśli to ciało rozszerzone będzie zostawione sobie samemu, to się ząciągnie; jego praca zciągania się będzie $-Pdr > 0$, i rozwinie siłę żywą.

Jeśli wszystkie punkta materyalne układu są poddane samemu tylko działaniu ciężkości, biorąc za oś rzędnych pionowę idącą z góry na dół, będziemy mieli

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = mg;$$

wtedy równanie sił żywych stanie się

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2\Sigma \int_0^t mgdz.$$

A jeśli oznaczymy przez M całą massę układu i przez z_1 rzędnę jego środka ciężkości, otrzymamy

$$\Sigma mv^2 - \Sigma mv_0^2 = 2M(z_1 - z_1^0).$$

Więc summa sił żywych układu ciężkiego zmienia się tylko z wysokością jego środka ciężkości, rośnie gdy się środek ciężkości zniża, a maleje gdy się on wznosi. Nareszcie summa sił żywych bierze napowrót tę samą wartość za każdym razem jak środek ciężkości powraca do tej samej płasczyzny poziomej.

Summa $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ nie jest nigdy różniczką dokładną funkcyi $f(x, y, z, x'...)$, gdy punkta materyalne układu doznają tarcia, albo się poruszają w środkach które im stawią opór; jakośmy to pokazali w dynamice punktu materyalnego. Siła tarcia i siły środków opornych sprawiają zawsze stratę siły żywej układu, bo dają pracę odjemną.

Zasada zachowania sił żywych. Jeśli summa prac sił tak zewnętrznych jak wewnętrznych jest zero, siła żywa Σmv^2 układu zostaje stateczna; prędkości różnych punktów materyalnych mogą się zmieniać, ale ich zmienności będą takie że układ zachowa całą siłę żywą.

143. Gdy równania związkowe nie zawierają wydatnie czasu t,

siły wewnętrzne nie wchodzą do summy $\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)$. W tym dość obszernym przypadku równanie sił żywych wywodzi się wprost z zasady d'Alemberta zkombinowanej z zasadą prędkości przysposobionych. Jakoż, ta zasada daje ogólne równanie ruchu

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}=0,$$

do którego siły wewnętrzne nie wchodzą (122); jeśli więc związki między punktami materyalnemi pozwalają dać układowi za przemieszczenie przysposobione jego przemieszczenie istotne przez czas nieskończenie mały ruchu, to jest, jeśli można wziąć przemieszczenia przysposobione δx, δy, δz równe istotnym przemieszczeniom dx, dy, dz układu przez czas dt, będzie

$$\sum\left\{\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)dx+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)dy+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)dz\right\}=0,$$

zkąd wynika

$$d.\Sigma mv^2=2\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Otrzymujemy więc tym sposobem różniczkę siły żywej układu materyalnego do której nie wchodzą siły wewnętrzne.

Równanie wyraża że nieskończenie mały przyrost summy sił żywych wszystkich punktów układu jest równy podwójnej summie nieskończenie małych prac sił poruszających przez czas nieskończenie mały.

Zatem równanie (1) staje się

$$d.\Sigma mv^2=2\Sigma Pdp.$$

Ale istnienie tych równań opiera się na przypuszczeniu że można wziąć

$$\delta x = dx, \qquad \delta y = dy, \qquad \delta z = dz, \ldots$$

co niezawsze ma miejsce, jakośmy już gdzieindziej okazali. Wprawdzie zdaje się, na pierwsze wejrzenie, że między wszystkiemi przemieszczeniami przysposobionemi, zgodnemi ze stanem układu materyalnego, wolno wybrać to które układ bierze istotnie w ruchu rzeczywistym. Ten wybór jednak wtedy tylko jest możebny gdy równania związkowe nie zawierają wydatnie czasu t. I w samej rzeczy, niech będzie

$$L(t, x, y, z, \ldots) = 0,$$

jedno z równań związkowych do którego czas t wchodzi wydatnie. Gdy się daje układowi przemieszczenie przysposobione zgodne ze związkami jego punktów materyalnych, spółrzędne x, y, z,... biorą przyrosty δx, δy, δz,..., a czas t pozostaje stateczny, ponieważ w tem przemieszczeniu związki powinny zostawać takie jakie są w uważanej chwili. Trzeba więc żeby spółrzędne $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$,... czyniły zadość równaniu $L(t, x, y, z, x' \ldots) = 0$, to jest musi być

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\delta x + \frac{dL}{dy}\delta y + \frac{dL}{dz}dz\right) = 0.$$

Owoż, przemieszczenia istotne dx, dy, dz.... nie sprawdzają tego równania, dlatego że $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$,... wtenczas tylko zadość czynią równaniu związkowemu $L(t, x, y, z \ldots) = 0$, gdy się w niem zmienia zarazem czas t; co wymaga koniecznie żeby było

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz\right) + \frac{dL}{dt}dt = 0.$$

Tym sposobem widzimy jasno że dwa powyższe równania różniczkowe nie są zgodne tylko jedynie wtedy gdy $\frac{dL}{dt} = 0$, to jest gdy czas t nie wchodzi do równania $L = 0$. Więc, jeśli równania związkowe $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ nie zawierają wydatnie czasu t, siły wewnętrzne nie wchodzą do równania sił żywych.

Ten ważny przypadek równania sił żywych jest jedyny. Aby się o tem przekonać, uważajmy że, jakiekolwiek są równania $L = 0$, $M = 0$, $N = 0, \ldots$ wyrażające związki między n punktami materyalymi układu, ogólne zasady dynamiki, wyłożone na początku rozdziału, dają do wyznaczenia tych punktów $3n$ równań

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{dL}{dx} + \mu\frac{dM}{dx} + \nu\frac{dN}{dx} + \ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{dL}{dy} + \mu\frac{dM}{dy} + \ldots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{dL}{dz} + \mu\frac{dM}{dz} + \ldots$$

$$m'\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + \lambda\frac{dL}{dx'} + \mu\frac{dM}{dx'} + \ldots$$

. . . .

Pomnóżmy te wszystkie równania odpowiednio przez dx, dy, $dz, \ldots$ i dodajmy, otrzymamy

$$\frac{1}{2}d.\Sigma mv^2 = \Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) + \lambda\Sigma\left(\frac{dL}{dx}dx + \frac{dL}{dy}dy + \frac{dL}{dz}dz\right)$$

$$+ \mu\Sigma\left(\frac{dM}{dx}dx + \frac{dM}{dy}dy + \frac{dM}{dz}dz\right) + \ldots$$

Owoż, różniczkując równania związkowe, mamy

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\frac{dL}{dz}dz\right)=-\frac{dL}{dt}dt$$

$$\Sigma\left(\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\frac{dM}{dz}dz\right)=-\frac{dM}{dt}dt$$

. . . .

na mocy tych wartości poprzedzające równanié staje się

$$(4)\quad \frac{1}{2}d.\Sigma mv^2=\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)-\lambda\frac{dL}{dt}dt-\mu\frac{dM}{dt}dt-\ldots$$

Więc, jeśli równania związkowe nie zawierają wydatnie czasu t, pochodne cząstkowe $\frac{dL}{dt}$, $\frac{dM}{dt}$,... są zero, i równanie (4) daje, przez inną metodę, równanie różniczkowe (2) sił żywych do którego już nie wchodzą siły wewnętrzne; a jeśli przeciwnie, równania związkowe zawierają wydatnie czas t, wtedy równanie (4) jest to samo w gruncie co ogólne równanie (1), i nie różni się od niego tylko samym kształtem pod którym siły wewnętrzne są wyrażone.

144. W układzie bryłowym niezmiennym $dr=0$, a w układzie doskonale ciekłym $I=0$; zatem w obydwóch układach jest $\Sigma\int Idr=0$. Co daje

$$(5)\qquad \Sigma mv^2-\Sigma mv_0^2=2\Sigma\int Pdp.$$

Więc, *przyrost siły żywej ciała bryłowego albo ciekłego w ruchu jest równy podwójnej summie prac sił zewnętrznych wprost przyłożonych.*

Gdy układ bryłowy jest ze związkami zupełnemi, to jest, gdy równania wyrażające związki między jego n punktami materyalnemi są w liczbie $3n-1$, te punkta opisują linie krzywe wyznaczone; wtedy jedyne przemieszczenie przysposobione możebne jest to samo co rzeczywiste przemieszczenie układu. W tym szczególnym przypadku równanie sił żywych uzupełnia określenie ruchu każdego punktu; bo, dołączając równania związkowe, mamy zewszystkiem $3n$ równań potrzebnych do wyznaczenia $3n$ spółrzędnych $x, y, z, \ldots$ w funkcyi czasu t.

Zasada sił żywych, odkryta przez *Huygensa* jest równie prosta jak ogólna. Wprawdzie dostarcza ona jednego tylko równania; ale to równanie, dostateczne w ruchu machin które są układami materyalnemi ze związkami zupełnemi, ma wielką ważność dlatego że służy do ocenienia pracy sił poruszających niezależnie od rodzaju ruchu.

TWIERDZENIE OGÓLNE RUCHU UKŁADÓW MATERYALNYCH ROZCIĄGNIĘTE DO RUCHÓW WZGLĘDNYCH.

145. Cztery zasadnicze twierdzenia któreśmy wyłożyli, i z nich wywiedzione następstwa, mogą się stosować do ruchu układu materyalnego względem osi ruchomych, byle tylko do sił rzeczywistych przyłączono siły pozorne za pomocą których ruch względny przywodzi się do ruchu rzeczywistego. Te siły pozorne są, jako wiadomo, w liczbie dwóch dla każdego z punktów materyalnych układu; jedna jest siłą bezwładności odpowiedającą ruchowi uniesienia, druga siłą odśrodkową składaną. Owoż, są w ruchu względnym punktu materyalnego różne przypadki w których te siły pozorne nie wchodzą obie razem, a nawet i takie w których żadna z tych sił zmyślonych nie figuruje; rozumie się samo z siebie że te same przypadki zdarzają się w ruchu względnym układów materyalnych. O nich więc ogólnie słów kilka.

Gdy osie zmienne, do których się odnosi ruch względny układu materyalnego, poruszają się równolegle do siebie samych, siły odśrodkowe składane są wszystkie zero; wtedy z sił pozornych zostają tylko siły bezwładności odpowiedające ruchowi uniesienia. A jeśli do tego jeszcze ruch przeniesienia osi zmiennych jest prostolinijny i jednostajny, siły bezwładności o których mowa są także zero; w tym przypadku zasadnicze twierdzenia stosują się do ruchu względnego zupełnie tak jak do ruchu samoistego, bez przydania żadnej siły pozornej do sił rzeczywiście działających na układ.

146. Ruch układu materyalnego względem osi mających kierunek stateczny i przechodzących przez środek ciężkości. Uważajmy w szczególności przypadek w którym ruchy różnych części układu materyalnego są odniesione do osi poprowadzonych w kierunku statecznym przez środek ciężkości, i zobaczmy jak każde ze czterech zasadniczych twierdzeń stosuje się do ruchu względnego tego układu.

Ogólne twierdzenie ruchu środka ciężkości nic tu dać nie może; bo jego celem jest pokazać jak się porusza środek ciężkości układu materyalnego, a my już naprzód wiemy że środek ciężkości naszego układu, wzięty za początek spółrzędnych zostaje niezmienny w ruchu względnym który uważamy.

Przejdźmy więc do *ogólnego twierdzenia summy ilości ruchu rzutowanych na osi*. Jeśli oznaczymy przez x, y, z spółrzędne jednego z punktów materyalnych m danego układu, i przez x_1, y_1, z_1 spółrzędne jego środka ciężkości, odniesione do trzech osi stałych, a nazwiemy ξ, η, ζ spółrzędne tego samego punktu m względem trzech osi ruchomych, poprowadzonych przez środek ciężkości równolegle do osi stałych; będzie

$$x = x_1 + \xi, \qquad y = y_1 + \eta, \qquad z = z_1 + \zeta;$$

zkąd

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_1}{dt} + \Sigma m \frac{d\xi}{dt},$$

$$\Sigma m \frac{dy}{dt} = M \frac{dy_1}{dt} + \Sigma m \frac{d\eta}{dt},$$

$$\Sigma m \frac{dz}{dt} = M \frac{dz_1}{dt} + \Sigma m \frac{d\zeta}{dt}.$$

Owoż (129),

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_1}{dt}, \qquad \Sigma m \frac{dy}{dt} = M \frac{dy_1}{dt}, \qquad \Sigma m \frac{dz}{dt} = M \frac{dz}{dt};$$

więc

$$\Sigma m \frac{d\xi}{dt} = 0, \qquad \Sigma m \frac{d\eta}{dt} = 0, \qquad \Sigma m \frac{d\zeta}{dt} = 0.$$

Ztąd wnosimy że *w ruchu względnym układu materyalnego około środka ciężkości summa ilości ruchu rzutowanych na osi jakiejkolwiek jest zero.*

Aby się dowiedzieć czy trzecie ogólne twierdzenie, zwane *zasadą powierzchni*, stosuje się do ruchu względnego, zobaczmy co się dzieje z siłami pozornemi. Owoż, osie zmienne mają, jakośmy założyli, sam tylko ruch przeniesienia; zatem siły odśrodkowe składane są wszystkie zero. Co do sił bezwładności, widzimy łatwo że one są równoległe i idą w stronę przeciwną przyspieszenia środka ciężkości układu, w jego ruchu samoistym; a ponieważ ten ruch jest wyznaczony gdy są wiadome siły poruszające, otrzyma się wielkość każdej siły bezwładności, mnożąc massę punktu, któremu ta siła odpowieda, przez przyspieszenie środka ciężkości układu. Te więc siły bezwładności,

złożone jak gdyby działały na układ bryłowy niezmienny, mają wynikowę równą ich summie i przechodzącą przez środek ciężkości układu; zatem summa ich momentów względem jakiejkolwiek osi poprowadzonej przez ten środek jest zero. Więc zasada powierzchni stosuje się bez przyłączenia sił pozornych do sił rzeczywiście działających na układ. Ztąd wynika że, w przypadku szczególnym w którym siły zewnętrzne rzeczywiste, złożone tak jak gdyby działały na układ bryłowy niezmienny, mają wynikowę zero albo przechodzącą przez środek ciężkości tego układu, zasada powierzchni ma miejsce w ruchu względnym o którym mówimy, odnośnie do jakiejkolwiek płasczyzny rzutów przechodzącej przez środek ciężkości; byle wzięto ten punkt za początek promieni wodzących. W tym przypadku płasczyzna powierzchni maximum zachowuje kierunek stateczny w przestrzeni. Stosując to wszystko do ruchu układu planetarnego, LAPLACE znalazł pierwszy płasczyznę powierzchni maximum, odpowiedającą środkowi ciężkości, w ruchu tego układu względem osi poprowadzonych przez rzeczony środek w kierunkach statecznych, i dał jej imie *płasczyzny niezmiennej* którą zaproponował na płasczyznę stałą w ruchu ciał niebieskich.

147. Można dojść do tychsamych wyników ogólniej przez analizę. Jakoż, nazwijmy x_1, y_1, z_1 spółrzędne początku ruchomego trzech osi równoległych do osi stałych, i połóżmy jako wprzódy:

$$x = x_1 + \xi, \qquad y = y_1 + \eta, \qquad z = z_1 + \zeta.$$

Jeśli poniesiemy te wartości do równań (1) numeru 134, ale nie podstawiając ich w $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, będziemy mieli, biorąc na przykład pierwsze równanie,

$$x_1 \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} - y_1 \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} + \Sigma m\left(\xi \frac{d^2y}{dt^2} - \eta \frac{d^2x}{dt^2}\right)$$
$$= x_1 \Sigma Y - y_1 \Sigma X + \Sigma(Y\xi - X\eta).$$

Owoż (129),

$$\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X, \qquad \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y, \qquad \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z;$$

więc

$$\Sigma m\left(\xi \frac{d^2y}{dt^2} - \eta \frac{d^2x}{dt^2}\right) = \Sigma(Y\xi - X\eta).$$

Podstawmy teraz $x_1 + \xi$ i $y_1 + \eta$ za x i y, będzie

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}\Sigma m\xi - \frac{d^2x_1}{dt^2}\Sigma m\eta + \Sigma m\left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = \Sigma(Y\xi - X\eta).$$

Wykonywając podstawienia takim samym sposobem w dwóch innych równaniach układu (1), i uważając że, na mocy zwykłej notacyi, jest

$$\Sigma m\xi = M\xi_1, \qquad \Sigma m\eta = M\eta_1, \qquad \Sigma m\zeta = M\zeta_1,$$

otrzymamy ostatecznie trzy następujące równania

$$M\left(\xi_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} - \eta_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) + \Sigma m\left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) = \Sigma(Y\xi - X\eta),$$

$$M\left(\zeta_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - \xi_1 \frac{d^2z_1}{dt^2}\right) + \Sigma m\left(\zeta \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) = \Sigma(X\zeta - Z\xi),$$

$$M\left(\eta_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} - \zeta_1 \frac{d^2y_1}{dt^2}\right) + \Sigma m\left(\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) = \Sigma(Z\eta - Y\zeta).$$

Żeby te równania stały się podobnemi do równań rzeczonego

układu (1), trzeba żeby trzy dwumiany

$$\xi_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \eta_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \qquad \zeta_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \xi_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2}, \qquad \eta_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} - \zeta_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2}$$

były zero. Tego potrójnego warunku można dopełnić trzema sposobami.

1° Biorąc środek ciężkości układu materyalnego za początek ruchomy $O_1(x_1, y_1, z_1)$ spółrzędnych względnych ξ, η, ζ, przywodzimy dwumiany do zera; bo wtedy $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, $\zeta_1 = 0$.

2° Te dwumiany będą jeszcze zero, jeśli weźmiemy za początek ruchomy O_1 punkt mający w przestrzeni ruch prostolinijny i jednostajny; bo wtenczas $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2} = 0$.

3° Nakoniec dwumiany znikną, jeśli początek O_1 ma ruch wyznaczony przez warunki

$$\frac{\frac{d^2 x_1}{dt^2}}{\xi_1} = \frac{\frac{d^2 y_1}{dt^2}}{\eta_1} = \frac{\frac{d^2 z_1}{dt^2}}{\zeta_1},$$

to jest, jeśli kierunek przyspieszenia punktu O_1 przechodzi przez środek ciężkości układu.

Wybierając początek ruchomy spółrzędnych względnych jednym z trzech wskazanych sposobów, znajdziemy równania

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \Sigma m\left(\xi \frac{d^2 \eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2 \xi}{dt^2}\right) &= \Sigma(\mathrm{Y}\xi - \mathrm{X}\eta), \\ \Sigma m\left(\zeta \frac{d^2 \xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2 \zeta}{dt^2}\right) &= \Sigma(\mathrm{X}\zeta - \mathrm{Z}\xi), \\ \Sigma m\left(\eta \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2 \eta}{dt^2}\right) &= \Sigma(\mathrm{Z}\eta - \mathrm{Y}\zeta), \end{aligned}$$

które, mając ten sam kształt co równania (1) numeru 134, prowadzą do tych samych następstw. Więc, jeśli siły poruszające różnych punktów materyalnych układu czynią sobie równowagę, albo jeśli, złożone jak gdyby działały na układ niezmienny, mają wynikowę przechodzącą przez początek ruchomy spółrzędnych, drugie strony równań (6) będą zero; ztąd wynika że powierzchnie opisane przez rzuty promieni wodzących na jednej z płaszczyzn spółrzędnych i pomnożone przez massy punktów odpowiedających, czynią summy które rosną proporcyonalnie do czasu poczynając od epoki jakiejkolwiek. Tym tedy sposobem zasada powierzchni zostaje sprawdzona względnie do początku ruchomego spółrzędnych. W naszym układzie planetarnym można wziąć środek ciężkości za początek ruchomy spółrzędnych, albowiem siły poruszające tego układu przywodzą się do działań wzajemnych między różnemi jego częściami; i zasada powierzchni ma miejsce na każdej płaszczyznie poprowadzonej przez środek ciężkości.

W zastosowaniu *zasady sił żywych* do ruchu względnego, układu materyalnego jakiegokolwiek, trzeba uważać przede wszystkiem że siły odśrodkowe składane znikają same z siebie; albowiem, każda z nich, będąc prostopadła do prędkości względnej punktu do którego jest przyłożona, daje pracę zero w ruchu względnym.

Ztąd wynika że zasada sił żywych stosuje się do ruchu układu materyalnego względem osi poprowadzonych w kierunku statecznym przez środek ciężkości, bez przydania żadnej siły pozornej do sił rzeczywiście działających na ten układ. Albowiem, na mocy tego cośmy poprzednio powiedzieli, summa prac sił bezwładności może być zastąpiona przez pracę ich wynikowej która przechodzi przez środek ciężkości układu; więc ta summa prac jest zero w obecnym ruchu względnym, ponieważ środek ciężkości nie przemieszcza się względem osi ruchomych. To nie miałoby miejsca, gdyby wzięto za początek ruchomy spół-

rzędnych inny punkt ruchomy, chyba żeby ten punkt miał ruch prostolinijny i jednostajny.

148. Rozkłada się czasem ruch układu materyalnego na dwa inne ruchy, z których jeden jest ruchem względnym do osi poprowadzonych w kierunku stałym przez środek ciężkości, a drugi ruchem tych osi samych. W tym przypadku istnieje ważny związek między siłą żywą Σmv^2 ruchu samoistego i siłą żywą ruchu względnego którą oznaczymy przez Σmw^2. I w samej rzeczy, dla punktu $m(x_1+\xi,\ y_1+\eta,\ z_1+\zeta)$ jest oczywiście,,

$$v^2 = \frac{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}{dt^2} + \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{dt^2}$$
$$+ 2\left(\frac{dx_1}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Jeśli pomnożymy obie strony przez massę m punktu, i weźmiemy summę podobnych równań odnoszących się do wszystkich punktów materyalnych, nazywając M massę układu, będzie

$$\Sigma mv^2 = Mv_1^2 + \Sigma mw^2 + 2\left(\frac{dx_1}{dt}\Sigma m\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy_1}{dt}\Sigma m\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz_1}{dt}\Sigma m\frac{d\zeta}{dt}\right).$$

Owoż, ponieważ środek ciężkości układu jest wzięty za początek ruchomy spółrzędnych, mamy

$$\Sigma m\xi = 0, \qquad \Sigma m\eta = 0, \qquad \Sigma m\zeta = 0,$$

i temsamem

$$\Sigma m\frac{d\xi}{dt} = 0, \qquad \Sigma m\frac{d\eta}{dt} = 0, \qquad \Sigma m\frac{d\zeta}{dt} = 0;$$

otrzymujemy więc formułę

$$(7) \qquad \Sigma mv^2 = Mv_1^2 + \Sigma mw^2,$$

która pokazuje że siła żywa układu materyalnego w ruchu jest równa sile żywej pochodzącej z jego ruchu względnego około środka ciężkości, powiększonej siłą żywą którąby miała cała massa przeniesiona do tego środka.

Zastąpmy teraz w równaniu (2) ilości Σmv^2, x, y, z przez ich wartości $Mv_1^2 + \Sigma mw^2$, $x_1+\xi$, $y_1+\eta$, $z_1+\zeta$; będzie

$$d.Mv_1^2 + d.\Sigma mw^2 = 2\Sigma(Xdx_1+Ydy_1+Zdz_1)+2\Sigma(Xd\xi+Yd\eta+Zd\zeta).$$

Ale, na mocy twierdzenia ruchu środka ciężkości układu materyalnego, jest

$$\frac{1}{2}d.Mv_1^2 = dx_1\Sigma X + dy_1\Sigma Y + dz_1\Sigma Z = \Sigma(Xdx_1+Ydy_1+Zdz_1);$$

więc, podstawiając tę wortość, znajdujemy równanie

$$(8) \qquad d.\Sigma mw^2 = 2\Sigma(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta),$$

które dowodzi że różniczka siły żywej układu materyalnego, w ruchu względnym około środka ciężkości, jest taka jak gdyby ten ruch był samoisty.

Powiedziawszy wszystko co jest ogólnego w dynamice układu materyalnego jakiegokolwiek, nim pójdziemy dalej zastosujemy najpierwej ogólne zasady ruchu do kilku przykładów, aby lepiej pokazać ich doniosłość w Mechanice rozumowej i użytek w Mechanice praktycznej.

STAŁOŚĆ RÓWNOWAGI UKŁADÓW BRYŁOWYCH.

149. Gdy układ punktów materyalnych w ruchu, pod działaniem sił jakichkolwiek, przechodzi przez położenie w którem

te siły czynią sobie równowagę, wtedy, na mocy zasady prędkości przysposobionych jest równanie

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

do którego siły wewnętrzne nie wchodzą. Owoż, jeśli równania $L = 0$, $M = 0$, $N = 0,\ldots$ wyrażające związki między punktami materyalnemi nie zawierają wydatnie czasu t, jako na przykład w układach bryłowych niezmiennych, można wziąć $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, $\delta z = dz,\ldots$; będzie więc

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0 \quad \text{albo} \quad d\Sigma mv^2 = 0.$$

Ztąd wnosimy że, gdy układ bryłowy przechodzi przez położenie w którem siły poruszające czynią sobie równowagę, wtenczas summa sił żywych Σmv^2 jest zwykle maximum albo minimum.

Ale wzajemnica nie jest ogólnie prawdziwa. Albowiem, jeśli w pewnem położeniu układu summa sił żywych jest maximum albo minimum, nie idzie za tem koniecznie żeby w tem położeniu układu siły poruszające czyniły sobie równowagę; chyba że układ jest ze związkami zupełnemi. Jakoż, mamy wprawdzie

$$d\Sigma mv^2 = 0$$

i temsamem

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = 0.$$

Ale ztąd nie wynika żeby summa prac przysposobionych

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

była zero; bo przemieszczenie przysposobione jakiekolwiek nie jest koniecznie przemieszczeniem rzeczywistem które jest jedyne; δx, δy, $\delta z,\ldots$ mogą mieć inne wartości niż dx, dy, $dz,\ldots$

Chyba że układ ma związki zupełne; w tym tylko szczególnym przypadku przemieszczenia przysposobione δx, δy, δz,... nie różnią się od przemieszczeń istotnych dx, dy, dz,... jakośmy już widzieli. To wszystko dowodzi zarazem że wzajemnica jest prawdziwa w układzie bryłowym ze związkami zupełnemi.

Uważajmy teraz położenie równowagi układu bryłowego, w założeniu że istnieje funkcya sił U której X, Y, Z, X'... są pochodnemi, albo, co to samo, przypuszczając, że summa $\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$ jest różniczką dokładną pewnej funkcyi spółrzędnych x, y, z, x',... uczyńmy

$$2\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz) = df(x, y, z, x',...);$$

będziemy mieli równanie sił żywych

$$\Sigma mv^2 = C + f(x, y, z, x',...),$$

w którem funkcya $f(x, y, z, x',...)$ jest zwykle maximum albo minimum. Owoż, gdy funkcya $f(x, y, z, x',...)$ jest maximum, wtedy równowaga układu bryłowego, jeśli istnieje, jest zawsze stała; to jest, jeśli oddalono bardzo mało punkta układu od położenia równowagi, nadając im prędkości początkowe dostatecznie małe, przemieszczenia tych punktów względem położenia równowagi zostaną bardzo małe, i nie przejdą pewnych wyznaczonych granic.

To twierdzenie, jedno z najważniejszych Mechaniki, bo na niem się opiera teorya małych oscyllacyj, dopiero w ostatnich czasach zostało dowiedzione z pożądaną ścisłością przez Lejeune-Dirichlet, którego dajemy dowodzenie, cokolwiek zmodyfikowane (*).

(*) Żobacz *Journal des mathématiques pures et appliquées par* J. Liouville, tome V, *Stabilité de l'équilibre par* Lejeune-Dirichlet.

Z przyczyny równań związkowych $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$,... spółrzędne wszystkich punktów materyalnych układu są funkcyami małej liczby zmiennych niezależnych. Oznaczmy przez $\alpha + p$, $\beta + q$, $\gamma + r$,... te zmienne niezależne, nazywając α, β, γ,... ich wartości odpowiedające położeniu równowagi, a zaś p, q, r,... przyrosty na końcu czasu t. Tym sposobem funkcya f spółrzędnych x, y, z,... przedstawi się przez funkcyę φ zmiennych niezależnych, i będzie

$$\Sigma mv^2 = C + \varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r, \ldots).$$

Funkcya $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ odpowiedająca wartościom $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$,... wyraża wartość maximum albo minimum względną do położenia równowagi. A jeśli wyznaczymy stateczną dowolną C, uważając na stan początkowy dany w którym v_0, p_0, q_0, r_0,... są wartościami ilości v, p, q, r,... otrzymamy

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0^2 + \varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r, \ldots)$$
$$- \varphi(\alpha + p_0, \beta + q_0, \gamma + r_0, \ldots).$$

Przypuśćmy teraz że funkcya $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, odpowiedająca położeniu równowagi układu, jest maximum, i, ponieważ ta wartość funkcyi jest większa od każdej innej bezpośrednio sąsiedniej, połóżmy

$$\varphi(\alpha + p, \beta + q, \gamma + r, \ldots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) - \psi(p, q, r, \ldots),$$

oznaczając przez $\psi(p, q, r, \ldots)$ funkcyę dodatną; będziemy mieli

$$\varphi(\alpha + p_0, \beta + q_0, \gamma + r_0, \ldots) = \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) - \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots)$$

Ztąd wynika że

$$\psi(0, 0, 0, \ldots) = 0.$$

Podstawiając te wartości, znajdujemy

$$\Sigma mv^2 = \Sigma mv_0^2 + \psi(p_0, q_0, r_0,\ldots) - \psi(p, q, r,\ldots).$$

Poprzedzające równania pokazują że można zawsze wyznaczyć wielkości dodatne p_1, q_1, r_1,... dostatecznie małe, i takie żeby funkcya $\psi(p, q, r,\ldots)$ była ciągle dodatna, gdy wartości samoiste zmiennych $p, q, r,\ldots$ nie przechodzą granic $p_1, q_1, r_1,\ldots$ Nazwijmy k najmniejszą ze wszystkich wartości dodatnych jakie bierze funkcya $\psi(p, q, r,\ldots)$, gdy przynajmniej jedna ze zmiennych $p, q, r,\ldots$ dosięga swojej granicy.

To ustaliwszy, nietrudno dowieśdź że, jeśli $p_0, q_0, r_0,\ldots$ są wzięte liczebnie mniejsze od $p_1, q_1, r_1,\ldots$, i zarazem czynią zadość nierówności

$$\Sigma mv_0^2 + \psi(p_0, q_0, r_0,\ldots) < k,$$

każda ze zmiennych $p, q, r,\ldots$ zostanie przez cały czas ruchu mniejsza od odpowiednej granicy $p_1, q_1, r_1,\ldots$ Jakoż, gdyby się mogło stać przeciwnie, ponieważ zmienne $p, q, r,\ldots$ są funkcyami ciągłemi czasu t, trzebaby najpierwej żeby, w pewnej chwili, jedna albo kilka tych zmiennych były liczebnie równe odpowiedającym granicom $p_1, q_1, r_1,\ldots$ a żadna z pozostałych nie przewyższała swojej; wtenczas wartość funkcyi $\psi(p, q, r,\ldots)$ stałaby się większą od liczby k albo przynajmniej jej równą; byłoby więc

$$\Sigma mv_0^2 + \psi(p_0, q_0, r_0,\ldots) - \psi(p, q, r,\ldots) < 0,$$

albo

$$\Sigma mv^2 < 0.$$

Co niedorzeczne, bo summa sił żywych jest ilością dodatną.

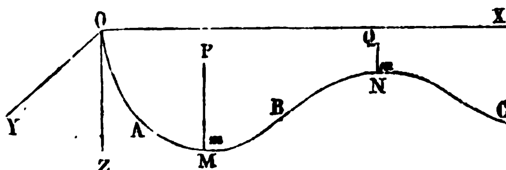
Więc zmienne $p, q, r,\ldots$ mogą być tak małe jak się podoba, dlatego że $p_0, q_0, r_0,\ldots$ mogą być wzięte także tak małe jak

się podoba; zatem punkta układu oddalają się bardzo mało od położenia równowagi, oscyllując około niego; co właśnie oznacza równowagę stałą.

Ztąd wynika jeszcze że prędkości v punktów układu będa zawsze zawarte między granicami wyznaczonemi, ponieważ jest zawsze

$$\Sigma mv^2 \leqq \Sigma mv_0^2 + \psi(p_0, q_0, r_0, \ldots).$$

150. Aby jasno pojmować na czem zależy stałość albo niestałość równowagi, uważajmy różne położenia punktu ciężkiego m na linii stałej jakiejkolwiek ABC. Przypuśćmy naj-



pierwej że punkt m, poprostu położony na linii AB, zajmuje na jej wklęsłości miejsce M najniższe możebne względem sąsiednich. W tem położeniu punkt ciężki m, nie mający żadnej prędkości, ani początkowej ani nabytej, zostaje w spoczynku; bo ciężkość, jego jedyna siła poruszająca, jest normalna do linii stałej AB i przez nią zniszczona. Jeśli punkt m jest trochę oddalony od położenia M równowagi, w jedną albo w drugą stronę, wtedy siła ciężkości, przestając być prostopadła do linii AB, rozkłada się na siłę styczenną i normalną; ostatnia jest zniszczona przez linię stałą AB, a styczenna ciągnie punkt m ku położeniu M, około którego ciąglebу oscyllował gdyby nie było tarcia. To właśnie stanowi równowagę stałą punktu ciężkiego m. Nietrudno teraz pojąć że punkt ciężki m zajmujący miejsce N, najwyższe możebne na wypukłości linii BC

iest w równowadze niestałej; albowiem, jakkolwiekby mało oddalono ten punkt od położenia N równowagi, siła ciężkości, przestając być prostopadła do BC, rozłożyłaby się na styczenną i normalną; ostatnia byłaby zniszczona przez linię stałą BC, ale styczenna zciągałaby na dół punkt m i corazby go więcej odwodziła od położenia N równowagi.

Te oba przypadki równowagi rozróżniają się analitycznie. Jakoż, weźmy oś rzędnych z pionową i skierowaną w stronę ciężkości, i przypuśćmy że punkt ciężki m, wychodząc z punktu O bez prędkości początkowej, porusza się na linii stałej ABC (*fig. powyższa*). Widzimy zaraz że siła żywa punktu materyalnego m, wyrażona przez całkę

$$mv^2 = 2\int(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = 2mgz,$$

ma wartość maximum $2mg.\mathrm{MP}$ w położeniu M równowagi stałej, a zaś wartość minimum $2mg.\mathrm{NQ}$ w położeniu N równowagi niestałej.

To ustaliwszy, szukajmy w jakiem położeniu układ bryłowy ciężki jakikolwiek może być w równowadze stałej. Biorąc osie spółrzędne jako wyżej, znajdujemy :

$$\int\Sigma(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz) = \int\Sigma mgdz = g\Sigma mz + \mathrm{C}.$$

Na mocy twierdzenia dowiedzionego w numerze poprzedzającym, układ bryłowy będzie w równowadze stałej jeśli funkcya sił $\mathrm{U} = \Sigma mz$ ma wartości maximum, to jest gdy summa $2g\Sigma mz$, wyrażająca funkcyę spółrzędnych $f(x, y, z, x'...)$ jest maximum. Owoż, nazywając M massę całego układu i z_1 rzędnę jego środka ciężkości, mamy równość

$$\Sigma mz = \mathrm{M}z_1,$$

która pokazuje że summa $2g\Sigma mz$ jest maximum jeśli rzędna z_1

dosięga wartości maximum; co ma miejsce gdy środek ciężkości układu znajduje się najniżej możebnie.

Ztąd łatwo wnosimy że układ bryłowy ciężki jest w równowadze niestałej, i za najmniejszem poruszeniem przechybnie jeśli summa sił Σmz jest minimum; co ma miejsce gdy środek ciężkości znajduje się najwyżej możebnie.

Więc, według jak siła żywa układu bryłowego ciężkiego jest maximum albo minimum, jego równowaga, jeśli istnieje, jest stała albo niestała.

UDERZENIA CIAŁ BRYŁOWYCH.

151. Gdy dwa ciała bryłowe poruszają się w przestrzeni, a wedle ustawy ruchu mają zajmować w tej samej chwili jedno i tosamo miejsce, wtedy, z przyczyny nieprzenikliwości materyi, nie mogąc się znajdować oba razem na tem miejscu, skoro przychodzą do zetknięcia oddziaływają przeciw sobie, i, odpierając się mniej więcej gwałtownie, sprawiają to co się nazywa *uderzeniem*. Czas przez który trwa uderzenie, chociaż jest niezmiernie krótki, zawiera jednak dwa różne okresy. W pierwszym ciała się naciskają i zwężają, wywierając na siebie parcia równe i przeciwne; a gdy ich odkształcenie stało się największe możebne, wtedy posiadają oba tę samą prędkość normalną w punkcie zetknięcia. W drugim okresie te ciała wracają mniej więcej do pierwotnego kształtu, i, odpychając się nawzajem, tem więcej się oddalają im większa siła ich sprężystości.

Ciała bryłowe naturalne są wszystkie mniej więcej sprężyste; ale stopień sprężystości jest bardzo rozmaity. Żeby łatwiej pojąć skutki uderzeń, potrzebujemy rozróżnić dwa idealne stany ciał bryłowych, to jest ciała *zupełnie niesprężyste* i ciała *doskonale sprężyste;* między temi ciałami skrajnemi mieszczą się wszystkie ciała naturalne.

Gdyby dwa ciała które się uderzają nie posiadały żadnej spręż-

żystości, toby po uderzeniu się, dosięgnąwszy największego odkształcenia, przestały działać na siebie, i, jedno przy drugiem, zachowując kształt jaki im nadało ciśnienie, poruszałyby się oba razem z prędkością spólną. Wtedy, w skutek ciśnienia które zbliżyło cząstki dwóch ciał sąsiednie punktu zetknięcia, praca pochodząca z oddziaływań tych cząstek byłaby odjemna w pierwszym okresie uderzenia, $Idr < 0$; a ponieważ w drugim okresie niema żadnego działania cząsteczkowego, ztąd wnosimy że na końcu uderzenia się dwóch ciał niesprężystych siła żywa układu jest mniejsza niż na początku. Jest więc *strata sił żywych w uderzeniu się ciał zupełnie niesprężystych.*

A gdyby dwa ciała bryłowe po uderzeniu się wracały całkowicie do pierwszego kształtu, to jest gdyby były *doskonale sprężyste*, ich cząstki, przemieszczone tem uderzeniem, zajmowałyby napowrót położenia jakie miały przed uderzeniem; zatem cała praca wynikająca z ciśnień, i zależąca jedynie od zmiany odległości tych cząstek, byłaby zero dla całego czasu przez który trwało uderzenie. Ztąd wnosimy że *summa sił żywych układu dwóch ciał doskonale sprężystych bierze na końcu uderzenia wartość jaką miała na początku.*

W naturze dzieją się rzeczy inaczej, bo niema ciał naturalnych ani zupełnie niesprężystych ani doskonale sprężystych. Ciała bryłowe choćby najmiększe posiadają zawsze pewną sprężystość, a kość słoniowa i kauczuk, najsprężystsze z ciał naturalnych, nie są jeszcze doskonale sprężyste. Nadto, ciała po uderzeniu nie wracają bezpośrednio do pierwotnego kształtu; wykonywają albowiem szereg oscyllacyj, których obszerność jest wprawdzie bardzo mała ale prędkość niezmiernie wielka; te drgania cząstkowe pochłaniają część siły żywej. Otóż dlaczego na końcu uderzenia się ciał naturalnych jest zawsze strata sił żywych.

152. Doświadczenie nauczyło że siły cząsteczkowe, rozwinięte przez uderzenie, mają natężenia nieporównalnie większe od

natężeń sił ciągłych które się ukazują w zjawiskach naturalnych, jako naprzykład ciężkość, i t. p. Dlatego te ostatnie siły mogą być zaniedbane względnie do sił uderzeń; bo ich wpływ, przez czas niezmiernie krótki przez który działa uderzenia, jest prawie nic nieznaczący.

Jeśli w punkcie zetknięcia dwóch ciał uderzających się prędkości nie są skierowane wedle spólnej normalnej, to się rozkładają na dwie inne, z których jedna ma kierunek normalnej a druga leży na płaszczyźnie stycznej. Każda z prędkości stycznych, złożona z drugą wziętą w stronę przeciwną, daje prędkość ślizgania jednego ciała na drugiem na początku uderzenia. Ta prędkość ślizgania zmienia się, w każdej chwili uderzenia, z ruchem wirowania dwóch ciał około ich środków ciężkości gdy normalna spólna nie przechodzi przez te dwa punkta.

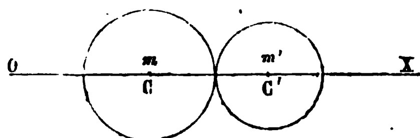
Nawet zaniedbując działania cząsteczkowe styczenne w punkcie zetknięcia dwóch ciał uderzających się, i przypuszczając że te ciała po uderzeniu nie zmieniają znacznie swojego kształtu, teorya ogólna uderzeń ciał jakichkolwiek, przedstawia jeszcze wielkie trudności, z przyczyny niewiadomych wzajemnych działań jakie cząstki składowe tych ciał wywierają na siebie; ale się wielce ułatwia, gdy *uderzenie jest proste*, to jest gdy prędkości dwóch ciał w chwili zetknięcia mają kierunek spólny normalnej, i gdy ta normalna przechodzi przez środki ciężkości.

Nie mogąc wyłożyć całej teoryi uderzeń, która dotąd nie jest ustalona, damy szczegółowe wyobrażenie o uderzeniu prostem, a powiemy tylko słów kilka o uderzeniu pochyłem.

153. Uderzenie proste. Dla uproszczenia wykładu, będziemy uważali uderzenie się dwóch ciał sferycznych złożonych z warstew jednorodnych, przypuszczając że te ciała mają ruch przeniesienia równoległy do linii prostej która łączy ich środki ciężkości C, C'.

Niech będą m, m' massy dwóch ciał, v, v' ich prędkości na

początku, a V, V' prędkości na końcu uderzenia; przypuszczając



prędkości v, v' skierowane w tę samą stronę, jeśli $v > v'$ to massa m uderza massę m', według powyższej figury.

Owoż, skoro massy m, m' w ruchu spotykają się, między ich cząstkami najbliższemi punktu zetknięcia następuje wzajemne ciśnienie; z przyczyny tego ciśnienia rozwijają się siły które zmniejszają prędkość v a powiększają prędkość v'. Zatem na końcu pewnego czasu, zawsze bardzo krótkiego, oba ciała mają spólną prędkość. Ale, od chwili w której dwa ciała uderzające się nabywają tej spólnej prędkości, rzeczy dzieją się różnie według różnej sprężystości. Siły cząsteczkowe, które sprawiły równość prędkości dwóch brył, powstały jedynie skutkiem ich odkształcenia w pobliżu punktu zetknięcia; ciała bryłowe spłaszczyły się przy tym punkcie, i ich spłaszczenie dopóty się powiększało dopóki prędkość ciała m była większa od prędkości ciała m'; ponieważ w tym razie środek ciężkości pierwszego ciała zbliżał się ciągle do środka ciężkości drugiego. Dosięgnąwszy największego możebnego odkształcenia, te dwa ciała, jeśli są zupełnie pozbawione sprężystości, nie dążą do odzyskania kształtów jakie miały przedtem, i, przestając działać na siebie, od chwili w której ich prędkości stały się równe poruszają się razem jedno przy drugiem, z prędkością spólną. Jeśli zaś przeciwnie, dwa ciała uderzające się są doskonale sprężyste, doznawszy największego spłaszczenia w chwili w której ich prędkości są równe, usiłują swoją sprężystością zniszczyć to spłaszczenie; więc od tej chwili prędkość ciała m jeszcze

się zmniejsza a prędkość ciała m' zwiększa, tak że te ciała, odpychając się nawzajem, rozdzielają się nareszcie z prędkościami różnemi.

Szukajmy teraz prędkości jakie biorą dwa ciała po uderzeniu się, przypuszczając że są albo zupełnie niesprężyste albo doskonale sprężyste.

Wedle naszych założeń, układ dwóch ciał bryłowych uderzających się nie jest poddany żadnej sile zewnętrznej, ponieważ siły rozwinięte przez uderzenie są siłami wewnętrznemi względem układu tych ciał. Ale siły wewnętrzne nie wchodzą do równań ilości ruchu rzutowanych; możemy więc, do wyznaczenia szukanych prędkości, użyć zasadniczego twierdzenia ilości ruchu rzutowanych na linii prostej. Na mocy tego twierdzenia, rzutując ruch układu dwóch ciał sferycznych m, m' na linii prostej CC', na której się poruszają ich środki, i porównywając wartość jaką ma summa ilości ruchu, wzięta przed uderzeniem z wartością jaką bierze po uderzeniu, otrzymujemy ogólne równanie

$$(1) \qquad mv + m'v' = mV + m'V'.$$

Jeśli dwa ciała uderzające się są doskonale sprężyste, wtedy, jakośmy pokazali (151), summa sił żywych układu bierze na końcu uderzenia wartość jaką posiadała na początku; mamy więc drugie równanie

$$(2) \qquad mv^2 + m'v'^2 = mV^2 + m'V'^2.$$

154. Nim się posłużymy temi dwoma równaniami, wskażemy jeszcze inny sposób ich znalezienia. Stosując ogólne twierdzenie ruchu środka ciężkości, można wprost otrzymać ruch każdego z dwóch środków ciężkości C i C'; czynimy tedy $OC = x$ i $OC' = x'$. Owoż, widzieliśmy że cząstki dwóch ciał, przez

cały niezmiernie krótki czas uderzenia, wywierają na siebie parcia równe i przeciwne, które są siłami wewnętrznemi; jeśli więc nazwiemy R wynikowę sił wewnętrznych działających na każde z dwóch ciał i przeniesionych do jego środka ciężkości, będziemy mieli równania

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R, \qquad m'\frac{d^2x'}{dt^2} = R.$$

Ztąd wyprowadzamy najpierwej

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + m'\frac{d^2x'}{dt^2} = 0,$$

a potem

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = C.$$

Więc, ponieważ v i v' oznaczają prędkości dwóch ciał w chwili ich spotkania, otrzymujemy

$$m\frac{dx}{dt} + m'\frac{dx'}{dt} = mv + m'v'.$$

To równanie, to samo co (1), wyraża że, jakiekolwiek są sprężystości dwóch ciał, summa ich ilości ruchu zostaje stateczna przez cały czas uderzenia.

Do równania (2) dochodzi się łatwo za pomocą powyższych równań ruchu. Jakoż, te równania dają

$$m\frac{d^2x}{dt^2}dx + m'\frac{d^2x'}{dt^2}dx' = R(dx' - dx).$$

A jeśli położymy

$$x' - x = r,$$

zkąd

$$dx' - dx = dr,$$

podstawiając tę wartość, będziemy mieli

$$d\left(m\frac{dx^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2}{dt^2}\right)=2\mathrm{R}dr.$$

Zatem, całkując, otrzymujemy

$$m\frac{dx^2}{dt^2}+m'\frac{dx'^2}{dt^2}=\mathrm{C}+2\int\mathrm{R}dr.$$

Aby wyznaczyć stateczną C, dość uważać że na początku uderzenia całka $\int \mathrm{R}dr = 0$; co daje

$$mv^2+m'v'^2=\mathrm{C}.$$

Więc ostatecznie

$$m\mathrm{V}^2+m'\mathrm{V}'^2=mv^2+m'v'^2+2\int\mathrm{R}dr.$$

Przez cały czas uderzenia siła R zostaje odpychająca; ale w pierwszym okresie nieskończenie mała praca $\mathrm{R}dr$ jest odjemna, bo $dr < 0$ dlatego że C, C′ zbliżają się; w drugim okresie praca $\mathrm{R}dr$ jest dodatna, bo środki C, C′ oddalają się, co daje $dr > 0$. Owoż, jakośmy już spostrzegali, cząstki ciał sprężystych, strącone w pierwszym okresie uderzenia z położeń pierwotnych, nie wracają do nich bezpośrednio; tak że na końcu drugiego okresu, w chwili gdy się dwa ciała rozłączają, te cząstki nie zajmują jeszcze położeń pierwotnych, wykonywając niezmiernie szybkie drgania które pochłaniają część siły żywej. Ztąd wynika że praca wyrażona przez całkę $\int\mathrm{R}dr$ jest odjemna. Widzimy więc dobrze, za pomocą powyższego równania, że w uderzeniu się ciał naturalnych jakiejkolwiek sprężystości, jest zawsze strata sił żywych. Ale, jeśli przypuścimy że

dwa ciała uderzające się są doskonale sprężyste, co nie istnieje w naturze, wtedy $\int Rdr = 0$, i ostatnie równanie przywodzi się do równania (2).

155. Ciała niesprężyste. Jeśli dwa ciała uderzające się są zupełnie pozbawione sprężystości, to przestając działać na siebie od chwili największego odkształcenia, poruszają się razem jedno przy drugiem, z prędkością spólną którą nazwiemy u. Dla wyznaczenia tej spólnej prędkości dość uczynić $V = V' = u$ w równaniu (1), i będzie

$$u = \frac{mv + m'v'}{m + m'}.$$

Formuła pokazuje że, jeśli przed uderzeniem dwa ciała szły oba w jedną stronę, po uderzeniu będą się poruszały w tę samą stronę z prędkością spólną; a jeśli szły w strony przeciwne, prędkość spólna po uderzeniu będzie szła w stronę tego z dwóch ciał które miało największą ilość ruchu. W szczególności, gdy dwa ciała, idące na spotkanie jedno z drugiem, mają równe ilości ruchu, to po uderzeniu zostaną w spoczynku.

Jeśli massy m i m' są równe, prędkość spólna będzie średnią dwóch prędkości przed uderzeniem, $u = \frac{v + v'}{2}$.

W przypadku w którym ciało m jest w spoczynku, gdy je ciało m spotyka. prędkość spólna po uderzeniu, czyniąc $v' = 0$, będzie

$$u = \frac{mv}{m + m'};$$

wtedy, jeśli massa m' ciała uderzonego jest niezmiernie wielka w porównaniu z massą m ciała uderzającego, prędkość spólna

u będzie dostrzegalnie zero; co się właśnie zdarza gdy ciało niesprężyste upada na ziemię.

156. Ciała sprężyste. Przypuszczając że dwa ciała uderzające się są doskonale sprężyste, mamy do wyznaczenia ich prędkości V i V' po uderzeniu, dwa wyżej znalezione równania

$$(1) \qquad mV + m'V' = mv + m'v',$$

$$(2) \qquad mV^2 + m'V'^2 = mv^2 + m'v'^2.$$

Można dać tym równaniom następującą postać :

$$m(v - V) = m'(V' - v'),$$

$$m(v^2 - V^2) = m'(V'^2 - v'^2);$$

zkąd, dzieląc stronami, wynika

$$v + V = V' + v'$$

albo

$$(3) \qquad V' - V = v - v'.$$

To równanie pokazuje że *prędkość względna każdego z dwóch ciał po uderzeniu jest taka sama jak przed uderzeniem, i tylko zmienia stronę.*

Rozwiązując równania (1) i (3). oba pierwszego stopnia, otrzymuje się łatwo żądane prędkości :

$$(4) \qquad \begin{aligned} V &= \frac{(m - m)v + 2m'v'}{m + m} \\ V' &= \frac{(m' - m)v' + 2mv}{m + m'}. \end{aligned}$$

Nie trudno teraz widzieć że spólna prędkość u, jaką mają dwa ciała w chwili największego ciśnienia, jest średnią dwóch prędkości każdego z tych ciał przed uderzeniem i po uderzeniu. Jakoż, mamy

$$V = \frac{(m - m')v + 2m'v'}{m + m'} = \frac{2(mv + m'v')}{m + m'} - v = 2u - v.$$

Ztąd wnosimy

$$u = \frac{v + V}{2} = \frac{v' + V'}{2}.$$

Roztrząśnijmy przypadki szczególne.

1° Jeśli massy m i m' są równe, będzie na mocy formuł (4)

$$V = v', \qquad V' = v;$$

więc dwa ciała uderzające się zamieniły prędkości między sobą.

2° Przypuśćmy że ciało uderzone m' jest w spoczynku, to jest uczyńmy $v' = 0$; otrzymamy

$$V = \frac{(m - m')v}{m + m'}, \qquad V' = \frac{2mv}{m + m'}.$$

Prędkość V' ciała uderzonego ma oczywiście znak prędkości v, a prędkość V ciała uderzającego zależy od znaku różnicy $m - m'$.

Jeśli $m - m' > 0$, ciało uderzające kontynuje ruch w kierunku jaki miało przed uderzeniem.

Jeśli przeciwnie $m - m' < 0$, ciało uderzające cofa się.

Nakoniec, jeśli $m - m' = 0$, będzie

$$V = 0 \quad \text{i} \quad V' = v;$$

wtenczas ciało uderzające zostaje w spoczynku, oddawszy całą swoją prędkość ciału uderzonemu. Co być powinno, ponieważ w razie równości mass ciała uderzające się przemieniają swoje prędkości.

Ten ostatni ciekawy przypadek łatwo się sprawdza doświadczeniem. Bile z kości słoniowej, w liczbie jakiejkolwiek, mające równe massy, są zawieszone tak żeby się stykały jedna po drugiej i żeby ich środki były w linii prostej; wtedy, jeśli inna bila, równej massy, uderzy pierwszą z tych bil w kierunku linii środków, wszystkie bile, wyjąwszy ostatnią, pozostaną w spoczynku, a ostatnia sama jedna oddali się z prędkością bili uderzającej.

Ale, jeśli massa m', w spoczynku przed uderzeniem, jest bardzo wielka względem massy uderzającej m, natenczas ciało uderzone nie będzie miało prawie żadnej prędkości, a zaś ciało uderzające weźmie prędkość prawie równą i przeciwną tej którą miało przed uderzeniem. Ten wynik tłumaczy dlaczego można kuć żelazo na mocnem kowadle położonem na kolanach, nie sprawiając żadnego wstrząśnienia. Prędkość udzielona kowadłu i jego podporom jest bardzo mała względem prędkości młota, i dlatego naturalna sprężystość tych ciał wystarcza do zniweczenia skutków uderzeń.

Nareszcie, przypuśćmy że ciało sferyczne w spoczynku ma promień nieskończenie wielki, i temsamem massę nieskończenie wielką, będziemy mieli przypadek w którym ciało m, poruszające się prostopadle do płaszczyzny stałej m', uderza tę płaszczyznę : aby otrzymać prędkości V i V', trzeba w ostatnich ogólnych formułach uczynić $v = 0$ i $m' = \infty$, co daje

$$V = -v, \qquad V' = 0.$$

Te wartości pokazują że ciało m, doskonale sprężyste, uderzając normalnie płaszczyznę sprężystą stałą, odbija się od niej z prędkością równą i przeciwną tej jaką miało przed uderzeniem. Bila z kości słoniowej, upuszczona normalnie na stół marmurowy sprawdza mniej więcej dokładnie to zjawisko, wznosząc się niemal do wysokości z której spadła.

157. Uderzenie pochyłe. Uważajmy ciało sferyczne jednorodne, które uderza pochyło płaszczyznę stałą, i rozłóżmy jego prędkość v w chwili uderzenia na dwie, jedną normalną drugą styczenną względem tej płaszczyzny. Widzimy łatwo że prędkość styczenna zostaje ta sama po uderzeniu, a tylko prędkość normalna zmienia się wedle ustawy uderzenia prostego. Ztąd, stosownie do stopnia sprężystości, wynika że :

1° Ciało nie mające żadnej sprężystości ślizga po uderzeniu na płaszczyznie, z prędkością równą składowej styczennej.

2° Prędkość ciała doskonale sprężystego jest wynikową składowej styczennej początkowej, i składowej normalnej która jest równa i przeciwna normalnej paczątkowej. Więc ta wynikowa czyni z normalną do płaszczyzny taki sam kąt jaki z nią czyni prędkość początkowa. Co daje ważne twierdzenie : *Ciało doskonale sprężyste, uderzające pochyło płaszczyznę stałą, odbija się od niej tak że kąt odbicia jest równy kątowi wpadnięcia.*

Gdy przeszkoda stała nie jest płaszczyzną ale powierzchnią krzywą jakąkolwiek, te same następstwa mają miejsce względem płaszczyzny stycznej do tej powierzchni w punkcie jej spotkania z ciałem uderzającem. Ale, uważajmy rzeczy ogólniej, i wyobraźmy sobie że, w chwili gdy się dwa ciała sferyczne C, C' uderzają, rozłożono każdą z ich prędkości na dwie inne, na normalną i styczenną; składowa normalna skierowana wedle spólnej normalnej CC', a składowa styczenna leżąca na płaszczyznie stycznej. Niech będą n i s te składowe dla massy m,

a zaś n' i s' dla massy m', i, jako zwykle, rozróżnijmy dwa stany sprężystości :

1° Jeśli dwa ciała uderzające się są zupełnie niesprężyste, po uderzeniu będą miały najpierwej prędkość normalną spólną, którą oznaczymy przez

$$N = \frac{mn + m'n'}{m + m'};$$

i do tego jeszcze prędkości styczenne s i s', prostopadłe do CC.

2° Uważajmy dwa ciała doskonale sprężyste, i nazwijmy N, N′ składowe normalne ich prędkości po uderzeniu; wartości tych składowych, na mocy formuły (4), są

$$N = \frac{(m - m')n + 2m'n'}{m + m'}$$

$$N' = \frac{(m' - m)n' + 2mn}{m + m'}.$$

Te składowe normalne dołączone do składowych styczennych S, S′, dadzą wielkość i kierunek szukanych prędkości dwóch ciał po uderzeniu pochyłem.

Jeśli $m = m'$, będzie

$$N = n', \qquad N' = n.$$

Więc, w uderzeniu pochyłem, dwa ciała zamieniają między sobą prędkości normalne tak jak w uderzeniu prostem.

Gdy massa m' jest pierwotnie w spoczynku, $n' = 0$; zatem

$$N = \frac{(m - m')n}{m + m'}, \qquad N' = \frac{2mn}{m + m'}.$$

Wtedy, jeśli jeszcze $m = m'$, będzie $N = 0$ i $N = n$; więc ciało m po uderzeniu weźmie kierunek prostopadły do spólnej normalnej CC', a ciało m' pójdzie w kierunku tej normalnej.

Ale, jeśli massa m' rośnie nieograniczenie względem massy m, natenczas N dąży do $-n$, a zaś N' maleje aż do zera. To przypuszczenie prowadzi do przypadku, już wyżej okazanego, w którym ciało doskonale sprężyste uderza płasczyznę stałą, i od niej się odbija pod kątem równym kątowi wpadnięcia.

Zogólniając wszystko co poprzedza, łatwo pojmiemy że w przypadku ciał niedoskonale sprężystych, jakiemi są ciała naturalne, prędkość po uderzeniu pochyłem jest zawsze mniejsza od prędkości pierwotnej, a kąt odbicia zawsze większy od kąta wpadnięcia; albo innemi słowy, ciało naturalne w ruchu po uderzeniu oddala się mniej od płasczyzny stycznej niż gdyby było doskonale sprężyste.

STRATA SIŁY ŻYWEJ W UDERZENIU CIAŁ NATURALNYCH.

158. Widzieliśmy że w uderzeniu prostem ciał niedoskonale sprężystych jest zawsze strata sił żywych (154). Ta strata, w dwóch ciałach nie mających żadnej sprężystości wyraża się przez

$$mv^2 + m'v'^2 - (m + m')u^2.$$

Wartość straty sił żywych może się przedstawić w różnych kształtach dogodnych do zastosowania. I tak, jeśli zamiast u położymy jego wartość $\frac{mv + m'v'}{m + m'}$, będziemy mieli

$$mv^2 + m'v'^2 - \frac{(mv + m'v')^2}{m + m'} = \frac{mm'}{m + m'}(v - v')^2.$$

Na mocy tej formuły, gdy dwa ciała uderzające się idą w strony przeciwne, strata sił żywych wyraża się przez

$$\frac{mm'}{m+m'}(v+v')^2.$$

Otrzymujemy tu ważny wynik, który naucza że w budowie machin trzeba starannie unikać żeby ciała niė uderzały się z prędkościami przeciwnemi, bo strata sił żywych byłaby największa możebna.

Można jeszcze dać inną postać wyrażeniu straty sił żywych. Jakoż, dodając do tego wyrażenia wartość zero $2(m+m')u^2 - 2(mx+m'x')u$, będzie

$$mv^2+m'v'^2+(m+m')u^2-2(mv+m'v')u=m(v-u)^2+m'(u-v')^2.$$

Tak przedstawione wyrażenie okazuje wydatnie że *strata siły żywej, w uderzeniu się ciał niesprężystych, jest równa summie sił żywych odpowiedających prędkościom straconym i zyskanym* $v-u$, $u-v'$ *przez tė dwa ciała.*

Wysłowiona własność stanowi twierdzenie KARNOTA (*Carnot*), którego ogólności poniżej dowiedziemy.

Gdy ciało uderzone zostaje w spoczynku, strata siły żywej układu staje się

$$\frac{m}{m+m'}mv^2,$$

jest ułamkiem siły żywej ciała uderzającego tem mniejszym im jest mniejsza massa ciała uderzonego względem massy uderzającej; tak że siła żywa może być prawie całkiem pochłonięta przez uderzenie. W przypadku dwóch mass równych ta strata jest połową siły żywej ciała uderzającego.

159. Średnia wartość siły ciśnienia, i czas średni uderzenia. Oznaczmy przez R_1 średnie natężenie siły R ciśnienia, przez ι i ι' przygniecenie każdego z dwóch ciał uderzających się. W ciałach zupełnie niesprężystych praca siły ciśnienia R, spożyta na przygniecenie, jest równa połowie straty sił żywych; co daje

$$\int_0^{\iota+\iota'} R dr = R_1(\iota + \iota') = \frac{mm'}{2(m+m')}(v - v')^2,$$

więc średnia wartość R_1 siły ciśnienia równa się

$$R_1 = \frac{mm'(v-v')^2}{2(m+m')(\iota+\iota')}$$

Dla wyrachowania czasu uderzenia, trzebaby wiedzieć wedle jakiej ustawy cząstki ciał uderzających się odpierają ciśnienie. Ale zapewne długo jeszcze ta ustawa, dotycząca ruchu cząstek składowych, nie będzie znana. Żeby więc dać tylko wyobrażenie niezmiernej szybkości z jaką się odbywa uderzenie, przypuśćmy że opór cząsteczkowy jest stateczny, i ma za wartość natężenie średnie R_1; a ponieważ środek ciężkości każdego z dwóch ciał porusza się jako punkt materyalny, w którymby cała massa była zkoncentrowana i siły zewnętrzne były przyłożone, nazywając θ czas uderzenia mamy

$$mu - mv = -R_1\theta, \qquad m'u - m'v' = R_1\theta;$$

zkąd, rugując u, otrzymujemy

$$\theta = \frac{mm'(v-v')}{(m+m')R_1}.$$

Jeśli więc podstawimy znalezioną powyżej wartość R_1,

znajdziemy

$$\theta = \frac{2(\varepsilon + \varepsilon')}{v - v'}.$$

Dwa przybliżone wyniki dowodzą że średnia wartość R_1 siły ciśnienia jest tem większa, a czas θ uderzenia tem mniejszy, im mniejszym odkształceniom ε, ε' ciała uderzające się ulegają.

Na zastosowanie weźmiemy następujący przykład z *Mechaniki przemysłowej* PONCELETA (*).

Sześcian żelazny, ważący 300 kilogrammów, został upuszczony z wysokości $1^m,30$ na ciało mniej więcej miękkie zakończone płaszczyzną poziomą, w które przeniknął na $0^m,02$ jedną ze swoich ścian równoległych do tej płaszczyzny. Znaleźć ilości θ i R_1.

Prędkość sześcianu żelaznego spadającego, w chwili gdy dotyka ciała miękkiego, jest dana przez wiadomą formułę

$$v = \sqrt{2.9,8088.1,30} = 5,04...$$

nadto mamy

$$v' = 0, \qquad \varepsilon' = 0,02$$

a bierzemy $\varepsilon = 0$, dlatego że odkształcenie żelaza jest prawie żadne; będzie więc okrągło

$$\theta = 0^s,008.$$

(*) *Introduction à la Mécanique industrielle*, par PONCELET, membre de l'Institut. 3e édition. Paris, 1870.

Co do średniej wartości R_1; ta ilość łatwo się wyznacza za pomocą przybliżonej formuły którąśmy wyżej wskazali, ale ją można jeszcze łatwiej wprost otrzymać. Jakoż, praca 300.1,30 ciała uderzającego, w chwili zetknięcia, jest prawie cała spożyta na zmianę kształtu ciała uderzonego jeśli to ostatnie stanowi część gruntu, bo wtedy massa uderzona jest niezmiernie wielka względem massy uderzającej. Owoż, ta praca równa się wieloczynowi $R_1.0{,}02$; więc

$$R_1.0{,}02 = 300.1{,}30.$$

Ztąd wynika wartość przybliżona

$$R_1 = 19500 \text{ kilog.}$$

160. Wbijanie pałów. Gdy prostem parciem nie można przezwyciężyć oporu, używa się siły uderzenia. I tak, za pomocą kafarów wbija się pale w grunt który nie jest dostatecznie stały aby zdołał wytrzymać fundacye budowli. Opierając się na tem cośmy o stracie siły żywej powiedzieli, łatwo wiedzieć pod jakiemi warunkami praca pochodząca z siły uderzenia wydaje najkorzystniejszy skutek, i kiedy jest najmniejsze zniszczenie palów przez massę uderzającą.

Niech będzie P ciężar massy uderzającej w kafarze, H wysokość jej spadku, P' ciężar pala. Praca poruszająca ma za miarę PH; a ponieważ praca przedstawia połowę siły żywej, więc, stosownie do formuły (158) dającej stratę siły żywej gdy ciało uderzone zostaje w spoczynku, część pracy pochodzącej z uderzenia, która niszczy pal, wyraża się przez

$$\frac{P'}{P + P'} \cdot PH.$$

Zatem praca użyteczna, mocą której pal wchodzi w ziemię,

równa się

$$PH - \frac{P'}{P+P'} \cdot PH = \frac{PH}{1+\frac{P'}{P}}.$$

Ta wartość pokazuje że praca użyteczna jest tem większa, a praca szkodliwa, niszcząca głowę pala, tem mniejsza im znaczniejszy ciężar massy uderzającej. Więc najkorzystniej jest używać kafarów mających massy uderzające ciężkie i spadające z małej wysokości. To wszystko dobrze tłumaczy dlaczego łatwiej wbić gwóźdź, bez skrzywienia, uderzając go małemi razami ale dużym młotkiem niż wielkiemi razami a małym młotkiem.

STRATA SIŁ ŻYWYCH PRZEZ UDERZENIE ALBO RAPTOWNĄ ZMIANĘ ZWIĄZKÓW UKŁADU MATERYALNEGO.

161. Niech będzie w ruchu układ materyalny jakikolwiek, którego związki nie zawierają wydatnie czasu t. Przypuszczając że ten układ doznał uderzenia, albo że nowe związki zostały raptem wprowadzone między jego punktami, zobaczmy jakiej zmianie ulegnie siła żywa.

Przez czas niezmiernie krótki, w którym się modyfikują związki, można zaniedbać siły ciągłe, jako ciężkość, albo inne, bo ich wpływ na punkta materyalne układu jest niezmiernie mały w porównaniu z działaniem sił uderzeń. Oznaczmy przez a, b, c składowe prędkości punktu m przed uderzeniem, a przez A, B, C składowe jego prędkości po uderzeniu. Na mocy zasady d'Alemberta, zastosowanej do sił chwilowych, jest równowaga między temi siłami i ilościami ruchu których składowe

$$m(a-A), \qquad m(b-B), \qquad m(c-C)$$

są uważane jako siły.

Owoż, jeśli za przemieszczenie przysposobione układu weźmiemy jego przemieszczenie rzeczywiste, które istotnie ma miejsce po wprowadzeniu nowych związków i z ich zachowaniem, ogólne równanie pracy przysposobionej nie będzie zawierało niewiadomych sił uderzeń, pochodzących z gwałtownej zmiany związków; bo te siły, po dwie równe i wprost przeciwne, dają pracę przysposobioną zero. Więc to ógólne równanie jest

$$\sum m\{(a-A)dx+(b-B)dy+(c-C)dz\}=0.$$

Ale

$$dx=Adt,\qquad dy=Bdt,\qquad dz=Cdt;$$

zatem

$$\sum m(aA+bB+cC-A^2-B^2-C^2)=0.$$

Teraz uważajmy że

$$(a-A)^2+(b-B)^2+(c-C)^2-(a^2+b^2+c^2+A^2+B^2+C^2)$$
$$+2(aA+bB+cC)=0;$$

odciągając tę wartość zero od dwa razy wziętej ilości w nawiasach ostatniego równania, otrzymujemy

$$\sum m(a^2+b^2+c^2)-\sum m(A^2+B^2+C^2)$$
$$-\sum m\{(a-A)^2+(b-B)^2+(c-C)^2\}=0;$$

a jeśli oznaczymy przez v prędkość punktu m w chwili uderzenia, albo wprowadzenia nowych związków, przez V jego prędkość po nastałej zmianie, przez w *prędkość straconą*, to jest prędkość która złożona z prędkością V wydaje prędkość v,

będziemy mieli po prostu

$$\sum mv^2 - \sum mV^2 = \sum mw^2.$$

Równanie wyraża ważne TWIERDZENIE. *W uderzeniu układu materyalnego w ruchu, albo w raptownem wprowadzeniu nowych związków, jest zawsze strata sił żywych która się równa summie sił żywych odpowiedających prędkościom straconym.*

To ogólne twierdzenie zawiera jako przypadek szczególny twierdzenie KARNOTA, dotyczące straty siły żywej w uderzeniu się dwóch ciał nie mających żadnej sprężystości, któreśmy już wyłożyli (158). Autor rozciągnął swoje twierdzenie do przypadku w którym dwa ciała uderzające się posiadają jakikolwiek stopień sprężystości; ale trudność wyznaczenia tego stopnia czyni prawie niemożebnem użycie takiego twierdzenia w obecnym stanie umiejętności.

162. DZIAŁANIE SPRĘŻYN. Weźmy jeszcze, na zastosowanie ogólnych twierdzeń dynamiki, następujący przykład który pokazuje jaką zmianę wprowadza prędkość nabyta do stanu sprężystości ciał w ruchu.

Przypuśćmy że pręt sprężysty, utkwiony w swojej skrajności wyższej, niesie ciężar P zawieszony u skrajności niższej; ten ciężar najpierwej podtrzymywany a potem raptem opuszczony spada biorąc pewną prędkość, i spuszcza się niżej niż gdyby się znajdował w stanie spoczynku. Ale wkrótce tężność pręta niszczy nabytą prędkość, i ciężar P pod działaniem tej tężności wznosi się; poczem znowu się zniża. Tym sposobem powstaje ruch oscyllacyjny.

Niech będzie x wydłużenie pręta. Doświadczenie dowodzi że tężność T pręta sprężystego jest proporcyonalna do jego wydłużenia x, do przecięcia prostego ϵ, i odwrotnie propor-

yonalna do długości L; mamy więc

$$T = \frac{ax}{L},$$

oznaczając przez a *spółczynnik sprężystości*, który zależy od natury ciała i od jego stanu fizycznego.

Wprowadźmy teraz wydłużenie statyczne, jakieby wziął pręt pod działaniem ciężaru P nie mającego żadnej prędkości. Jeśli nazwiemy l wydłużenie statyczne, będzie

$$P = \frac{al}{L}.$$

Zatem

$$\frac{T}{P} = \frac{x}{l}.$$

To ustaliwszy, szukajmy czemu się równa stosunek $\frac{x}{l}$ wydłużenia dynamicznego do wydłużenia statycznego, zaniedbując massę pręta i uważając P jako ciężar punktu materyalnego. Ponieważ ruch ciężaru P odbywa się w linii prostej, jego równanie różniczkowe jest

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = P - T;$$

jeśli więc zastąpimy m i T przez ich wartości $\frac{P}{g}$ i $\frac{Px}{l}$, będziemy mieli

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Zkąd, całkując, otrzymujemy

$$\frac{dx^2}{dt^2} = g\left(2x - \frac{x^2}{l}\right).$$

Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, bo powinno być $\frac{dx}{dt} = 0$ dla $x = 0$.

To równanie daje wydłużenie dynamiczne. Jakoż, pręt przestaje się wydłużać kiedy $\frac{dx}{dt} = 0$; czyniąc to przypuszczenie w powyższem równaniu, znajdujemy

$$x = 0 \quad \text{i} \quad x = 2l.$$

Więc wydłużenie dynamiczne jest dwa razy większe od statycznego.

Aby zcałkować ostatnie równanie różniczkowe, dajemy mu kształt następujący

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{2lx - x^2}} = \frac{-\,d(l - x)}{\sqrt{l^2 - (l - x)^2}}.$$

Zkąd, wykonywając całkowanie, otrzymujemy

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{łuk dos}\,\frac{l - x}{l} + C.$$

A jeśli czas liczy się od chwili w której ciężar P został puszczony, będzie $C = 0$; więc ostatecznie

$$t\sqrt{\frac{g}{l}} = \text{łuk dos}\,\frac{l - x}{l}, \quad \text{albo} \quad \frac{x}{l} = 1 - \text{dos}\,t\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Chcąc mieć czas oscyllacyj sprężyny pręta, trzeba uczynić $x = 2l$; będzie wtedy

$$t = \pi\sqrt{\frac{g}{l}},$$

formuła oscyllacyj wahadła prostego. Więc oscyllacye sprężyny są ściśle *równoczesne* jakakolwiek ich obszerność, gdy przeciwnie, równoczesność oscyllacyj wahadła pojedynczego ma miejsce tylko w bardzo małych oscyllacyach. Ale dokładność tego wyniku zawiera się w granicach sprężystości pręta, których tężność T przechodzić nie może bez nadwerężenia jego wytrzymałości.

ROZDZIAŁ II.

INNE ZASADY I OGÓLNE RÓWNANIA RUCHU.

ZASADA NAJMNIEJSZEGO DZIAŁANIA.

163. Jeśli do danego układu punktów materyalnych, ze związkami i pod działaniem sił jakichkolwiek, zasada sił żywych stosuje się, wtedy, ze wszystkich ruchów zgodnych z temi związkami, dla ruchu który układ bierze istotnie, całka

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum mvds,$$

rozciągnięta do wszystkich punktów od początku aż do końca ruchu, jest ogólnie minimum, to jest ma wartość mniejszą niż dla każdego innego z ruchów możebnych i w tych samych granicach.

Jakoż, warunek konieczny żeby całka (1) była minimum albo maximum jest

$$\delta \int_{t_0} \sum mvds = 0$$

albo

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum m(\delta vds + v\delta ds) = 0.$$

Dla wyrachowania pierwszej części zmienności wyraźmy ds przez vdt, będzie

$$\sum m\delta vds = dt\sum mv\delta v = \frac{dt}{2}\,\delta\sum mv^2.$$

Ale, ponieważ zasada sił żywych ma miejsce, albo co to samo, ponieważ istnieje funkcya sił $U = \varphi(x, y, z, x'...)$, mamy

$$\sum mv^2 = 2\varphi(x, y, z, x'...) + C;$$

co daje

$$\frac{1}{2}\delta\sum mv^2 = \frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}dz + \frac{d\varphi}{dx'}\delta x' + ...$$

albo

$$\frac{1}{2}\delta\sum mv^2 = \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

więc

$$\int\sum m\delta vds = \int\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Aby znaleźć drugą część zmienności, uważajmy że równanie

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

daje

$$ds\delta ds = dx\delta dx + dy\delta dy + dz\delta dz,$$

albo

$$v\delta ds = \frac{dx}{dt}\delta dx + \frac{dy}{dt}\delta dy + \frac{dz}{dt}\delta dz;$$

zatem

$$\int \sum mv\delta ds = \int \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta dx + \frac{dy}{dt}\,\delta dy + \frac{dz}{dt}\,\delta\, dz\right).$$

Zkąd, całkując częściami w granicach czasu t_0 i t_1, otrzymujemy

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum mv\delta ds = \left\{ \sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x + \frac{dy}{dt}\,\delta y + \frac{dz}{dt}\,\delta z\right)\right\}_{t_0}^{t_1}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1} d \sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right).$$

Część zcałkowana jest zero, dlatego że skrajności linij opisanych przez punkta układu zostają te same.

Jeśli teraz dodamy obie części zmienności całki (1), będziemy mieli

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum mvds = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum \left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}.$$

Owoż ta wartość jest zero, na mocy ogólnego równania dynamiki; więc

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum mvds = 0.$$

Całka $\int_{t_0}^{t_1} \sum mvds$ jest ogólnie minimum, bo z natury zadania wynika że maximum być nie może; ale są szczególne

przypadki w których ta całka nie jest ani minimum ani maximum. I tak, przypuśćmy że punkt materyalny, przymuszony poruszać się na powierzchni stałej, nie jest poddany żadnej sile zewnętrznej. W tem założeniu siła żywa punktu ruchomego jest stateczna i temsamem jego prędkość v jest także stateczna; będzie zatem

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum mds' = mvs.$$

Opisana droga, jako wiemy (*Tom* I, n^ro 232), jest linią geodezyjną powierzchni, ogólnie najkrótszą; ale, gdy dana powierzchnia jest sferą, jej linia geodezyjna jest łukiem koła wielkiego, a ten łuk wtedy tylko jest najkrótszą drogą kiedy jest mniejszy od półokręgu. Albowiem, jeśli się równa półokręgowi to jest jedną z pomiędzy nieskończonej liczby najkrótszych dróg, a jeśli przechodzi półokrąg to oczywiście nie jest ani najkrótszą ani najdłuższą drogą od jednej skrajności do drugiej.

Uważajmy nakoniec układ punktów materyalnych w ruchu na który nie działa żadna siła zewnętrzna. W tym przypadku, prędkości punktów są stateczne i temsamem siła żywa układu jest stateczna; zatem, nazywając k jej wartość, mamy

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum mv^2 dt = k \int_{t_0}^{t_1} dt = k(t_1 - t_0).$$

Więc czas $t_1 - t_0$, w którym układ przechodzi z jednego położenia do drugiego jest ogólnie minimum, to jest mniejszy niż gdyby, wydając tę samą siłę żywą, układ szedł inną drogą.

Jednakże może się zdarzyć w szczególnych przypadkach że ten czas nie będzie ani minimum ani maximum.

RÓWNANIA LAGRANGE'A.

164. Niech będzie układ n punktów materyalnych, pod działaniem sił jakichkolwiek, poddany k związkom wyrażonym przez równania między $3n$ spółrzędnemi $x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots$ z których tylko $3n-k$ mogą być uważane za zmienne niezależne. Zdarza się często że dla ułatwienia rozwiązań, trzeba przemienić zmienne niezależne. W tym celu Lagrange, w swojej *Mechanice analitycznej*, daje metodę za pomocą której można łatwo otrzymać ogólne równania ruchu w funkcyi zmiennych jakichkolwiek. Tę ważną metodę teraz wyłożymy.

Wiemy że zasada d'Alemberta, zkombinowana z zasadą prędkości przysposobionych, daje ogólne równanie dynamiki

$$(1) \qquad \sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0,$$

w którem spółrzędne $x, y, z, x_1, y_1, z_1 \ldots$ są prostokątne. Owoż, wyobraźmy sobie że spółrzędne $x, y, z, x_1 \ldots$ zostały wyrażone w funkcyach ilości zmiennych jakichkolwiek $q_1, q_2, q_3 \ldots$; te funkcye mogą zawierać czas t wydatnie, a nowe zmienne mogą nie być koniecznie w liczbie $3n$, i nawet liczba zmiennych niezależnych może być mniejsza od $3n-k$. Aby przekształcić ogólne równanie (1) na inne także ogólne w funkcyi nowych zmiennych $q_1, q_2, q_3 \ldots$, uważajmy że, wedle założenia, spółrzędna x, na przykład, jest w ogólności funkcyą czasu t i zmiennych $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$x = \varphi(t, q_1, q_2, q_3 \ldots);$$

zatem, oznaczając przez $\frac{dx}{dt}$ pochodnę częściową spółrzędnej x, a przez $\frac{d.x}{dt}$ albo przez x' jej pochodnę zupełną względem czasu t, i podobnie przez q'_1, q'_2, q'_3,... pochodne zupełne zmiennych q_1, q_2, q_3... względem t, będzie

$$(a) \qquad x' = \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dq_1} q'_1 + \frac{dx}{dq_2} q'_2 + \frac{dx}{dq_3} q'_3 + \ldots$$

$$(b) \qquad \delta x = \frac{dx}{dq_1} \delta q_1 + \frac{dx}{dq_2} \delta q_2 + \frac{dx}{dq_3} \delta q_3 + \ldots$$

Jeśli więc, biorąc najpierwej części zmienności δx, δy, δz.... odpowiedające samej zmienności δq_1, podstawimy je w równaniu (1), otrzymamy wyraz przekształcenia

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\frac{dx}{dq_1} + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\frac{dy}{dq_1} + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\frac{dz}{dq_1}\right\}\delta q_1$$

który zawiera dwie summy

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dq_1} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dq_1} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{dz}{dq_1}\right) \text{ i } \sum\left(X\frac{dx}{dq_1} + Y\frac{dy}{dq_1} + Z\frac{dz}{dq_1}\right).$$

Zostawiając drugą summę na boku, zajmiemy się przekształceniem pierwszej. Widzimy łatwo że ta summa rozkłada się na dwie części następującego kształtu

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dx}{dq_1} + y'\frac{dy}{dq_1} + z'\frac{dz}{dq_1}\right)$$

$$-\sum m\left(x'\frac{d}{dt}\frac{dx}{dq_1} + y'\frac{d}{dt}\frac{dy}{dq_1} + z'\frac{d}{dt}\frac{dz}{dq_1}\right).$$

Owoż, druga część może wziąć postać

$$\sum m\left(x'\frac{dx'}{dq_1}+y'\frac{dy'}{dq_1}+z'\frac{dz'}{dq_1}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dq_1}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Co do pierwszej części, uważajmy że równanie (a), zróżniczkowane względem q'_1, daje

$$\frac{dx'}{dq'_1}=\frac{dx}{dq_1};$$

zkąd wnosimy że jest tak samo

$$\frac{dy'}{dq'_1}=\frac{dy}{dq_1} \quad \text{i} \quad \frac{dz'}{dq'_1}=\frac{dz}{dq_1};$$

przez podstawienie tych wartości pierwsza część w mowie będąca staje się

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x'\frac{dx'}{dq'_1}+y'\frac{dy'}{dq'_1}+z'\frac{dz'}{dq'_1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\frac{d}{dq'_1}\sum m(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Więc jeśli położymy

$$\sum m(x'^2+y'^2+z'^2)=2T,$$

i uczynimy zarazem

$$\sum\left(X\frac{dx}{dq_1}+Y\frac{dy}{dq_1}+Z\frac{dz}{dq_1}\right)=Q_1,$$

cała część przekształcenia równania (1) odpowiedająca zmienności δq_1 wyrazi się przez

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_1} - \frac{dT}{dq_1} - Q_1\right)\delta q_1.$$

Pojmujemy teraz łatwo że część przekształcenia odpowiedająca zmienności δq_2 wyraża się podobnie przez

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_2} - \frac{dT}{dq_2} - Q_2\right)\delta q_2;$$

i tak dalej. Więc, biorąc summę wszystkich części przekształcenia równania (1), otrzymujemy ogólne równanie dynamiki odniesione do zmiennych jakichkolwiek $q_1, q_2, q_3, \ldots$

$$(2) \qquad \sum\left\{\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq} - Q\right\}\delta q = 0.$$

Gdy między zmiennemi $q_1, q_2, q_3, \ldots$ niema związków, wszystkie zmienności $\delta q_1, \delta q_2, \delta q_3, \ldots$ są dowolne, i równanie (2) rozdziela się na ogólne równania ruchu

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{dT}{dq'_1} - \dfrac{dT}{dq_1} - Q_1 = 0, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{dT}{dq'_2} - \dfrac{dT}{dq_2} - Q_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

które stanowią formuły dane przez LAGRANGE'A do wyrażenia równań ruchu w funkcyi zmiennych jakichkolwiek.

Jeśli zmienne $q_1, q_2, q_3, \ldots$ są związane między sobą pewnemi

równaniami, wtedy znajduje się równania ruchu kombinując równania związkowe z przekształconem ogólnem równaniem dynamiki, za pomocą wiadomej metody czynników niewyznaczonych $\lambda, \mu, \nu,...$

Dla utworzenia równań Lagrange'a trzeba najpierwej znaleźć summę sił żywych 2T, z której się wywodzą pochodne częściowe względem $q_1, q_2, q_3,...$ i $q'_1, q'_2, q'_3...$; poczem wyznacza się ilości $Q_1, Q_2, Q_3,...$ przez ogólną formułę

$$Q = \sum\left(X\frac{dx}{dq} + Y\frac{dy}{dq} + Z\frac{dz}{dq}\right).$$

jeśli składowe X, Y, Z,... są wiadome; albo przez równanie

$$\sum P\delta p = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + ...$$

gdy praca sił przyłożonych jest wiadoma.

Rachunek ilości $Q_1, Q_2, Q_3,...$ wielce się ułatwia gdy summa nieskończenie małych prac jest różniczką dokładną względem $3n$ spółrzędnych $x,y,z,x',...$ punktów układu, uważanych jako zmienne niezależne, albo, co to samo, gdy istnieje różniczka dokładna

$$\sum(Xdx + Ydy + Zdz) = dU$$

której całką jest funkcya sił $U = f(x, y, z, x_1, y_1, z_1,...)$; wtedy $U = \varphi(q_1, q_2, q_3,...)$, i ilości $Q_1, Q_2, Q_3,...$ są poprostu pochodnemi częściowemi funkcyi sił U względem $q_1, q_2, q_3,...$ to jest:

$$Q_1 = \frac{dU}{dq_1}, \quad Q_2 = \frac{dU}{dq_2},...$$

Aby to wszystko jaśniej pokazać, będziemy szukali metodą

Lagrange'a równań ruchu punktu materyalnego jakiegokolwiek.

165. Równania ruchu punktu materyalnego na płaszczyźnie w funkcyi spółrzędnych biegunowych. Mamy

$$x = r\cos\theta \qquad \text{i} \qquad y = r\sin\theta.$$

Te wartości dają przekształconemu równaniu dynamiki następującą postać

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dr'} - \frac{dT}{dr} - R\right)\delta r + \left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{d\theta'} - \frac{dT}{d\theta} - \Theta\right)\delta\theta = 0.$$

Owoż,

$$2T = \sum mv^2 = \sum m\,\frac{dr^2 + r^2d\theta^2}{dt^2} = mr'^2 + mr^2\theta'^2;$$

zkąd wywodzimy

$$\frac{dT}{dr} = mr\theta'^2, \qquad \frac{dT}{dr'} = mr,$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0, \qquad \frac{dT}{d\theta'} = mr^2\theta'.$$

Ilości R i Θ są określone przez formuły

$$R = X\frac{dx}{dr} + Y\frac{dy}{dr} = X\cos\theta + Y\sin\theta,$$

$$\Theta = X\frac{dx}{d\theta} + Y\frac{dy}{d\theta} = -Xr\sin\theta + Yr\cos\theta,$$

w których X i Y są składowemi danej siły poruszającej.

Przez podstawienie tych wartości, ale zachowując R i Θ dla skrócenia, równanie ogólne staje się

$$\left(m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\frac{d\theta^2}{dt^2} - \mathrm{R}\right)\delta r + \left[m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - \Theta\right]\delta\theta = 0.$$

Jeśli między zmiennemi r i θ niema związków, trzeba zrównać do zera spółczynniki zmienności δr i $\delta\theta$; co daje żądane równania ruchu

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\frac{\theta^2}{dt^2} - \mathrm{R} = 0,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - \Theta = 0.$$

W tych równaniach R wyraża składową siły poruszającej skierowaną wedle promienia wodzącego, a iloraz $\frac{\Theta}{r}$ przedstawia składową tej siły prostopadłą do promienia (36); co zresztą pokazują wartości R i Θ wyżej podane.

166. Ruch punktu ciężkiego na sferze. Jeśli, biorąc spółrzędne prostokątne i oś OZ rzędnych w kierunku ciężkości, nazwiemy r rzut promienia wodzącego OM na płaszczyznie poziomej XY, a oznaczymy przez ψ kąt jaki ten rzut czyni z osią OX, położenie punktu ruchomego M będzie określone przez następujące spółrzędne:

$$x = r\,\mathrm{dos}\,\psi,\qquad y = r\,\mathrm{wst}\,\psi,\qquad z = z.$$

Te wartości dają

$$x' = r'\,\mathrm{dos}\,\psi - r\,\mathrm{wst}\,\psi.\psi'$$

$$y' = r'\,\mathrm{wst}\,\psi + r\,\mathrm{dos}\,\psi.\psi'$$

$$z' = z',$$

i następnie

$$2T = m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = m(r'^2 + r^2\psi'^2 + z'^2).$$

Ostatni wynik możnaby wprost otrzymać (18).

Ztąd wywodzimy

$$\frac{dT}{dr'} = mr', \qquad \frac{dT}{dr} = mr\psi'^2,$$

$$\frac{dT}{d\psi'} = mr^2\psi', \qquad \frac{dT}{d\psi} = 0,$$

$$\frac{dT}{dz'} = mz', \qquad \frac{dT}{dz} = 0.$$

Znajdujemy więc ogólne równanie

$$\left(\frac{d}{dt}mr' - mr\psi'^2 - R\right)\delta r + \left(\frac{d}{dt}.mr^2\psi' - \Psi\right)\delta\psi$$
$$+\left(\frac{d}{dt}mz' - Z\right)\delta z = 0.$$

Ale między r, z i promieniem a sfery jest związek

$$r^2 + z^2 = a^2,$$

który daje zmienność

$$r\delta r + z\delta z = 0;$$

zatem, jeśli pomnożymy tę zmienność przez czynnik niewyznaczony λ i dodamy do ogólnego równania, a potem zró-

wnamy do zera spółczynniki zmienności dowolnych δr, $\delta\psi$, δz, będziemy mieli trzy równania

$$\frac{d}{dt} mr' - mr\psi'^2 - \mathrm{R} + \lambda r = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\psi') - \Psi = 0$$

$$\frac{d}{dt} mz' - \mathrm{Z} + \lambda z = 0.$$

Rugując λ z tych równań, otrzymujemy dwa równania różniczkowe ruchu

$$\left(m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\frac{d\psi^2}{dt^2} - \mathrm{R}\right)z - \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - \mathrm{Z}\right)r = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\psi}{dt}\right) - \Psi = 0.$$

Trzeba teraz wyznaczyć R, Ψ, Z. Punkt ciężki M wywiera, swoim ciężarem mg, na powierzchnię sferyczną na której jest zmuszony zostawać parcie równe i przeciwne jej oporowi N. Owoż siła N, stanowiąca opór powierzchni w kierunku normalnym MO, może być uważana jako wynikowa dwóch sił, pionowej i poziomej, przedstawionych co do wielkości i kierunku przez $-\frac{\mathrm{N}z}{a}$ i $-\frac{\mathrm{N}r}{a}$; więc, wyrażając prace wszystkich sił, mamy równanie

$$\mathrm{R}\delta r + \Psi\delta\psi + \mathrm{Z}\delta z = -\frac{\mathrm{N}r}{a}\delta r - \frac{\mathrm{N}z}{a}\delta z + mg\delta z,$$

z którego wynika

$$\mathrm{R} = -\frac{\mathrm{N}r}{a}, \qquad \Psi = 0, \qquad \mathrm{Z} = -\frac{\mathrm{N}z}{a} + mg.$$

Przez podstawienie tych wartości równania różniczkowe ruchu stają się

$$(1) \qquad z\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d^2z}{dt^2} - rz\frac{d\psi^2}{dt^2} + gr = 0$$

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\psi}{dt}\right) = 0.$$

Jeśli do tych dwóch równań dołączymy trzecie

$$(3) \qquad r^2 + z^2 = a^2,$$

ruch punktu ciężkiego na danej sferze będzie zupełnie wyznaczony, ale z warunkiem żeby równania różniczkowe zostały zcałkowane.

Równanie (2) daje zaraz całkę

$$(4) \qquad r^2\frac{d\psi}{dt} = c.$$

Aby zcałkować równanie (1), wyrugujmy zmienne ψ i r. W tym celu, zróżniczkujmy dwa razy równanie (3), znajdziemy

$$rdr + zdz = 0,$$

$$rd^2r + dr^2 + zd^2z + dz^2 = 0;$$

zkąd

$$dr = -\frac{zdz}{r}$$

$$d^2r = -\frac{zd^2z + dz^2 + dr^2}{r} = -\frac{r^2zd^2z + a^2dz^2}{r^3}.$$

Zastępując ψ i r w równaniu (1) przez ich wartości, otrzymujemy

$$a^2(a^2-z^2)\frac{d^2z}{dt^2}+a^2z\frac{dz^2}{dt^2}+c^2z-g(a^2-z^2)^2=0$$

równanie różniczkowe drugiego rzędu.

Dajmy temu równaniu kształt następujący

$$\frac{a^2(a^2-z^2)\frac{d^2z}{dt^2}+a^2z\frac{dz^2}{dt^2}+c^2z}{(a^2-z^2)^2}=g.$$

Pod tym kształtem widać łatwo że, jeśli obie strony równania będą pomnożone przez $2\frac{dz}{dt}$, to się staną różniczkami dokładnemi, i będzie

$$\frac{d}{dt}\frac{a^2\frac{dz^2}{dt^2}+c^2}{a^2-z^2}=\frac{d}{dt}2gz.$$

Więc całka pierwsza równania (1) jest

$$(5) \qquad \frac{a^2\frac{dz^2}{dt^2}+c^2}{a^2-z^2}=2gz+b.$$

Całkę (3) daje wprost zasada powierzchni, a całkę (5) zasada sił żywych; jakośmy to już widzieli w ruchu wahadła stożkowego.

167. Ruch punktu ciężkiego w przestrzeni. Określając po-

łożenie punktu w przestrzeni przez spółrzędne biegunowe

$$x = r\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\psi, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{wst}\psi, \qquad z = r\,\mathrm{dos}\theta,$$

mamy zaraz (18)

$$2T = m\frac{ds^2}{dt^2} = m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2\mathrm{wst}^2\theta.\psi'^2);$$

zkąd

$$\frac{dT}{dr'} = mr', \qquad \frac{dT}{dr} = mr(\theta'^2 + \mathrm{wst}^2\theta.\psi'^2),$$

$$\frac{dT}{d\theta'} = mr^2\theta', \qquad \frac{dT}{d\theta} = mr^2\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\theta.\psi'^2,$$

$$\frac{dT}{d\psi'} = mr^2\mathrm{wst}^2\theta.\psi', \qquad \frac{dT}{d\psi} = 0.$$

Jeśli więc zmienne r, θ, ψ są niezależne między sobą, będziemy mieli równania Lagrange'a

$$m\frac{d^2r}{dt^2} - mr\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \mathrm{wst}^2\theta.\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) - \mathrm{R} = 0,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - mr^2\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\theta.\frac{d\psi^2}{dt^2} - \Theta = 0,$$

$$m\frac{d}{dt}\left(r^2\mathrm{wst}^2\theta\frac{d\psi}{dt}\right) - \Psi = 0.$$

Dla wyznaczenia trzech ilości R, Θ, Ψ, uważajmy że jedyna siła działająca na punkt materyalny M jest ciężkość, której składowe są

$$\mathrm{X} = 0, \qquad \mathrm{Y} = 0, \qquad \mathrm{Z} = mg;$$

zatem

$$\mathrm{R} = mg\frac{dz}{dr} = mg\,\mathrm{dos}\theta,$$

$$\Theta = mg\frac{dz}{d\theta} = -\,mgr\,\mathrm{wst}\theta,$$

$$\Psi = mg\frac{dz}{d\psi} = 0.$$

Podstawiając te wartości w powyższe równania, otrzymujemy nakoniec

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} - r\,\mathrm{wst}^2\theta.\frac{d\psi^2}{dt^2} - g\,\mathrm{do}\,\theta = 0$$

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\theta.\frac{d\psi^2}{dt^2} + g\,\mathrm{wst}\theta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\mathrm{wst}^2\theta.\frac{d\psi}{dt}\right) = 0.$$

Za pomocą całki ostatniego równania można wyrugować $\frac{d\psi}{dt}$, i przywieść kwestyę do całkowania dwóch równań różniczkowych jednoczesnych; co jest rzeczą analizy.

Dla przykładu, weźmy szczególny przypadek w którym promień wodzący r ma długość stateczną, to jest uważajmy wahadło stożkowe. W tem założeniu $\frac{dT}{dr'} = 0$, $\frac{dT}{dr} = 0$, $\frac{dz}{dr} = 0$, równania ruchu przywodzą się do dwóch :

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} - r\,\mathrm{wst}\theta\,\mathrm{dos}\theta.\frac{d\psi^2}{dt^2} + g\,\mathrm{wst}\theta = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\mathrm{wst}^2\theta.\frac{d\psi}{dt}\right) = 0.$$

Drugie równanie daje

$$r^2 \text{wst}^2\theta \frac{d\psi}{dt} = c.$$

Ta wartość otrzymuje się wprost przez zasadę powierzchni. Rugując $\frac{d\psi}{dt}$, znajdujemy równanie

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{c^2 \text{dos}\theta}{r^3 \text{wst}^3\theta} + g\,\text{wst}\theta = 0,$$

które, pomnożone przez $2d\theta$, staje się różniczką dokładną daje całkę pierwszą

$$r\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{c^2}{r^3 \text{wst}^2\theta} - 2g\,\text{dos}\theta = c'.$$

Jeśli uczynimy $r = a$ i położymy $a\,\text{dos}\theta = z$, znaleziona całka zgodzi się z całką otrzymaną w wahadle stożkowem, (*Tom* I), do którego odsyłamy.

168. Bierzemy nakoniec przykład który przedstawia pewną okoliczność wyznaczenia pracy sił poruszających, z której się wywodzą wartości $Q_1, Q_2, \ldots$

Znaleźć równania ruchu dwóch punktów M *i* M', *które się przyciągają nawzajem zostając na dwóch danych liniach prostych.*

Nazwijmy h najkrótszą odległość dwóch danych linij, θ ich kąt; x, x' odległości punktów M, M' od prostej h; i niech będą m, m' massy tych punktów, r ich odległość, $mm'f(r)$ natężenie wzajemnego przyciągania. Będziemy mieli

$$(1) \qquad r^2 = h^2 + x^2 + x'^2 - 2xx'\,\text{dos}\theta,$$

$$2T = m\frac{dx^2}{dt^2} + m'\frac{dx'^2}{dt^2};$$

$$\frac{dT}{d\left(\frac{dx}{dt}\right)} = m\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{dT}{dx} = 0,$$

$$\frac{dT}{d\left(\frac{dx'}{dt}\right)} = m'\frac{dx'}{dt}, \qquad \frac{dT}{dx'} = 0.$$

Zatem równania LAGRANGE'A stają się

(2)
$$\frac{d}{dt}m\frac{dx}{dt} - X = 0,$$
$$\frac{d}{dt}m'\frac{dx'}{dt} - X' = 0.$$

Ale trzeba znać X i X'. Otóż, równanie (1) daje

$$r\delta r = x\delta x + x'\delta x' - (x'\delta x + x\delta x')\cos\theta;$$

więc praca siły przyciągającej wyraża się przez

$$-mm'f(r)\delta r = -\frac{mm'}{r}f(r)(x\delta x + x'\delta x' - x'\cos\theta\delta x - x\cos\theta\delta x').$$

Ztąd wynika

$$X = -\frac{mm'}{r}f(r)(x - x'\cos\theta),$$

$$X' = -\frac{mm'}{r}f(r)(x' - x\cos\theta).$$

Podstawiając te wartości, otrzymujemy dwa równania różniczkowe ruchu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m'}{r} f(r)(x - x' \mathrm{dos}\theta),$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{m}{r} f(r)(x' - x \mathrm{dos}\theta).$$

Ograniczając się na przypadku bardzo szczególnym zastosowania, przypuśćmy że siła przyciągająca jest proporcyonalna do odległości, to jest weźmy $f(r) = r$, będziemy mieli

$$(4) \quad \begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + m'(x - x' \mathrm{dos}\theta) = 0, \\ &\frac{d^2x'}{dt^2} + m(x' - x \mathrm{dos}\theta) = 0, \end{aligned}$$

dwa równania różniczkowe, linijne jednoczesne.

Aby je zcałkować dość jest, według wiadomej metody, położyć

$$x = Ce^{\alpha t} \qquad \text{i} \qquad x' = C\mu e^{\alpha t};$$

co daje

$$(5) \quad \begin{aligned} &\alpha^2 + m'(1 - \mu \mathrm{dos}\theta) = 0, \\ &\mu\alpha^2 + m(\mu - \mathrm{dos}\theta) = 0. \end{aligned}$$

Rugując μ otrzymujemy do wyznaczenia niewiadomej α równanie dwukwadratowe

$$(6) \quad \alpha^4 + (m + m')\alpha^2 + mm' \mathrm{wst}^2\theta = 0.$$

Wszystkie cztery pierwiastki tego równania są urojone, i wyrażają się przez $\pm\alpha'\sqrt{-1}$, $\pm\alpha''\sqrt{-1}$; oznaczając przez $-\alpha'^2$ i $-\alpha''^2$ dwie wartości pierwiastku α^2.

Jeśli teraz w jednem z równań (5) podstawimy za α^2 każdą zwartości $-\alpha'^2$, $-\alpha''^2$, znajdziemy dla μ dwie różne wartości $\frac{m'-\alpha'^2}{m'\operatorname{dos}\theta}$, $\frac{m'-\alpha''^2}{m'\operatorname{dos}\theta}$.

Ztąd wnosimy że ogólne wartości dla x i x' są kształtu

$$x = \mathrm{A}\operatorname{dos}\alpha' t + \mathrm{B}\operatorname{wst}\alpha' t + \mathrm{A'}\operatorname{dos}\alpha'' t + \mathrm{B'}\operatorname{wst}\alpha'' t,$$

$$x' = \frac{m'-\alpha'^2}{m'\operatorname{dos}\theta}(\mathrm{A}\operatorname{dos}\alpha' t + \mathrm{B}\operatorname{wst}\alpha' t)$$

$$+\frac{m'-\alpha''^2}{m'\operatorname{dos}\theta}(\mathrm{A'}\operatorname{dos}\alpha'' t + \mathrm{B'}\operatorname{wst}\alpha'' t).$$

Stateczne A, B, A', B' wyznaczają się wedle początkowego stanu ruchu.

169. Rozwiążemy jeszcze za pomocą równań Lagrange'a następujące zagadnienie:

Znaleźć ruch punktu materyalnego przyciąganego przez dwa środki stałe, w stosunku odwrotnym kwadratów odległości.

Jeśli weźmiemy za początek spółrzędnych prostokątnych środek linii która łączy dwa dane punkta przyciągające, i za oś $x$ów tę prostę, położenie punktu przyciąganego będzie się mogło wyznaczyć przez przecięcie się dwóch stożkowych spółogniskowych, mających równania

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}=1.$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}=1.$$

w których przypuszczamy

$$\lambda^2 > b^2 > \mu^2.$$

Widzimy łatwo że, gdy λ i μ zmieniają się ciągle, powyższe równania przedstawiają dwojany ellips i hiperbol spółogniskowych które się przecinają prostokątnie. To ustaliwszy, wyraźmy spółrzędne x i y w funkcyi zmiennych λ i μ.

Będzie najpierwej

$$x = \frac{\lambda\mu}{b}, \qquad y = \frac{1}{b}\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - \mu^2)},$$

a następnie

$$dx = \frac{xd\lambda}{\lambda} + \frac{xd\mu}{\mu},$$

$$dy = \frac{y\lambda d\lambda}{\lambda^2 - b^2} - \frac{y\mu d\mu}{b^2 - \mu^2};$$

poczem otrzymujemy

$$dx^2 + dy^2 = (\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{d\mu^2}{b^2 - \mu^2}\right).$$

Jeśli więc, w celu zastosowania równań Lagrange'a, uczynimy

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} = d\alpha \quad \text{i} \quad \frac{d\mu}{\sqrt{b^2 - \mu^2}} = d\beta,$$

będziemy mieli

$$dx^2 + dy^2 = G(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

gdzie

$$G = \lambda^2 - \mu^2 = \varphi(\alpha, \beta).$$

Zatem

$$T = \frac{1}{2} G(\alpha'^2 + \beta'^2);$$

zkąd wywodzimy

$$\frac{dT}{d\alpha'} = G\alpha', \qquad \frac{dT}{d\beta'} = G\beta',$$

$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\frac{dG}{d\alpha}, \qquad \frac{dT}{d\beta} = \frac{1}{2}(\alpha'^2 + \beta'^2)\frac{dG}{d\beta};$$

a ponieważ

$$U + H = \frac{1}{2} G(\alpha'^2 + \beta'^2),$$

oznaczając przez H stateczną dowolną, dwie poowyższe wartości biorą postać

$$\frac{dT}{d\alpha} = \frac{U+H}{G}\frac{dG}{d\alpha}, \qquad \frac{dT}{d\beta} = \frac{U+H}{G}\frac{dG}{\beta}.$$

Tym sposobem równania Lagrange'a stają się

$$\frac{d}{dt} G\alpha' = \frac{U+H}{G}\frac{dG}{d\alpha} + \frac{dU}{d\alpha},$$

$$\frac{d}{dt} G\beta' = \frac{U+H}{G}\frac{dG}{d\beta} + \frac{dU}{d\beta}.$$

Owoż, pierwsze z tych dwóch równań możemy pisać

$$G\alpha' \frac{d}{dt} G\alpha' = (U + H) \frac{dG}{d\alpha}.\alpha' + G \frac{dU}{d\alpha}.\alpha;$$

to zaś ostatnie równanie jest całkowalne jeśli $(U+H)G$ ma kształt $\varphi(\alpha)+\psi(\beta)$, bo wtedy

$$\alpha' \frac{d}{dt}.(U + H)G = \varphi'(\alpha)\alpha';$$

zatem, przypuszczając że tak jest, znajdujemy całkę

$$\frac{1}{2} G^2\alpha'^2 = \varphi(\alpha) + A.$$

Tak samo

$$\frac{1}{2} G^2\beta'^2 = \psi(\beta)+B.$$

Ale dwie stateczne A i B nie są oddzielne, albowiem powinno być

$$\frac{1}{2} G^2(\alpha'^2+\beta'^2) = \varphi(\alpha) + \psi(\beta),$$

co wymaga $A + B = 0.$

Więc

$$\frac{1}{2} G^2\alpha'^2 = \varphi(\alpha) + A,$$

$$\frac{1}{2} G^2\beta'^2 = \psi(\beta) - A;$$

zkąd wynika

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\sqrt{\varphi(\alpha) + A}}{\sqrt{\psi(\beta) - A}},$$

i nakoniec

$$\frac{d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) + A}} = \frac{d\beta}{\sqrt{\psi(\beta) - A}}.$$

Zostaje już tylko samo całkowanie które należy do analizy. Ale trzeba pokazać możebność kształtu funkcyi $(U + H)G$ któryśmy przypuścili. Owoż, w przypadku przyciągania w stosunku odwrotnym kwadratu odległości, istnieje funkcya sił U i wyraża się przez

$$U = \frac{k}{\rho} + \frac{k'}{\rho'},$$

a w naszem zagadnieniu

$$\rho + \rho' = 2\lambda \quad \text{i} \quad \rho' - \rho = 2\mu, \quad \text{zkąd} \quad \rho = \lambda - \mu, \quad \rho' = \lambda + \mu.$$

Zatem

$$(U + H)G = (\lambda^2 - \mu^2)\left(\frac{k}{\lambda - \mu} + \frac{k'}{\lambda + \mu} + H\right)$$

$$= (k + k')\lambda + H\lambda^2 + (k - k')\mu - H\mu^2.$$

Zmienna λ jest funkcyą z α, a μ funkcyą z β, więc

$$(U + H)G = \varphi(\alpha) + \psi(\beta);$$

co usprawiedliwia wyżej uczynione przypuszczenie.

Zagadnienie którem się zajmujemy jest szczególnym przypadkiem sławnego zagadnienia *Ruch trzech ciał niebieskich*. Nie mogąc go rozwiązać ogólnie, przywiedziono najpierwej trzy ciała niebieskie do trzech punktów wolnych, a nakoniec do jednego tylko punktu wolnego przyciąganego przez dwa punkta stałe. W dziełach pośmiertnych Jakobiego (*Vorlesungen über Dynamik*) znajduje się wspaniałe rozwiązanie ostatniego zagadnienia, za pomocą spółrzędnych elliptycznych.

170. Z równań Lagrange'a można wywieśdź zasadę sił żywych, gdy $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ jest zmiennością dokładną δU, a równania związkowe $L = 0$, $M = 0, \ldots$ nie zawierają wydatnie czasu t. Jakoż, w ostatniem przypuszczeniu wolno zastąpić zmienność δ przez różniczkę d; więc, w tem założeniu, ogólne równanie Lagrange'a staje się

$$(1) \qquad \sum\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq}\right)dq = dU,$$

albo, ponieważ $\qquad dq = q'dt,$

$$(2) \qquad \sum\left(q'd.\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq}dq\right) = dU.$$

Owoż,

$$\sum\left(q'd.\frac{dT}{dq'}\right) = \sum\left(d.\frac{dT}{dq'}q' - \frac{dT}{dq'}dq'\right);$$

więc, podstawiając tę wartość w równaniu (2), będzie

$$(3) \qquad \sum\left(d.\frac{dT}{dq'}q'\right) = \sum\left(\frac{dT}{dq}dq + \frac{dT}{dq'}dq'\right) = dU.$$

Ale T jest funkcyą zmiennych $q_1, q_2, q_3...$ i $q'_1, q'_2, q'_3...$, co daje

$$\sum\left(\frac{dT}{dq}dq+\frac{dT}{dq'}dq'\right)=dT.$$

Nadto, ponieważ z założenia związki są niezależne od czasu, spółrzędne $x, y, z,...$ nie zawierają wydatnie czasu t; mamy tedy

$$x'=\frac{dx}{dq_1}q'_1+\frac{dx}{dq_2}q'_2+.....+\frac{dx}{dq_i}q'_i.$$

zkąd wnosimy że x'^2 jest funkcyą jednorodną i drugiego rzędu zmiennych $q'_1, q'_2, q'_3,...$ Tak samo się ma z kwadratami y'^2, z'^2. Więc T jest funkcyą jednorodną i drugiego rzędu zmiennych $q'_1, q'_2, q'_3,...$; a zatem

$$\sum\left(\frac{dT}{dq'}q'\right)=2T.$$

Podstawiając te wszystkie wartości w równaniu (3), otrzymujemy

$$d.2T-dT=dU.$$

Więc

$$dT=dU \qquad \text{albo} \qquad T-U=\text{stałecz.}$$

Co jest właśnie równaniem sił żywych.

ZASADA HAMILTONA.

171. Oznaczmy przez T połowę summy sił żywych punktów materyalnych układu w epoce jakiejkolwiek t. Zasada Hamil-

TONA polega na równaniu

$$(1) \qquad \int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta T + \sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right\}dt = 0,$$

które znaczy że *wskazana całka, określona w granicach czasu* t_0 *i* t_1, *jest zero dla wszystkich przemieszczeń zgodnych ze związkami; byle tylko położenia układu odpowiedające epokom* t_0 *i* t_1 *były uważane za stałe.*

Jakoż, podstawmy wartość T, będzie

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\sum\frac{m}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)+\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\right\}dt,$$

albo

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum m\left(\frac{dx}{dt}\delta dx+\frac{dy}{dt}\delta dy+\frac{dz}{dt}\delta dz\right)+\sum(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)dt.\right\}$$

Zcałkujmy teraz częściami; zważając że przemieszczenia skrajne $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ powinny być zero, otrzymamy

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\}dt.$$

Jeśli więc przemieszczenia przysposobione δx, δy, δz są zgodne ze związkami układu, ostatnia całka będzie zero na mocy ogólnego równania dynamiki.

Co dowodzi założonego twierdzenia.

172. Gdy istnieje funkcya sił U, zasada Hamiltona wyraża się przez zmienność

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T + U)dt = 0.$$

Ale wtedy

$$U + H = T = \frac{1}{2}\sum mv^2;$$

więc, podstawiając wartości U i T, i zważając że H jest ilością stateczną, będzie

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\sum mv^2 - H\right)dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}\sum mvds = 0.$$

Ten wynik dowodzi że zasada *najmniejszego działania* jest szczególnym przypadkiem zasady Hamiltona.

173. Z zasady Hamiltona wywodzą się łatwo równania Lagrange'a. Jakoż, można zastąpić spółrzędne x, y, z, x'... przez inne spółrzędne q_1, q_2, q_3,... i wyrazić δT i $\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ w funkcyi nowych spółrzędnych. Dość tylko uważać że summa T, jako funkcya pochodnych $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, staje się funkcyą zmiennych q_1, q_2, q_3... i q'_1, q'_2, q'_3... a summa $\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, jako funkcya spółrzędnych x, y, z..., staje się funkcyą samych zmiennych q_1, q_2, q_3...; będzie więc ogólnie

$$\delta T = \sum\left(\frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dq'}\delta q'\right),$$

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = \sum Q\delta q.$$

Zatem formuła (1) przedstawia się w kształcie

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum\left(\frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dq'}\delta q' + Q\delta q\right)dt = 0.$$

Owoż,

$$dq = q'dt, \qquad \text{zkąd} \qquad \delta dq = \delta q'dt;$$

podstawiając wartość $\delta q'dt$ i całkując częściami, mamy: najpierwej

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dq'}\delta q' = \int_{t_0}^{t_1} \frac{dT}{dq'}\delta dq = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'}\delta q,$$

a potem

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum\left(\frac{dT}{dq} - \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} + Q\right)\delta q dt = 0.$$

Więc

$$\sum\left(\frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'} - \frac{dT}{dq} - Q\right)\delta q = 0.$$

Co jest właśnie ogólnem równaniem *Lagrange'a*, które się tym sposobem przedstawia jako następstwo zasady *Hamiltona*.

ZASADA GAUSSA.

174. « Zasada prędkości przysposobionych, mówi *Gauss*, przekształca wszelkie zagadnienie statyki na kwestyę matematyki czystej, a, przez zasadę *d'Alemberta* dynamika zostaje sprowadzona do statyki. Ztąd wynika że żadna zasada fundamentalna równowagi i ruchu nie może być istotnie różna od tych dwóch zasad, i, jakakolwiek ona jest, można ją zawsze uważać za ich następstwo mniej więcej pośrednie. Nie trzeba jednak ztąd wnosić żeby wszelkie inne twierdzenie było już niepotrzebne. »

W samej rzeczy, celem umiejętności jest znajomość ustaw które rządzą zjawiskami, a ogólne twierdzenia rozszerzają tę znajomość. Z tego względu zasada Gaussa która, jako zaraz zobaczymy, jednoczy w sobie zasadę d'Alemberta i zasadę prędkości przysposobionych, jest ważnym nabytkiem, chociaż nie korzystniejszym od tych dwóch fundamentalnych zasad.

Niech będzie więc układ punktów materyalnych w ruchu, powiązanych sposobem jakimkolwiek, i pod wpływem sił jakichkolwiek; oznaczmy przez m massę jednego z tych punktów, przez A_0 jego położenie początkowe, przez A położenie na końcu czasu dt, a przez B położenie któreby wziął gdyby był wolny. Zasada Gaussa polega na tem że *summa*

$$\sum m.\overline{AB}^2$$

jest minimum; to znaczy że: W ruchu układu materyalnego jakiegokolwiek, summa wieloczynów mass punktów przez kwadraty zboczeń, jest mniejsza niżby była gdyby te punkta brały inne drogi zgodne ze związkami.

Nazwijmy C jedno z położeń, zgodnych ze związkami, jakieby punkt m mógł zajmować na końcu czasu dt. Twierdzenie będzie dowiedzione jeśli okażemy że

$$\sum m.\overline{AB}^2 < \sum m.\overline{AC}^2 \cdot$$

Oczywiście wieloczyny takie jako m.AB przedstawiają siły wynikające ze związków między punktami układu; a że, na mocy zasady d'Alemberta, siły stracone powinny sobie czynić równowagę za pośrednictwem związków, trzeba więc żeby summa prac przysposobionych wszystkich sił straconych była zero, dla każdego przemieszczenia zgodnego z temi związkami.

Owoż, B i C są dwa położenia które punkt *m* mógłby mieć na końcu czasu *dt*; więc trzeba żeby było

$$(1) \qquad \sum m.\mathrm{BA}.\mathrm{BC}\cos\mathrm{ABC} = 0.$$

Ale trójkąt ABC daje

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{BA}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\mathrm{BA}.\mathrm{BC}\cos\mathrm{ABC},$$

i temsamem

$$(2) \qquad \sum m.\overline{\mathrm{AC}}^2 = \sum m.\overline{\mathrm{BA}}^2 + \sum m.\overline{\mathrm{BC}}^2 - 2\sum m.\mathrm{BA}.\mathrm{BC}\cos\mathrm{ABC}.$$

Ztąd wynika że, na mocy warunku (1), istnieje szukana nierówność

$$(3) \qquad \sum m.\overline{\mathrm{AB}}^2 < \sum m.\overline{\mathrm{AC}}^2.$$

Jeśli w uważanym układzie związki są wyrażone przez nierówności, wtedy, jako wiadomo (*), dość jest, dla równowagi sił straconych, żeby się sprawdzała nierówność

$$\sum m.\mathrm{BA}.\mathrm{BC}\cos\mathrm{ABC} < 0.$$

Wprowadzając ten warunek do równania (2), otrzymamy tem bardziej nierówność (3).

Więc, jakiekolwiek są związki, summa $\sum m.\overline{\mathrm{AB}}^2$ jest zawsze minimum.

(1) Zobacz notę na końcu tomu.

RÓWNANIA KANONICZNE HAMILTONA.

175. Jeśli, z POASSONEM (*Poisson*), położymy

(1) $$\frac{dT}{dq'} = p,$$

i przypuścimy że istnieje funkcya sił U która daje

(2) $$Q = \frac{dU}{dq},$$

równania Lagrange'a wezmą kształt ogólny

(3) $$\frac{dp}{dt} - \frac{dT}{dq} - \frac{dU}{dq} = 0.$$

Gdy związki są niezależne od czasu t ostatnie równanie może się przedstawić w kształcie jeszcze ogólniejszym. Jakoż, weźmy ilości $q_1, q_2, q_3...$ i $p_1, p_2, p_3...$ za nowe zmienne i różniczkujmy T. Dla rozróżnienia oznaczymy nowe pochodne częściowe literą ∂ podług notacyi *Jakobiego*, a zachowamy literę d dla dawnych. Tym sposobem $\frac{\partial T}{\partial q}$ będzie pochodną częściową ilości T wyrażonej w funkcyi zmiennych $q_1, q_2, q_3...$ $p_1, p_2, p_3...$, a przeciwnie $\frac{dT}{dq}$ będzie pochodną częściową ilości T wyrażonej obecnie przez zmienne $q_1, q_2, q_3.....$ i $q'_1, q'_2, q'_3,...$

Owoż, gdy związki są niezależne od czasu, wtedy, jakośmy już widzieli, T jest funkcyą jednorodną i drugiego rzędu zmiennych $q'_1, q'_2, q'_3...$; zatem

$$2T = \sum \frac{dT}{dq'} q'$$

co można pisać

$$T = \sum pq' - T.$$

Zróżniczkujmy to równanie przez δ. Uważając najpierwej T jako funkcyę zmiennych $q_1, q_2, \ldots q'_1, q'_2, \ldots$, będziemy mieli

$$\delta T = \sum p\delta q' + \sum q'\delta p - \sum\left(\frac{dT}{dq}\delta q + \frac{dT}{dq'}\delta q'\right),$$

albo, na mocy formuły (1),

$$\delta T = \sum q'\delta p - \sum\frac{dT}{dq}\delta q;$$

uważając potem T jako funkcyę zmiennych $p_1, p_2, p_3 \ldots$ i $q_1, q_2, q_3 \ldots$, mamy także

$$\delta T = \sum\frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \sum\frac{\partial T}{\partial q}\delta q.$$

Więc

$$\sum\frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \sum\frac{\partial T}{\partial q}\delta q = \sum q'\delta p - \sum\frac{dT}{dq}\delta q$$

zkąd wywodzimy

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial p} = p, \\ \dfrac{\partial T}{\partial q} = -\dfrac{dT}{dq}; \end{cases}$$

przez co równanie (3) staje się

$$(5)\qquad \frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{dU}{dq} = 0.$$

Ale U jest funkcyą samych tylko zmiennych $q_1, q_2, q_3 \ldots$, co daje

$$\frac{dU}{dq} = \frac{\partial U}{\partial q}, \qquad \frac{\partial U}{\partial p} = 0;$$

zatem, równanie (5) może się pisać

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial (T - U)}{\partial q} = 0,$$

i następnie pochodna q' może się przedstawić przez

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial (T - U)}{\partial p}.$$

Jeśli więc położymy

$$T - U = H,$$

i przypuścimy że T zostało wyrażone w funkcyi zmiennych p i zmiennych q, otrzymamy równania ruchu w ogólnym kształcie

$$(6) \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{dH}{dq}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dH}{dp}.$$

Te równania, podane przez Hamiltona, i nazwane przez Jakobiego *równaniami kanonicznemi*, pokazują swoją ogólnością że wszystkie zagadnienia Mechaniki do których się stosuje zasada sił żywych, a takiemi są zagadnienia Mechaniki niebieskiej i, w ogóle, Fizyki matematycznej, nie różnią się między sobą tylko samą liczbą równań (6) i kształtem funkcyi H.

176. Równania (6), jakośmy zastrzegli, przypuszczają że H jest wyrażone w funkcyi zmiennych $p_1, p_2, \ldots p_k, q_1, q_2, \ldots q$. Owoż $H = T - U$, a funkcya sił U nie zawiera pochodnych $q_1'\, q_2', \ldots q_k$; trzeba więc tylko wyrugować te ostatnie z funkcyi T. Aby pokazać jakim sposobem uskutecznia się to rugowanie, uważajmy na przykład ruch punktu materyalnego w przestrzeni, odniesiony do spółrzędnych biegunowych. Mamy

$$T = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{1}{2} m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \text{wst}^2\theta . \psi'^2);$$

zkąd

$$p_1 = \frac{dT}{dr'} = mr', \quad p_2 = \frac{dT}{d\theta'} = mr^2\theta', \quad p_3 = \frac{dT}{d\psi'} = mr^2 \text{wst}^2\theta . \psi'.$$

Ale

$$2T = p_1 r' + p_2\theta' + p_3\psi';$$

więc, rugując r', θ', ψ', otrzymujemy

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \text{wst}^2\theta}\right).$$

CAŁKOWANIE RÓWNAŃ KANONICZNYCH.

177. Chociaż nie potrafiono jeszcze zcałkować ogólnie równań kanonicznych, odkryto atoli główne twierdzenia które się stosują do wszystkich zagadnień temi równaniami przedstawionych. Doniosłość rzeczonych twierdzeń jest tak wielka że czujemy się obowiązani dać o nich jeśli nie zupełne to jednak dostateczne wyobrażenie.

W latach 1834 i 1835 Hamilton ogłosił, w *Philosophical transactions*, znamienite twierdzenie, następującej treści :

TWIERDZENIE. *Całki zagadnienia mechaniki, do którego się stosuje zasada sił żywych, można wszystkie wyrazić równając do statecznych pochodne* CZĘŚCIOWE *jednej i tej samej funkcyi wzięte względem innych statecznych.*

Niech będzie układ $2k$ równań hamiltońskich, wyrażonych w kształcie ogólnym

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{dH}{dq}, \\[2mm] \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{dH}{dp}; \end{cases}$$

w których H jest daną funkcyą czasu t i zmiennych p, q,

$$H = f(t, p_1, p_2, \dots p_k, q_1, q_2, \dots q_k).$$

Przypuśćmy że równania (1) zostały zcałkowane; w tem założeniu zmienne $p_1, p_2 \dots p_k, q_1, q_2, \dots q_k$ będą wiadome w funkcyi czasu t i $2k$ statecznych dowolnych. Więc jeśli, uważając H jako funkcyę czasu i $2k$ statecznych, weźmiemy pochodnę względem jednej z tych statecznych α, będziemy mieli

$$\frac{dH}{d\alpha} = \sum \left(\frac{dH}{dp} \frac{dp}{d\alpha} + \frac{dH}{dq} \frac{dq}{d\alpha} \right),$$

albo, na mocy równań (1),

$$\frac{dH}{d\alpha} = \sum \left(\frac{dq}{dt} \frac{dp}{d\alpha} - \frac{dp}{dt} \frac{dq}{d\alpha} \right);$$

co można tak pisać

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \sum pq' - \frac{d}{dt} \sum p \frac{dq}{d\alpha}.$$

Owoż, wiemy że funkcya T, jako jednorodna i drugiego rzędu względem $q'_1, q'_2 \ldots q_k$, daje

$$\sum pq' = \sum \frac{dT}{dq'} q' = 2T;$$

zatem

$$\frac{dH}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}.2T - \frac{d}{dt}\sum p \frac{dq}{d\alpha},$$

i następnie

$$\frac{d(H-2T)}{\alpha} = -\frac{d}{dt}\sum p \frac{dq}{d\alpha}.$$

A jeśli położymy

$$H = T - U,$$

będzie

$$\frac{d(T+U)}{d\alpha} = \frac{d}{dt}\sum p \frac{dq}{d\alpha};$$

zkąd, całkując względem t, otrzymujemy

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^t (T+U)dt = \left(p_1 \frac{dq_1}{d\alpha} + p_2 \frac{dq_2}{d\alpha} + \ldots p_k \frac{dq_k}{d\alpha}\right)_0^t.$$

Wskazy 0 i t, położone przy nawiasie, znaczą że trzeba dać czasowi najpierwej wartość 0 a potem wartość t, i odjąć pierwszy wynik od drugiego.

Dla uproszczenia, uczyńmy z Hamiltonem

$$S = \int_0^t (T+U)dt,$$

będziemy mieli

$$\frac{dS}{d\alpha} = \left(p_1 \frac{dq}{d\alpha} + p_2 \frac{dq_2}{d\alpha} + \dots p_k \frac{dq_k}{d\alpha}\right)_0^t;$$

poczem, jeśli pomnożymy obie strony przez $d\alpha$, i dodamy do podobnych równań które pochodzą ze zmienności wszystkich innych statecznych w całkach zagadnienia, znajdziemy

$$(2) \qquad \delta S = p_1\delta q_1 + p_2\delta q_2 + \dots p_k\,\delta q_k$$
$$- (p_1\delta q_1)_0 - (p_2\delta q_2)_0, \dots - (p_k\delta q_k)_0,$$

oznaczając przez δS całą zmienność funkcyj S gdy stateczne które zawiera zmieniają się wszystkie zarazem.

Uważajmy teraz że całka S i zmienne q_1, q_2..... q_k są funkcyami czasu t i $2k$ statecznych dowolnych; jeśli więc, między $k+1$ równaniami które wyznaczają te funkcye, wyrugujemy k statecznych, będziemy mieli wartość S wyrażoną przez czas t, przez k zmiennych q_1, q_2..... q_k, i k statecznych pozostałych. Przypuszczając ten rachunek wykonany, pojmuje się łatwo że równanie (2) da zmienność δS, gdy wszystkie zmienne od których S zależy odbiorą nieskończenie małe przyrosty. Ztąd, na mocy zasad rachunku różniczkowego, wywodzimy

$$(3) \qquad \begin{array}{lll} \dfrac{dS}{dq_1} = p_1, & \dfrac{dS}{dq_2} = p_2, \dots & \dfrac{dS}{dq_k} = p_k, \\[2ex] \dfrac{dS}{(dq_1)_0} = -(p_1)_0, & \dfrac{dS}{(dq_2)_0} = -(p_2)_0, \dots & \dfrac{dS}{(dq_k)_0} = -(p_k)_0. \end{array}$$

Te równania, wyrażające związki między $2k$ zmiennemi

$p_1, p_2, p_3, \ldots . p_k, q_1, q_2, q_3, \ldots . q_k$, czasem t i $2k$ statecznemi $-(p_1)_0, -(p_2)_0, \ldots . -(p_k)_0, (q_1), (q_2)_0, \ldots . (q_k)_0$, są oczywiście całkami zupełnemi zagadnienia. Widzimy tym sposobem że można otrzymać całki zagadnienia ruchu równając do statecznych pochodne częściowe funkcyi S wzięte względem innych statecznych. Na tem właśnie polega twierdzenie Hamiltona (*).

178. Funkcya charakterystyczna. Hamilton nazwał *funkcyą charakterystyczną* całkę określoną

$$(4) \qquad \int_0^t (\mathrm{T}+\mathrm{U})dt.$$

Ta ważna funkcya zadość czyni równaniu o pochodnych częściowych pierwszego rzędu, które się łatwo z powyższego określenia wyprowadzić daje. Jakoż, S jest funkcyą czasu t wydatnie i przez zmienne $q_1, q_2, \ldots q_k$ które zawiera; jeśli więc zróżniczkujemy równanie (4) względem t, będzie

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt}+\sum\frac{d\mathrm{S}}{dq}q'=\mathrm{T}+\mathrm{U}.$$

Z przyczyny formuł (3) to równanie staje się

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt}+\sum pq'=\mathrm{T}+\mathrm{U}.$$

Ale mamy

$$\sum pq'=\sum\frac{d\mathrm{T}}{dq'}q'=2\mathrm{T};$$

(*) Zobacz w *Mechanice analitycznej* Lagrange'a, 3° wydanie. Paryż, 1846, noty umieszczone przez P. Bertranda.

znajdujemy więc ważne równanie

$$(5) \qquad \frac{dS}{dt} + T - U = 0$$

które, na mocy określenia funkcyi H, może się wyrazić po prostu przez

$$(6) \qquad \frac{dS}{dt} + H = 0.$$

Nakoniec, zastępując w funkcyi H zmienne $p_1, p_2, \ldots p_k$ przez wartości $\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots \frac{dS}{dq_k}$, otrzymujemy

$$(7) \qquad \frac{dS}{dt} + f\left(t, q_1, q_2, \ldots q_k \frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots \frac{dS}{dq_k}\right) = 0.$$

Takie jest równanie o pochodnych częściowych któremu funkcya S zadość czynić powinna.

Równanie (7) ma nieskończoną liczbę rozwiązań zawierających każde k statecznych dowolnych, które Lagrange mianuje *całkami zupełnemi*. Jedna z tych całek będzie funkcyą S. Ale Hamilton nie powieda która, chociaż mówi że istnieje drugie jeszcze równanie o pochodnych częściowych którego funkcya S jest całką. Tu przychodzi główne odkrycie Jakobiego, które wysoko podnosi twierdzenie Hamiltona nadając funkcyi S rozleglejsze znaczenie. Jakobi dowiódł że *każda całka równania* (7), *zawierająca* k *statecznych dowolnych, może być wzięta za funkcyę* S.

Równanie o różniczkach częściowych (7) zawiera $k+1$ zmiennych $t, q_1, q_2, \ldots q_k$; więc jego całką ogólną jest rozwiązanie mające $k+1$ statecznych dowolnych. Należy uważać że funk-

cya S nie wchodzi do tego równania, wchodzą tylko jej pochodne częściowe; ztąd wynika że mając rozwiązanie zawierające k statecznych dowolnych, otrzymuje się ogólniejsze przydając mu stateczną dowolną.

Zatem, dość jest mieć rozwiązanie równania (7) zawierające k statecznych dowolnych, aby z niego wyprowadzić całkę ogólną. Ale taka całka nie jest całką zupełną w znaczeniu Lagrange'a i nie może być wzięta za funkcyę S. Aby całka równania (7) stosowała się do twierdzeń Hamiltona i Jakobiego, trzeba żeby *zawierała* w sobie k statecznych dowolnych z którychby żadna nie była wprowadzona przez proste dodawanie.

To ustaliwszy, przypuśćmy że, całkując równanie (7), znaleziono całkę zupełną

$$S = \varphi(t, q_1, q_2, \ldots q_k, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k),$$

z której się wywodzą całki równań hamiltońskich; za pomocą tej całki druga połowa równań (3) może się przedstawić w kształcie wyraźniejszym. Jakoż, uważając że, wedle formuł (3), $p_1, p_2, \ldots p_k$ są funkcyami zmiennych $q_1, q_2, \ldots q_k$ i statecznych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$, jeśli zróżniczkujemy równanie (6) względem statecznej jakiejkolwiek α_i, będziemy mieli

$$\frac{d^2S}{dt d\alpha_i} + \sum \frac{dH}{dp_i}\frac{dp_i}{d\alpha_i} = 0,$$

albo, na mocy zadanych równań (1),

$$\frac{d^2S}{dt d\alpha_i} + \sum \frac{d^2S}{d\alpha_i dq_i}\frac{dq_i}{dt} = 0,$$

i następnie

$$\frac{d}{dt}\frac{dS}{d\alpha_i} = 0$$

więc

$$\frac{dS}{d\alpha_i}=\beta_i,$$

gdzie β_i znaczy nową stateczną dowolną.

Stateczna α_i i β_i nazywają się *statecznemi kanonicznemi*.

Podstawiając za wskazy i liczby 1, 2, 3,...k, otrzymujemy całki zupełne równań hamiltońskich

$$\frac{dS}{d\alpha_1}=\beta_1, \quad \frac{dS}{d\alpha_2}=\beta_2,\ldots \quad \frac{dS}{d\alpha_k}=\beta_k,$$

które wyznaczają $q_1, q_2,\ldots q_k$ w funkcyi czasu t i $2k$ statecznych dowolnych $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2,\ldots$

Można więc powiedzieć że te stateczne są ilościami danemi przez wartości $q_1, q_2\ldots q_k$, gdy $t=0$.

179. Jeśli spółrzędne $q_1, q_2\ldots q_k$ znaczą spółrzędne prostokątne $x, y, z, x_1,\ldots$ wtedy

$$T=\sum\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2).$$

Owoż,

$$\frac{dT}{dx'}=mx', \quad \frac{dT}{dy'}=my', \quad \frac{dT}{dz'}=mz',$$

a, na mocy równań (3),

$$\frac{dT}{dx'}=\frac{dS}{dx}, \quad \frac{dT}{dy'}=\frac{dS}{dy}, \quad \frac{dT}{dz'}=\frac{dS}{dz},$$

więc

$$T = \sum \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz}\right)^2 \right\}.$$

Przez podstawienie tej wartości równanie (5), i temsamem równanie (7), bierze kształt ogólny

$$\text{(8)} \qquad \frac{dS}{dt} + \sum \frac{1}{2m} \left\{ \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dS}{dz}\right)^2 \right\} - U = 0.$$

180. Funkcya główna. Hamilton mianował *funkcyą główną* całkę określoną

$$\text{(9)} \qquad V = \int_0^t 2T\,dt,$$

którąśmy już widzieli w zasadzie najmniejszego działania.

Funkcya główna V nie zawiera wydatnie czasu t. Aby się o tem przekonać, dość napisać funkcyę charakterystyczną S w następującym kształcie

$$\text{(10)} \qquad S = \int_0^t (2T - H)dt = V - \int_0^t H\,dt;$$

zkąd, biorąc pochodnę względem czasu, wynika

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dV}{dt} - H.$$

Ale mamy

$$\frac{dS}{dt} + H = 0;$$

więc, odciągając, znajdujemy równanie

$$\frac{dV}{dt}=0,$$

które dowodzi że funkcya V jest niezależna od czasu t.

Uważajmy teraz że, na mocy zasady sił żywych na której się opiera twierdzenie Hamiltona, H jest ilością stateczną; zatem, wykonywając całkowanie w równaniu (10), otrzymujemy

$$S=V-Ht.$$

To równanie pokazuje że V jest funkcyą samych tylko zmiennych $q_1, q_2 \ldots q_k$, i statecznej H; co daje ogólnie

$$\frac{dS}{dq}=\frac{dV}{dq}.$$

Jeśli więc spółrzędne $q_1, q_2 \ldots q_k$ znaczą spółrzędne prostokątne $x, y, z, x_1, \ldots$ będzie

$$\frac{dS}{dx}=\frac{dV}{dx}, \qquad \frac{dS}{dy}=\frac{dV}{dy}, \qquad \frac{dS}{dz}=\frac{dV}{dz},$$

i przez podstawienie tych wartości równanie (8) stanie się

$$(11) \qquad \sum\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right\}-U-H=0.$$

Takie jest ogólne równanie ruchu układu wolnego w przestrzeni

TWIERDZENIE JAKOBIEGO.

181. *Aby zcałkować układ* 2k *równań kanonicznych*

$$\text{(1)}\quad \begin{aligned} &\frac{dp_1}{dt}=-\frac{df}{dq_1}, \quad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{df}{dq_2},\ldots \quad \frac{dp_k}{dt}=-\frac{df}{dq_k},\\ &\frac{dq_1}{dt}=\frac{df}{dp_1}, \quad \frac{dq_2}{dt}=\frac{df}{dp_2},\ldots \quad \frac{dq_k}{dt}=\frac{df}{dq_k}, \end{aligned}$$

dość jest, całkując równanie o pochodnych częściowych funkcyi charakterystycznej

$$\text{(2)}\quad \frac{dS}{dt}+f\left(t, q_1, q_2\ldots q_k, \frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2},\ldots \frac{dS}{dq_k}\right)=0,$$

znaleźć jedną z całek

$$S=\varphi(t, q_1, q_2,\ldots q_k, \alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_k)$$

zawierającą k *statecznych dowolnych* $\alpha_1, \alpha_2,\ldots \alpha_k$; *to rozwiązanie da* 2k *równań*

$$\text{(3)}\quad \begin{aligned} &\frac{dS}{dq_1}=p_1, \quad \frac{dS}{dq_2}=p_2,\ldots \quad \frac{dS}{dq_k}=p_k,\\ &\frac{dS}{d\alpha_1}=\beta_1, \quad \frac{dS}{d\alpha_2}=\beta_2,\ldots \quad \frac{dS}{d\alpha_k}=\beta_k, \end{aligned}$$

które będą całkami układu kanonicznego (1).

Twierdzenie będzie dowiedzione jeśli okażemy że równanie (3) zadość czynią równaniom (1).

Szukajmy w tym celu wartości $\frac{dp_1}{dt}$. Biorąc pochodną względem czasu t z pierwszego równania (3), mamy

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{d^2S}{dq_1 dt} + \sum \frac{d^2S}{dq_1 dq_i}\frac{dq_i}{dt};$$

Owoż, równanie (2) różniczkowane względem q_1 daje

$$\frac{d^2S}{dt dq_1} + \frac{df}{dq_1} + \sum \frac{df}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_1} = 0;$$

pomnóżmy te dwa równania przez dq_1 i dodajmy, uważając że $\frac{d^2S}{dq_1 dq_i} = \frac{dp_i}{dq_1}$ otrzymamy

$$\left(\frac{dp_1}{dt} + \frac{df}{dq_1}\right)dq_1 = \sum\left(\frac{dq_i}{dt} - \frac{df}{dp_i}\right)\frac{dp_i}{dq_1}dq_1.$$

Jeśli weźmiemy summę podobnych wyników, odpowiedających wszystkim równaniom pierwszej połowy całek (3), oznaczając przez δ zmienności jakie biorą $q_1, q_2 \ldots\ldots q_k, p_1, p_2 \ldots\ldots p_k$, będzie ogólnie

$$\sum\left(\frac{dp}{dt} + \frac{df}{dq}\right)\delta q - \sum\left(\frac{dq}{dt} - \frac{df}{dq}\right)\delta p = 0.$$

Ale $\delta q_1, \delta q_2, \ldots\ldots \delta q_k$ są ze wszystkiem dowolne, i temsamem $\delta p_1, \delta p_2 \ldots \delta p_k$; więc musi być

$$\frac{dp}{dt} + \frac{df}{dq} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{dq}{dt} - \frac{df}{dp} = 0.$$

Co dowodzi że pierwsza połowa równań (3) zadość czyni układowi równań kanonicznych.

Aby okazać że druga połowa także mu zadość czyni, z pierwszego równania tej połowy wyprowadzamy wartość $\frac{dq_1}{dt}$ biorąc pochodnę względem czasu t, i mamy

$$\frac{d^2S}{d\alpha_1 dt} + \sum \frac{d^2S}{d\alpha_1 dq_i}\frac{dq_i}{dt} = 0.$$

Owoż, równanie (2) zróżniczkowane względem α_1 daje

$$\frac{d^2S}{dt d\alpha_1} + \sum \frac{df}{dp_i}\frac{dp}{d\alpha_1} = 0;$$

pomnóżmy te dwa równania przez $d\alpha_1$ i odcągnijmy drugie od pierwszego, otrzymamy

$$\sum \left(\frac{dq_i}{dt} - \frac{df}{dp_i}\right)\frac{dp_i}{d\alpha_1} d\alpha_1 = 0.$$

Więc, jeśli weźmiemy summę podobnych równań odpowiedających wszystkim równaniom drugiej połowy (3), oznaczając przez $\delta p_1, \delta p_2 \ldots\ldots \delta p_k$ zmienności pochodzące z przyrostów $\delta\alpha_1, \delta\alpha_2 \ldots\ldots \delta\alpha_k$, statecznych dowolnych, będzie ogólnie

$$\sum \left(\frac{dq}{dt} - \frac{df}{dp}\right)\delta p = 0,$$

zkąd

$$\frac{dq}{dt} - \frac{df}{dp} = 0.$$

Co było do dowodzenia.

Widzimy teraz, za pomocą twierdzenia Jakobiego, że dość jest

znać jedną całkę zupełną równania o pochodnych częściowych funkcyi charakterystycznej, aby módz zaraz całkować dany układ kanoniczny.

NAWZAJEM, *aby znaleźć rozwiązanie zupełne równania* (2) *o pochodnych częściowych, dość jest zcałkować układ kanoniczny* (1).

Ale po dowodzenie tej *wzajemnicy*, która należy do analizy, odsyłamy do sławnego artykułu JAKOBIEGO, umieszczonego w dzienniku *Crelle*, Tom XVII.

182. Niech będzie równanie o pochodnych częściowych

$$(4) \qquad \frac{dS}{dt} + F\left(q_1, q_2 \ldots q_k, \frac{dS}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2} \ldots \frac{dS}{dq_k}\right) = 0$$

w którem ani czas t ani funkcya V nie wchodzą do funkcyi F. To równanie może się uprościć, i dość będzie znaleźć rozwiązanie zawierające tylko $k-1$ statecznych dowolnych $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}$, aby módz całkować układ $2k$ równań kanonicznych, mających kształt ogólny

$$(5) \qquad \frac{dp}{dt} = -\frac{dF}{dq} \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{dF}{dp}.$$

Jakoż, z przyczyny kształtu równania (4), możemy położyć

$$\frac{dS}{dt} + h = 0, \quad \text{zkąd} \quad S + ht = V;$$

oznaczając przez h stateczną dowolną i przez V zmienną niezależną od czasu t.

Te równania dają

$$\frac{dS}{dq} = p = \frac{dV}{dq}, \quad \frac{dS}{dt} = -h, \quad \frac{dV}{dh} = t.$$

Jeśli więc, biorąc V za niewiadomę, wyrugujemy S, równania kanoniczne (5) zostaną te same, a równanie (4) stanie się

$$-h + F\left(q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{dV}{dq_1}, \frac{dV}{dq_2}, \ldots \frac{dV}{dq_k}\right) = 0.$$

Przypuśćmy teraz że, całkując przekształcone równanie, znaleziono z $k-1$ statecznemi rozwiązanie

$$V = \psi(q_1, q_2, \ldots q_k, h, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1});$$

to rozwiązanie, zawierające tylko k statecznych dowolnych $h, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{k-1}$, wystarczy do całkowania $2k$ równań kano nicznych których całki będą

$$\frac{dV}{dq_1} = p_1, \quad \frac{dV}{dq_2} = p_2, \quad \frac{dV}{dq_3} = p_3, \ldots \quad \frac{dV}{dq_k} = p_k,$$

$$\frac{dV}{d\alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{dV}{d\alpha_2} = \beta_2, \ldots \quad \frac{dV}{d\alpha_{k-1}} = \beta_{k-1}, \quad \frac{dV}{dh} = t + \tau.$$

Ostatnie równanie całkowe, w którem τ znaczy stateczną dowolną, zawiera samo jedno czas t.

183. Na zastosowanie wyłożonej teoryi, weźmiemy zagadnienia ruchu planet, ale tylko aby pokazać jak się otrzymują równania całkowe ruchu.

Jeśli oznaczymy przez $\frac{-\mu}{r^2}$ siłę poruszającą planety, której

natężenie, jako wiadomo, jest w stosunku odwrotnym odległości od słońca, praca tej siły wyrazi się przez

$$\int \frac{-\mu dr}{r^2} = \frac{\mu}{r} + h;$$

zatem, biorąc $m = 1$, ogólne równanie ruchu planety będzie

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \frac{2\mu}{r} + 2h.$$

Trzeba przedstawić to równanie w funkcyi spółrzędnych biegunowych

$$x = r \,\mathrm{wst}\theta \,\mathrm{dos}\psi,$$

$$y = r \,\mathrm{wst}\theta \,\mathrm{wst}\psi,$$

$$z = r \,\mathrm{dos}\theta.$$

Owoż, w układzie takich spółrzędnych siła żywa jest dana przez równanie

$$2T = m\frac{ds^2}{dt^2} = m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \mathrm{wst}^2\theta . \psi'^2),$$

z którego wywodzimy

$$\frac{dT}{dr'} = mr' = p_1 = \frac{dV}{dr},$$

$$\frac{dT}{d\theta'} = mr^2\theta' = \frac{dV}{d\theta},$$

$$\frac{dT}{d\psi'} = mr^2 \mathrm{wst}^2\theta . \psi' = \frac{dV}{d\psi}.$$

Otrzymujemy tym sposobem równanie funkcyi głównej któręśmy oznaczyli przez V

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{r^2 \text{wst}^2\theta}\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+2h.$$

Jedno rozwiązanie tego równania, o pochodnych częściowych, zawierające dwie stateczne dowolne α i α', będzie dostateczne do wyznaczenia całek zupełnych zagadnienia, dlatego że już mamy jedną stateczną dowolną h daną przez zasadę sił żywych.

Aby znaleźć potrzebne rozwiązanie, połóżmy

$$\left(\frac{dV}{dr}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{\alpha}{r^2},$$

$$\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2=\alpha-\frac{\alpha'}{\text{wst}^2\theta},$$

$$\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2=\alpha'.$$

Te wartości podstawione w równanie funkcyi głównej przywodzą je do tosamości; więc, stosownie do prawideł całkowania równań o pochodnych częściowych pierwszego rzędu, otrzymamy jedną z całek zupełnych naszego równania, biorąc całkę określoną każdego z wyżej położonych równań, i potem czyniąc summę tych wszystkich całek; co daje

$$V=\int_{r_0}^{r} dr\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{\alpha}{r^2}}+\int_{0}^{\theta} \theta \sqrt{\alpha-\frac{\alpha'}{\text{wst}^2\theta}}+\psi\sqrt{\alpha'}.$$

Ztąd wyprowadzamy całki zagadnienia ruchu

$$\beta = \frac{dV}{d\alpha} = -\int_{r_0}^{r} \frac{dr}{2r^2\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha}{r^2}}} + \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{2\sqrt{\alpha - \frac{\alpha'}{\text{wst}^2\theta}}},$$

$$\beta' = \frac{dV}{d\alpha'} = -\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{2\,\text{wst}^2\theta\sqrt{\alpha - \frac{\alpha}{\text{wst}^2\theta}}} + \frac{\psi}{2\sqrt{\alpha'}},$$

$$t + \tau = \frac{dV}{dh} = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2h - \frac{\alpha}{r^2}}}.$$

Rachunek tych całek nie przedstawia żadnej trudności. Żeby jednak rozwiązanie zagadnienia było zupełne, trzebaby wiedzieć znaczenie geometryczne statecznych kanonicznych i ich związek ze statecznemi zwyczajnemi. Ale to jest rzeczą Astronomii.

Są jeszcze inne ważne twierdzenia któreby w tym rozdziale mogły być wyłożone; żeby się jednak nie oddalać za nadto od zwyczajnej mechaniki, odsyłamy je do not umieszczonych na końcu dzieła.

ROZDZIAŁ III

MOMENTA BEZWŁADNOŚCI.

---

184. Nazywa się *momentem bezwładności punktu materyalnego względem osi* wieloczyn mr^2 massy m tego punktu przez kwadrat jego odległości r od osi. Momentem bezwładności układu materyalnego, figury niezmiennej, względem osi jest summa momentów bezwładności wszystkich punktów które go składają. I tak, jeśli oznaczymy przez m, m', m''... massy punktów układu a przez r, r', r'',... ich odległości od osi, moment bezwładności tego układu będzie $mr^2+m'r'^2+m''r''^2+...$; co się wyraża ogólnie przez $\sum mr^2$.

Ciała naturalne nie są nieprzerwanym ciągiem punktów materyalnych; wiadomo albowiem że punkta, albo raczej cząsteczki składowe, nie dotykają jedne do drugich; są między niemi niezapełnione przestrzenie, dowodem dziurkowatość, ściśliwość i rozszerzalność. Według nowego poglądu na organizacyę materyi, te cząsteczki składowe zdają się tworzyć jakoby planetarne układy, obracając się jedne około drugich! Ale w ciałach idealnych, figury niezmiennej, zachowując tę samą massę każdego można przypuszczać że ona zapełnia jego objętość, i, uważając tak przysposobioną ciągłość materyi brać, zamiast summy $\sum mr^2$, całkę $\int r^2dm$ w całej rozciągłości ciała; jakośmy to czynili w poszukiwaniu środka ciężkości. Wyniki będą te same, bo się massa ciała nie zmieniła, tylko inaczej została rozpołożona. Dość

więc będzie rozłożyć ciało niezmienne na nieskończenie wielką liczbę nieskończenie małych cząstek, i, wyznaczywszy moment bezwładności którejkolwiek cząstki, wziąć całkę określoną w granicach ciała. Widzimy tym sposobem że poszukiwanie momentów bezwładności ciał figury niezmiennej jest prostą kwestyą rachunku całkowego.

Jeśli oś, względem której trzeba wyrachować moment bezwładności układu punktów materyalnych, jest wzięta za oś $z^{ów}$; nazywając m massę jednego z tych punktów i oznaczając przez x, y, z jego spółrzędne, widzimy łatwo że szukany moment bezwładności wyraża się przez summę

$$\sum m(x^2 + y^2).$$

Tak samo, momenta bezwładności układu względem osi $x^{ów}$ i $y^{ów}$ wyrażają się przez odpowiedające summy

$$\sum m(y^2 + z^2) \quad \text{i} \quad \sum m(x^2 + z^2).$$

Więc, oznaczając przez A, B, C momenta bezwładności układu materyalnego, względem trzech osi spółrzędnych prostokątnych, mamy

$$A = \sum m(y^2 + z^2) = \sum my^2 + \sum mz^2,$$

$$B = \sum m(x^2 + z^2) = \sum mx^2 + \sum mz^2,$$

$$C = \sum m(x^2 + y^2) = \sum mx^2 + \sum my^2.$$

Summy $\sum mx^2$, $\sum my^2$, $\sum mz^2$ nazywają się *momen-*

tami bezwładności układu materyalnego względem płaszczyzn spółrzędnych prostokątnych yz, xz, xy. Tym sposobem można przywieśdź wyznaczenie momentów bezwładności względem trzech osi spółrzędnych do poszukiwania momentów bezwładności względem trzech płaszczyzn spółrzędnych.

Nawzajem, znając A, B, C, nietrudno znaleźć summy $\sum mx^2$, $\sum my^2$, $\sum mz^2$; dość tylko dodać do siebie dwa z powyższych równań i odjąć trzecie, będzie

$$\sum mx^2 = \frac{1}{2}(B + C - A)$$

$$\sum my^2 = \frac{1}{2}(A + C - B)$$

$$\sum mz^2 = \frac{1}{2}(A + B - C).$$

Ztąd, ponieważ summy $\sum mx^2$, $\sum my^2$, $\sum mz^2$ są istotnie dodatne i różne od zera, wynika

$$A < B + C, \qquad B < A + C, \qquad C < B + C.$$

Więc, z trzech boków proporcyonalnych do momentów bezwładności A, B, C układu materyalnego można zawsze zbudować trójkąt.

Dodając trzy poprzedzające równania, otrzymujemy

$$\sum m(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2}(A + B + C).$$

Summa $\sum m(x^2 + y^2 + z^2)$ może się nazwać *momentem bezwładności układu względem punktu.*

Jeśli oznaczymy przez ρ gęstość ciała bryłowego w punkcie M(x, y, z), będzie $m = \rho dxdydz$; więc, na mocy tego co wyżej powiedziano, momenta bezwładności ciała względem trzech osi spółrzędnych prostokątnych wyrażą się przez całki potrójne

$$A = \int\int\int \rho(y^2 + z^2)dxdydz,$$

(1) $$B = \int\int\int \rho(x^2 + z^2)dxdydz,$$

$$C = \int\int\int \rho(x^2 + y^2)dxdydz,$$

określone w granicach rozciągłości całego ciała.

Gęstość ρ jest ogólnie funkcyą spółrzędnych. Gdy ciało bryłowe jest jednorodne, albo innemi słowy, gdy gęstość ρ jest stateczna, można często wyrachować momenta bezwładności przez całki pojedyncze. Jakoż, uważajmy moment bezwładności ciała względem płasczyzny yz i oznaczmy go przez G, będziemy mieli

$$G = \rho \int_{x_0}^{x_1} x^2dx \int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} dydz.$$

Całka podwójna $\int_{y_0}^{y_1} \int_{z_0}^{z_1} dydz$ wyraża powierzchnię przecięcia ciała, którą nazwiemy u, przez płasczyznę prostopadłą do osi x ; jeśli więc można wprost otrzymać wartość u w funkcyi odciętej x, całka potrójna przywiedzie się do całki pojedynczej, i będzie

$$G = \rho \int_{x_0}^{x_1} ux^2dx$$

Oznaczając przez v i w powierzchnie przecięć ciała przez płasczyzny odpowiednio prostopadłe do osi $y^{\acute{o}w}$ i $z^{\acute{o}w}$, będziemy mieli, w podobnych warunkach i w granicach przyzwoitych, momenta bezwładności H i I względem płasczyzn xz i xy,

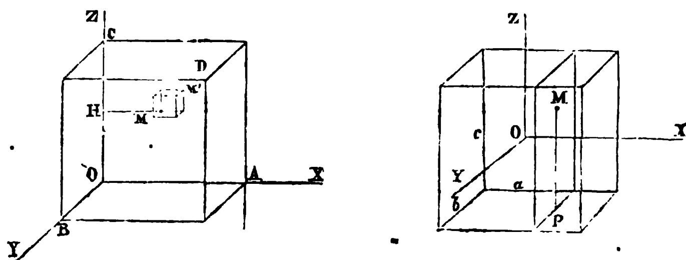
$$\mathrm{H} = \rho\int_{y_0}^{y_1} vy^2dy, \qquad \mathrm{I} = \rho\int_{z_0}^{z_1} wz^2dz.$$

Więc ostatecznie znajdujemy formuły często zastosowalne

$$(2) \qquad \mathrm{A} = \mathrm{H} + \mathrm{I}, \qquad \mathrm{B} = \mathrm{G} + \mathrm{I}, \qquad \mathrm{C} = \mathrm{G} + \mathrm{H}.$$

185. Weźmiemy teraz parę przykładów, które nam wkrótce będą potrzebne a na tem miejscu posłużą do objaśnienia momentów bezwładności.

Niech będzie, na pierwszy przykład, równoległościan prostokątny OD, utworzony z materyi jednorodnej mającej gęstość ρ; szukajmy jego momentów bezwładności względem trzech kra-



wędzi przytykających, które nazywamy a, b, c i bierzemy za osie spółrzędnych.

Wyobraźmy sobie że, płasczyznami równoległemi do płasczyzn spółrzędnych, rozłożono dane ciało bryłowe, na nieskoń-

czenie małe cząstki równoległościenne. Jedna z tych cząstek, odpowiedająca punktowi $M(x, y, z)$, ma objętość $dxdydz$ i massę $m = \rho dxdydz$; jej moment bezwładności względem osi OZ wyraża się przez

$$\rho dxdydz . r^2 = \rho(x^2 + y^2)dxdydz.$$

Więc, jeśli weźmiemy summę takich momentów bezwładności odnoszących się do wszystkich cząstek składowych, znajdziemy moment bezwładności ciała względem krawędzi OC,

$$C = \rho\int\int\int(x^2 + y^2)dxdydz.$$

Ta potrójna całka rozciąga się do wszystkich wartości dodatnych dla x, y, z od zera aż do a, b, c.

Uważając że z nie wchodzi pod znak całkowania, zaczynamy od tej zmiennej, i całkujemy od $z = 0$ do $z = c$; co daje

$$C = c\rho\int\int(x^2 + y^2)dxdy.$$

Teraz, ponieważ granice są stateczne, porządek całkowania jest obojętny; do tego jeszcze obie zmienne y i z wchodzą jednakowo. Całkując najpierwej od $y = 0$ do $y = b$ a potem od $x = 0$ do $x = a$, otrzymujemy

$$C = c\rho\int_0^a dx\int_0^b(x^2 + y^2)dy = \frac{1}{3}\rho abc(a^2 + b^2).$$

A jeśli nazwiemy M massę równoległościanu materyalnego, będzie $M = \rho abc$ i moment bezwładności tego ciała wyrazi się poprostu przez

$$C = \frac{1}{3}M(a^2 + b^2).$$

Ztąd łatwo wnosimy że momenta danego równoległościanu względem krawędzi OB i OA są

$$B=\frac{1}{3}M(a^2+c^2), \qquad A=\frac{1}{3}M(b^2+c^2).$$

Przypuszczając $a>b>c$, będzie $A<B<C$; co pokazuje że z trzech momentów bezwładności równoległościanu największy odpowieda najmniejszej krawędzi, a najmniejszy największej.

Szukajmy jeszcze momentów bezwładności tego samego równoległościanu, względem trzech osi przechodzących przez jego środek cieżkości i odpowiednio równoległych do trzech krawędzi przyległych. Użyjemy do tego momentów bezwładności względem trzech płaszczyzn spółrzędnych. Uważając że powierzchnia u przecięcia równoległościanu przez płaszczyznę prostopadłą do osi OX ma za miarę wieloczyn bc, (*druga fig.*) znajdujemy natychmiast

$$G=\rho\int_{-a}^{+a}bcx^2dx=2\rho bc\int_0^a x^2dx=\frac{1}{12}\rho bc^3.$$

Ztąd wnosimy

$$H=\frac{1}{12}\rho acb^3, \qquad I=\frac{1}{12}\rho abc^3.$$

Więc, na mocy formuły (2), otrzymujemy

$$A=\frac{1}{12}\rho abc(b^2+c^2)=\frac{1}{12}M(b^2+$$

$$B=\frac{1}{12}\rho abc(a^2+c^2)=\frac{1}{12}M(a^2+c^2)$$

$$C=\frac{1}{12}\rho abc(a^2+b^2)=\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

Na drugi przykład niech będzie ellipsoida jednorodna gęstości ρ; jej równanie odniesione do trzech osi figury jest

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Aby znaleźć trzy momenta bezwładności A, B, C, szukamy najpierwej powierzchni u przecięcia ellipsoidy przez płasczyznę prostopadłą do osi $x$ów, i widzimy że jest ellipsą mającą równanie

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=1.$$

Ztąd zaraz otrzymujemy

$$u=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Więc G, moment bezwładności ellipsoidy względem płasczyzny yz, wyraża się przez całkę pojedynczą

$$G=\rho\int_{-a}^{+a}\pi bc\left(x^2-\frac{x^2}{a^2}\right)x^2dx=2\pi\rho bc\int_0^a\left(x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)dx=\frac{4}{15}\rho bca^3.$$

Z tego wyrażenia wnosimy natychmiast wartości

$$H=\frac{4}{15}\rho acb^3,\qquad I=\frac{4}{15}\rho abc^3.$$

Znajdujemy więc rachunkiem bardzo prostym, posługując się formułą (2), momenta bezwładności ellipsoidy jednorodnej

względem trzech jej osi głównych,

$$A = \frac{4}{15}\rho abc(b^2 + c^2),$$

$$B = \frac{4}{15}\rho abc(a^2 + c^2),$$

$$C = \frac{4}{15}\rho abc(a^2 + b^2).$$

Nakoniec, uważając że $\frac{4}{3}\pi\rho abc$ wyraża massę M ellipsoidy, mamy

$$A = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2), \quad C = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

Z momentów bezwładności ellipsoidy jednorodnej można łatwo wyprowadzić moment bezwładności sfery jednorodnej względem średnicy jakiejkolwiek; dość tylko, nazywając R promień sfery, uczynić w poprzedzających formułach $a = b = c = R$. Co daje

$$\sum mr^2 = \frac{8}{15}\rho R^5.$$

Ten wynik pokazuje że momenta bezwładności sfery względem jej średnic są wszystkie równe.

186. Promień wirowy. Dla uproszczenia pewnych formuł, które niedługo zobaczymy, przedstawia się moment bezwładności ciała przez wieloczyn jego massy M i kwadratu długości k, kładąc

$$\sum mr^2 = Mk^2.$$

Ta długość k, nazwana *promieniem wirowym* ciała względem osi momentu bezwładności, jest promieniem powierzchni walcowej obrotowej około osi tego momentu, i takiej że, gdyby na niej rozpostarto całą massę, moment bezwładności względem uważanej osi nie byłby zmieniony.

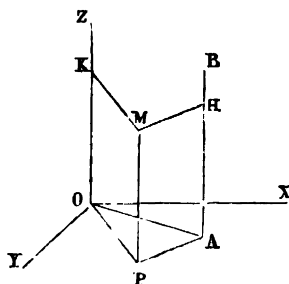
Znając moment bezwładności ciała względem pewnej osi i jego massę, otrzymuje się zaraz promień wirowy względem tej osi. I tak, promień wirowy k względem osi OX wyraża się

w równoległościanie przez $k = \frac{A}{M} = \frac{1}{3}(b^2 + c^2)$,

w ellipsoidzie przez $k = \frac{1}{5}(b^2 + c^2)$,

WŁASNOŚCI MOMENTÓW BEZWŁADNOŚCI.

187. Jeśli jest wiadomy moment bezwładności układu materyalnego względem osi przechodzącej przez środek ciężkości, to można mieć moment bezwładności względem innej osi równoległej do pierwszej i w odległości danej.



Jakoż, weźmy środek ciężkości O danego układu za początek spółrzędnych prostokątnych, i pierwszą oś za oś rzędnych; nazwijmy α, β odcięte punktu A w którym druga oś AB równo-

legła do OZ spotyka płasczyznę xy. Niech będzie M jakikolwiek punkt danego układu mający massę m; jeśli oznaczymy przez x, y, z jego spółrzędne, przez r, R odległości MH, MK od AB, OZ, i przez a odległość OA dwóch prostych AB i OZ, będziemy mieli

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2.$$

Ale

$$x^2 + y^2 = \mathrm{R}^2, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = a^2;$$

zatem, podstawiając te wartości i mnożąc równanie przez m, otrzymujemy

$$mr^2 = m\mathrm{R}^2 - 2\alpha mx - 2\beta my + ma^2.$$

Znalezionoby podobne równania dla każdego z punktów materyalnych układu; więc, biorąc summę tych równań i nazywając M całą massę układu, mamy

$$\sum mr^2 = \sum m\mathrm{R}^2 - 2\alpha \sum mx - 2\beta \sum my + \mathrm{M}a^2.$$

Teraz uważajmy że, ponieważ początek spółrzędnych jest środkiem ciężkości układu, będzie

$$\sum mx = \mathrm{M}x_1 = 0, \qquad \sum my = \mathrm{M}y_1 = 0;$$

dochodzimy więc ostatecznie do formuły

$$(3) \qquad \sum mr^2 = \sum m\mathrm{R}^2 + \mathrm{M}a^2.$$

Ztąd TWIERDZENIE : *Moment bezwładności układu punktów ma-*

teryalnych względem osi jakiejkolwiek jest równy momentowi bezwładności względem osi równoległej i przechodzącej przez środek ciężkości, więcej wieloczynem całej massy układu przez kwadrat odległości dwóch osi.

Powyższa formuła pokazuje że 1° Najmniejszy moment bezwładności układu materyalnego, względem osi równoległych do kierunku danego, jest ten który odpowieda osi przechodzącej przez środek ciężkości.

2° Momenta bezwładności układu materyalnego, względem osi równoległych między sobą i równo oddalonych od środka ciężkości, są równe; a tem większe im bardziej osie oddalają się od tego środka.

Nazwijmy k, k' i K promienie wirowe układu materyalnego względem trzech osi równoległych, z których ostatnia przechodzi przez środek ciężkości, i jest na odległość a i a' od dwóch pierwszych. Na mocy dowiedzionego twierdzenia będzie

$$Mk^2 = MK^2 + Ma^2,$$

$$Mk'^2 = MK^2 + Ma'^2;$$

zkąd wynika formuła

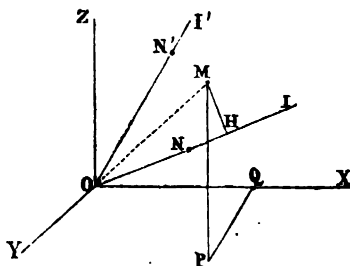
$$k^2 - k'^2 = a^2 - a'^2 = (a + a')(a - a'),$$

która daje promień wirowy k gdy są wiadome k', a, a'.

188. Ellipsoida bezwładności. Szukajmy związków między momentami bezwładności względem osi przechodzących przez punkt stały O.

Niech będzie OI oś jakakolwiek poprowadzona przez punkt O. Biorąc ten punkt za początek spółrzędnych prostokątnych na-

zwijmy α, β, γ kąty jakie oś OI czyni z trzema osiami spół-



rzędnemi OX, OY, OZ; oznaczmy przez m massę jednego z punktów materyalnych M układu, przez x, y, z jego spółrzędne i przez r odległość MH od osi OI; poczem, uważajmy że z punktu O do M prowadzą dwie drogi OM i OQPM, których rzuty na osi OI są równe. Co daje

$$\mathrm{OH} = x \operatorname{dos}\alpha + y \operatorname{dos}\beta + z \operatorname{dos}\gamma.$$

Owoż,

$$\overline{\mathrm{MH}}^2 = \overline{\mathrm{OM}}^2 - \overline{\mathrm{OH}}^2;$$

więc

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \operatorname{dos}\alpha + y \operatorname{dos}\beta + z \operatorname{dos}\gamma)^2,$$

albo

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\operatorname{dos}^2\alpha + \operatorname{dos}^2\beta + \operatorname{dos}^2\gamma) - (x \operatorname{dos}\alpha + y \operatorname{dos}\beta + z \operatorname{dos}\gamma)^2.$$

Zkąd, rozwijając i mnożąc przez m, wynika

$$mr^2 = m(y^2 + z^2)\operatorname{dos}^2\alpha + m(x^2 + z^2)\operatorname{dos}^2\beta + m(x^2 + y^2)\operatorname{dos}^2\gamma$$

$$- 2myz \operatorname{dos}\beta \operatorname{dos}\gamma - 2mxz \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\gamma - 2mxy \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta.$$

Znalezionoby podobne równania dla każdego z innych punk-

tów materyalnych układu. Dodając wszystkie równania, otrzymujemy moment bezwładności tego układu względem osi OI,

$$\sum mr^2 = \cos^2\alpha \sum m(y^2 + z^2) + \cos^2\beta \sum m(x^2 + z^2)$$

$$+ \cos^2\gamma \sum m(x^2 + y^2) - 2\cos\beta\cos\gamma \sum myz$$

$$- 2\cos\alpha\cos\gamma \sum mxz - 2\cos\alpha\cos\beta \sum mxy.$$

Połóżmy teraz

$$\sum m(y^2 + z^2) = A, \quad \sum m(x^2 + z^2) = B, \quad \sum m(x^2 + y^2) = C.$$

$$\sum z = D, \quad \sum mxz = E, \quad \sum mxy = F.$$

Trzy pierwsze summy, jako wiemy, oznaczają momenta bezwładności układu. względem trzech osi spółrzędnych; trzy ostatnie mają inne znaczenia o których później będzie mowa.

Przez podstawienie tych wszystkich wartości powyższe równanie staje się

$$(4) \quad \sum mr^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma$$

$$- 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta.$$

Taka jest wartość momentu bezwładności układu materyalnego względem osi OI.

Tę wartość można przedstawić geometrycznie, oto jakim

sposobem. Na osi OI weźmy długość

$$ON = \frac{1}{\sqrt{\sum mr^2}},$$

i nazwijmy X, Y, Z spółrzędne punktu N; będzie

$$\cos\alpha = \frac{X}{ON} = X\sqrt{\sum mr^2}, \quad \cos\beta = Y\sqrt{\sum mr^2},$$

$$\cos\gamma = Z\sqrt{\sum mr^2}.$$

Podstawiając te wartości, i znosząc spólny czynnik $\sqrt{\sum mr^2}$, otrzymujemy równanie

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY = 1,$$

które przedstawia powierzchnię drugiego rzędu mającą środek w punkcie O. Owoż, jakikolwiek jest kierunek osi OI, promień wodzący ON, wzięty na tym kierunku, ma zawsze wartość rzeczywistą i skończoną; bo ona jest odwrotnością pierwiastnika $\sqrt{\sum mr^2}$, a summa $\sum mr^2$ jest ilością skończoną i większą od zera; więc powierzchnia drugiego rzędu, o której mówimy, ograniczona na wszystkie strony, jest ellipsoidą.

Ta ellipsoida, miejsce punktów N które wyznaczają momenta bezwładności układu względem wszelkiej osi przechodzącej przez punkt O, nazywa się *ellipsoidą momentów bezwładności*, albo krócej, *ellipsoidą bezwładności*.

Owoż, w ellipsoidzie można zawsze obrać za osie spółrzędne trzy kierunki prostokątne takie żeby prostokąty yz, xz, xy zni-

kały z równania; temi kierunkami są trzy osie główne ellipsoidy; jeśli więc odniesiemy ellipsoidę bezwładności do trzech osi głównych, jej równanie weźmie kształt prosty

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1.$$

Długości osi głównych tej ellipsoidy są $\frac{1}{\sqrt{A}}$, $\frac{1}{\sqrt{B}}$, $\frac{1}{\sqrt{C}}$, a każda z ilości A, B, C jest mniejsza od summy dwóch innych; ztąd wynika że ellipsoida jakakolwiek nie może być uważana za ellipsoidę bezwładności.

Ostatnie równanie dowodzi że dla każdego punktu przestrzeni istnieją zawsze trzy osie prostokątne, będące osiami głównemi ellipsoidy bezwładności, względem których summy wieloczynów mass punktów układu przez prostokąty ich spółrzędnych są zero, to jest

$$\sum myz = 0, \qquad \sum mxz = 0, \qquad \sum mxy = 0.$$

Trzy osie główne ellipsoidy bezwładności zostały mianowane *osiami głównemi bezwładności*, i dlatego odpowiedające im momenta bezwładności nazywają się *momentami głównemi bezwładności* układu materyalnego.

Gdy są wiadome osie i momenta główne bezwładności w punkcie O, moment bezwładności względem jakiejkolwiek osi przechodzącej przez ten punkt wyraża się przez formułę

$$(5) \qquad \sum mr^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma.$$

A jeśli trzeba wyrachować moment bezwładności ciała bryłowego jednorodnego, względem osi poprowadzonej przez punkt O,

sposób zwykle prosty polega na użyciu formuły

$$(6) \qquad \sum mr^2 = G\,\mathrm{wst}^2\alpha + H\,\mathrm{wst}^2\beta + I\,\mathrm{wst}^2\gamma,$$

w której już nam znane wielkości G, H, I oznaczają momenta bezwładności względem trzech płaszczyzn głównych ellipsoidy bezwładności w punkcie O.

Układ osi głównych bezwładności jest ogólnie jedyny. Ale, jeśli dwa momenta główne bezwładności są równe, $A = B$, ellipsoida bezwładności jest powierzchnią obrotową około osi OZ, i każda płasczyzna południkowa jest płasczyzną główną; wtedy istnieje nieskończona liczba układów osi głównych, albowiem każde dwie średnice prostokątne leżące na płasczyznie równika ellipsoidy stanowią z osią obrotu układ trzech osi głównych. W tym przypadku momenta bezwładności względem osi tworzących kąty równe z osią obrotu są równe; bo, w przypuszczeniu $A = B$, mamy

$$\sum mr^2 = A\,\mathrm{wst}^2\gamma + C\,\mathrm{dos}^2\gamma;$$

co pokazuje że wartość $\sum mr^2$ zależy tylko od kąta γ.

Gdy trzy momenta główne bezwładności są równe $A = B = C$, ellipsoida bezwładności jest sferą; wtedy każde trzy średnice prostokątne stanowią układ osi głównych. W tym przypadku momenta bezwładności układu względem średnic sfery są wszystkie równe, albowiem

$$\sum mr^2 = A\,\mathrm{dos}^2\alpha + A\,\mathrm{dos}^2\beta + A\,\mathrm{dos}^2\gamma = A.$$

Przypuśćmy teraz momenta główne bezwładności nierówne,

i niech będzie $A > B > C$. Ponieważ moment bezwładności układu materyalnego względem osi OI wyraża się przez

$$\sum mr^2 = \frac{1}{\overline{ON}^2},$$

oczywiście ten moment jest tem większy im promień wodzący ON jest mniejszy. Więc ze wszystkich momentów bezwładności układu względem różnych osi przechodzących przez punkt O, moment bezwładności A jest największy a C najmniejszy; albo innemi słowy, największy i najmniejszy możebny moment bezwładności są oba momentami głównemi bezwładności, największy odpowieda najmniejszej osi ellipsoidy bezwładności a najmniejszy największej.

Posługując się tą własnością momentów bezwładności, można łatwo dowieśdź że istnieje tylko jeden układ osi głównych bezwładności, gdy trzy momenta główne bezwładności są nierówne. Jakoż, przypuśćmy że istnieją dwa takie układy którym odpowiedają momenta główne bezwładności A, B, C i A', B', C'; i niech będą A i A' największe momenta bezwładności w każdym z dwóch układów. Na mocy powyższej własności powinno być $A > A'$, ale dla tej samej przyczyny musiałoby także być $A' > A$; co niedorzeczne. Więc istnieje w każdym punkcie przestrzeni jeden tylko układ osi głównych bezwładności dla danego układu materyalnego.

189. Otrzymuje się osie i momenta główne bezwładności wyznaczając wielkość i kierunek osi głównych ellipsoidy bezwładności. W samej rzeczy, promień wodzący ON staje się osią główną gdy przystaje do normalnej w punkcie N. Owoż, w tym punkcie ellipsoidy bezwładności, mającej równanie

$$u = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EXZ - 2FXY - 1 = 0,$$

normalna czyni z osiami spółrzędnemi kąty których dostawy są proporcyonalne do

$$X, \qquad \frac{du}{dX} = 2(AX - EZ - FY),$$

$$Y, \qquad \frac{du}{dY} = 2(BY - DZ - FX),$$

$$Z, \qquad \frac{du}{dZ} = 2(CZ - DY - EX);$$

więc, żeby promień wodzący przystawał do normalnej i tym sposobem stał się osią główną, trzeba żeby było

$$\frac{AX - EZ - FY}{X} = \frac{BY - DZ - FX}{Y} = \frac{CZ - DY - EX}{Z},$$

Ale X, Y, Z są proporcyonalne do $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; będzie zatem

$$\frac{A\cos\alpha - E\cos\gamma - F\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{B\cos\beta - D\cos\gamma - F\cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$= \frac{C\cos\gamma - D\cos\beta - E\cos\alpha}{\cos\gamma}$$

$$= \frac{A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma - 2D\cos\beta\cos\gamma - 2E\cos\alpha\cos\gamma - 2F\cos\alpha\cos\beta}{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma} = S.$$

S oznacza jeden z momentów głównych bezwładności, odpowiedający promieniowi wodzącemu który stał się osią główną.

Z tych równań wywodzą się zaraz następujące:

$$(S - A)\cos\alpha + F\cos\beta + E\cos\gamma = 0,$$

$$F\cos\alpha + (S - B)\cos\beta + D\cos\gamma = 0,$$

$$E\cos\alpha + D\cos\beta + (S - C)\cos\gamma = 0.$$

Rugując $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ między temi równaniami, co się otrzymuje równając do zera wyznacznik, znajdujemy równanie trzeciego stopnia na S

$$(S-A)(S-B)(S-C)-(S-A)D^2-(S-B)E^2-(S-C)F^2$$
$$+2DEF=0,$$

które gra przeważną rolę w geometryi analitycznej. Trzy pierwiastki tego równania, zawsze rzeczywiste jako wiadomo, są wartościami trzech momentów głównych bezwładności. Każdemu z tych momentów odpowieda układ trzech kątów α, β, γ, wyznaczony przez poprzedzające równania, które dają

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{(S-B)(S-C)-D^2}}=\frac{\cos\beta}{\sqrt{(S-A)(S-C)-E^2}}$$
$$=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{(S-A)(S-B)-F^2}}$$
$$=\pm\frac{1}{\sqrt{(S-B)(S-C)+(S-A)(S-C)+(S-A)(S-B)-D^2-E^2-F^2}}.$$

190. Wynika z twierdzeń dwóch poprzedzających numerów że najmniejszy moment bezwładności układu materyalnego, względem osi przechodzących przez środek ciężkości, jest najmniejszy możebny ze wszystkich momentów bezwładności tego układu.

Nazwijmy L, M, N momenta bezwładności, względem trzech osi prostokątnych które czynią kąty $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ z trzema osiami głównemi; będzie

$$L=A\cos^2\alpha_1+B\cos^2\beta_1+C\cos^2\gamma_1,$$
$$M=A\cos^2\alpha_2+B\cos^2\beta_2+C\cos^2\gamma_2,$$
$$N=A\cos^2\alpha_3+B\cos^2\beta_3+C\cos^2\gamma_3;$$

zkąd wynika

$$L + M + N = A + B + C.$$

Więc summa momentów bezwładności względem trzech osi prostokątnych jest stateczna, i równa się summie momentów głównych bezwładności.

191. Cecha osi głównych bezwładności. W układzie spółrzędnych prostokątnych oś OZ, na przykład, będzie osią główną ellipsoidy jeśli ta powierzchnia jest symetryczna względem płaszczyzny xy. Żeby się to zdarzało w ellipsoidzie bezwładności, trzeba i dość jest żeby jej równanie zostawało niezmienne gdy się przemienia Z na — Z; co przypuszcza że w niem brakuje wyrazu zawierającego Z w pierwszym stopniu, to jest że równanie ma kształt

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2FXY = 1;$$

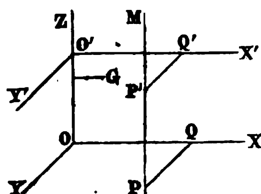
bo wtedy, na wartości jakiekolwiek dla X i Y, rzędna Z bierze dwie wartości równe i znaków przeciwnych. Więc, żeby oś $z^{ów}$ była osią główną bezwładności, warunkiem koniecznym i dostatecznym jest żeby istniały zarazem dwa równania

$$\sum mxz = 0, \qquad \sum myz = 0.$$

W takim przypadku osiami $x^{ów}$ i $y^{ów}$ są dwie proste prostokątne jakiekolwiek, przechodzące przez punkt O na płaszczyznie symetryi xy; a jeśli do dwóch powyższych równań przydamy warunek $\sum mxy = 0$, trzy osie spółrzędne będą osiami głównemi bezwładności.

Gdy jedna tylko z trzech summ D, E, F jest zero, dajmy na to $\sum myz = 0$, ale zarazem środek ciężkości G układu mate-

ryalnego znajduje się na płasczyznie spółrzędnej przytykającej do yz, na przykład na xz, wtedy oś spółrzędnych OZ, spólna tym dwom płasczyznom, będzie osią główną bezwładności w pewnym punkcie O′ swojego kierunku.



Jakož, przez punkt O′, mający rzędnę $OO' = h$, poprowadźmy trzy osie spółrzędne O′X′, O′Y′, O′Z′, równoległe do osi spółrzędnych prostokątnych OX, OY, OZ, i nazwijmy x', y', z' nowe spółrzędne punktu $M(x, y, z)$ układu. Żeby oś OZ była osią główną bezwładności w punkcie O′, powinno być

$$\sum mx'z' = 0 \quad \text{i} \quad \sum my'z' = 0.$$

Ale, $\quad x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z - h;\quad$ zatem

$$\sum mx(z - h) = \sum mxz - h\sum mx = 0,$$

$$\sum my(z - h) = \sum myz - h\sum my = 0,$$

albo

$$(a) \qquad \begin{aligned} &\sum mxz - hMx_1 = 0, \\ &\sum myz - hMy_1 = 0. \end{aligned}$$

A ponieważ z założenia $\sum myz = 0$ i $y_1 = 0$, te dwa

warunki przywodzą się do jedynego równania

$$\sum mxz - hMx_1 = 0,$$

któremu zadość czyni wartość

$$h = \frac{\sum mxz}{Mx_1}.$$

Istnieje więc na osi OZ punkt O' w którym ta prosta jest osią główną bezwładności układu.

Jeśli oś OZ jest osią główną bezwładności w punkcie O i zawiera środek ciężkości układu materyalnego, ta prosta będzie osią główną bezwładności we wszystkich swoich punktach. Albowiem, w tym przypadku, będzie

$$\sum mxz = 0, \qquad \sum myz = 0$$

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0;$$

więc równaniom warunkowym (a) staje się zadość przez każdą wartość dla h, to jest jakiekolwiek położenie punkt O' zajmuje na kierunku OZ.

Więc, żeby prosta OZ była osią główną bezwładności we wszystkich swoich punktach, trzeba i dość jest żeby była jedną z trzech osi głównych bezwładności względnych do środka ciężkości układu.

Mówi się wtedy że oś OZ jest *osią naturalną wirowania*, z przyczyny którą później powiemy.

Ellipsoida bezwładności względna do środka ciężkości układu nazywa się *ellipsoidą środkową*.

192. Gdy układ materyalny jest symetryczny względem płasczyzny, wszelka prosta prostopadła do tej płasczyzny jest osią główną bezwładności w punkcie w którym ją przenika. Weźmy albowiem płasczyznę symetryi za płasczyznę xy, i niech jakakolwiek prostopadła OZ do tej płasczyzny w punkcie O będzie osią rzędnych. Ponieważ każdemu dwojanowi wartości dla x i y odpowiedają dwie wartości równe i znaków przeciwnych dla z, a massy dwóch punktów symetrycznych są równe, będzie

$$\sum mxz = 0, \qquad \sum myz = 0.$$

Co dowodzi twierdzenia.

Więc, gdy ciało bryłowe jednorodne jest symetryczne względem trzech płasczyzn prostokątnych, punkt spólny tym płasczyznom jest jego środkiem ciężkości, a linie przecięć osiami głównemi bezwładności. I tak, w równoległościanie prostokątnym, trzy proste poprowadzone przez środek figury równolegle do trzech krawędzi przytykających są jego osiami głównemi bezwładności; tak samo trzy osie główne ellipsoidy jednorodnej są jej osiami głównemi bezwładności.

Jeśli prosta OZ, poprowadzona przez środek ciężkości G ciała bryłowego, jest jego osią główną bezwładności, wszelka prosta O′Z′ równoległa do OZ będzie osią główną bezwładności tego ciała w punkcie O′, w którym spotyka płasczyznę przechodzącą przez G i prostopadłą do OZ. Nazwijmy a, b, c spółrzędne punktu O′ względem trzech osi głównych bezwładności OX, OY, OZ, i przez O′ poprowadźmy trzy nowe osie O′X′, O′Y′, O′Z′ równoległe do dawnych. Oznaczając przez x, y, z i x', y', z' spółrzędne punktu M ciała, trzeba dowieść że

$$\sum mx'z' = 0 \quad \text{i} \quad \sum my'z' = 0.$$

Owoż, mamy $\quad x' = x - a, \quad y' = y - b, \quad z' = z - c;$

powinno więc być

$$\sum m(x-a)(z-c)=\sum mxz - aMz_1 - cMx_1 + Mac = 0$$

$$\sum m(y-b)(z-c)=\sum myz - bMz_1 - cMy_1 + Mbc = 0.$$

Ale $\sum mxz = 0$ i $\sum myz = 0$, bo osie spółrzędnych są osiami głównemi bezwładności; do tego $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = c$, bo środek ciężkości G ciała znajduje się na osi OZ; więc powyższe równania są tosamościami.

Co było do okazania.

Ztąd wynika że wszelka prosta równoległa do jednej z trzech osi głównych bezwładności, względnych do środka ciężkości ciała, jest osią główną w punkcie w którym spotyka płasczyznę dwóch drugich osi.

Osie główne GX, GY, GZ bezwładności układu materyalnego, względne do jego środka ciężkości G, posiadają jeszcze następującą własność która wypływa z powyższej. Jeśli przez jakikolwiek punkt O′, wzięty na osi GZ naprzykład, poprowadzono osie O′X′, O′Y′, O′Z′ równoległe do GX, GY, GZ, trzy nowe osie będą osiami głównemi bezwładności względnie do punktu O′.

Aby dowieśdź wprost tego twierdzenia, dość położyć równania

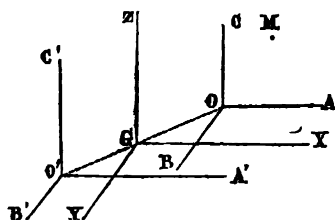
$$\sum mx'y' = \sum mxy = 0,$$

$$\sum mx'z' = \sum mx(z-c) = \sum mxz - cMx_1 = 0,$$

$$\sum my'z' = \sum my(z-c) = \sum myz - cMy_1 = 0,$$

które się sprawdzają oczywiście na mocy uczynionych założeń.

193. Punkta przestrzeni dla których osie główne bezwładności układu materyalnego są odpowiednio równoległe leżą symetrycznie względem jego środka ciężkości.



Niech będzie O jeden z tych punktów, i OA, OB, OC trzy osie główne bezwładności układu materyalnego; przez środek ciężkości G tego układu, poprowadźmy trzy osie spółrzędne GX, GY, GZ równoległe do osi głównych, i oznaczmy przez a, b, c spółrzędne punktu O, przez x, y, z spółrzędne punktu materyalnego M.

Warunki żeby osie OA, OB, OC były osiami głównemi bezwładności wyrażają się przez

$$\sum m(x-a)(y-b)=\sum mxy - a\mathrm{M}y_1 - b\mathrm{M}x_1 + \mathrm{M}ab = 0,$$

$$\sum m(x-a)(z-c)=\sum mxz - a\mathrm{M}z_1 - c\mathrm{M}x_1 + \mathrm{M}ac = 0,$$

$$\sum m(y-b)(z-c)=\sum myz - b\mathrm{M}z_1 - c\mathrm{M}y_1 + \mathrm{M}bc = 0.$$

Owoż, $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$, dlatego że punkt G jest środkiem ciężkości; więc

$$\sum mxy + \mathrm{M}ab = 0, \quad \sum mxz + \mathrm{M}ac = 0, \quad \sum myz + \mathrm{M}bc = 0.$$

Tym równaniom zadość czynią tak dobrze wartości a, b, c, jak wartości równe i ze znakami przeciwnemi. Co dowodzi że osie główne bezwładności układu materyalnego, odpowiednio równoległe, odnoszą się do punktów przestrzeni symetrycznych względem środka ciężkości G.

194. Możemy teraz łatwo rozwiązać ZAGADNIENIE. *Znaleźć punkta przestrzeni dla których ellipsoida bezwładności jest obrotową.*

To znaczy wyraźniej, znaleźć punkta przestrzeni dla których dwa momenta główne bezwładności ciała bryłowego są równe. Weźmy za osie spółrzędnych trzy osie główne bezwładności tego ciała względne do jego środka ciężkości O, i nazwijmy ξ, η, ζ spółrzędne jednego z punktów szukanych O′. Jeśli przez punkta O i O′ poprowadzimy dwie osie równoległe OI, O′I$_1$, i oznaczymy przez h ich odległość, a przez $\sum mr^2$, $\sum mr_1^2$ momenta bezwładności względem tych dwóch osi, będzie

$$\sum mr_1^2 = \sum mr^2 + Mh^2.$$

Owoż,

$$\sum mr^2 = A \operatorname{dos}^2\alpha + B \operatorname{dos}^2\beta + C \operatorname{dos}^2\gamma,$$

$$h^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - (\xi \operatorname{dos}\alpha + \eta \operatorname{dos}\beta + \zeta \operatorname{dos}\gamma)^2,$$

albo

$$h^2 = (\eta^2 + \zeta^2)\operatorname{dos}^2\alpha + (\xi^2 + \zeta^2)\operatorname{dos}^2\beta + (\xi^2 + \eta^2)\operatorname{dos}^2\gamma$$
$$- 2\eta\zeta \operatorname{dos}\beta \operatorname{dos}\gamma - 2\xi\zeta \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\gamma - 2\xi\eta \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta;$$

więc, podstawiając te wartości, mamy

$$\sum mr_1^2 = [A + M(\eta^2 + \zeta^2)]\operatorname{dos}^2\alpha + [B + M(\xi^2 + \zeta^2)]\operatorname{dos}^2\beta$$
$$+ [C + M(\xi^2 + \eta^2)]\operatorname{dos}^2\gamma$$
$$-2M\eta\zeta \operatorname{dos}\beta \operatorname{dos}\gamma - 2M\xi\zeta \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\gamma - 2M\xi\eta \operatorname{dos}\alpha \operatorname{dos}\beta.$$

Ztąd otrzymujemy zaraz ellipsoidę bezwładności względną do punktu O', i daną przez równanie

$$\left(\frac{A}{M}+\eta^2+\zeta^2\right)X^2+\left(\frac{B}{M}+\xi^2+\zeta^2\right)Y^2+\left(\frac{C}{M}+\xi^2+\eta^2\right)Z^2$$

$$-2\eta\zeta YZ-2\zeta\xi ZX-2\xi\eta XY=\frac{1}{M}.$$

Poczem, wyrażając że ellipsoida jest obrotową, znajdujemy ogólne warunki

$$\frac{A}{M}+\eta^2+\zeta^2+\xi^2=\frac{B}{M}+\zeta^2+\xi^2+\eta^2=\frac{C}{M}+\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

które wymagają żeby było

$$A=B=C,$$

jeśli punkt (ξ, η, ζ) ma być jakikolwiek w przestrzeni.

Przypuszczając że tym warunkom staje się zadość, to jest że ellipsoida środkowa bezwładności jest sferą, wszelki punkt (ξ, η, ζ) przestrzeni rozwiązuje zagadnienie; ponieważ wtedy wiadome równanie na S ma dwa pierwiastki równe.

Uważajmy teraz kwestyę w całej ogólności, kiedy ellipsoida środkowa ma trzy osie nierówne $2a$, $2b$, $2c$; i, dla utkwienia myśli, przypuśćmy

$$a>b>c \quad \text{albo, co wychodzi na jedno,} \quad A>B>C>.$$

W tym ogólnym przypadku, żeby istniala ellipsoida obrotowa bezwładności dla punktu (ξ, η, ζ), trzeba żeby dwa z trzech prostokątów $\eta\zeta$, $\zeta\xi$, $\xi\eta$, były zero.

Biorąc najpierwej $\xi=0$; będzie

$$\left(\frac{A}{M}+\eta^2+\zeta^2\right)X^2+\left(\frac{B}{M}+\zeta^2\right)Y^2+\left(\frac{C}{M}+\eta^2\right)Z^2$$

$$-2\eta\zeta YZ=\frac{1}{M}.$$

Ale powinno być jeszcze

$$\eta^2\zeta^2=\left(\frac{B-A}{M}=\eta^2\right)\left(\frac{C-A}{M}-\zeta^2\right),$$

czyli

$$\frac{M\eta^2}{B-A}+\frac{M\zeta^2}{C-A}-1=0.$$

Wedle uczynionych założeń, to równanie przedstawia na płasczyznie głównej xy sprzężonej z osią wielką $2a$ ellipsoidy środkowej, ellipsę która jest miejscem punktów rozwiązujących zagadnienie.

Oś obrotu ellipsoidy bezwładności, względnej do punktu $(0,\eta,\zeta)$, ma zaś równanie

$$\frac{X}{0}=\frac{MY}{M\eta^2+A-B}=\frac{Z}{\eta\zeta}.$$

Weźmy powtóre $\eta=0$, otrzymamy równanie

$$\frac{M\zeta^2}{C-B}-\frac{M\xi^2}{B-A}-1=0,$$

które pokazuje że, na płasczyznie głównej xz sprzężonej z osią średnią $2b$ ellipsoidy środkowej, jest hiperbola miejscem punktów rozwiązujących zagadnienie.

Nareszcie biorąc $\zeta = 0$, mamy równanie

$$\frac{M\,\xi^2}{C-A}+\frac{M\eta^2}{C-B}+1=0$$

które przedstawia ellipsę urojoną.

Trzy znalezione stożkowe : hiperbola, i dwie ellipsy jedna rzeczywista druga urojona posiadają znamienitą własność; każda z nich ma za linie ogniskowe dwie drugie, to jest, miejsce ognisk każdej z nich składa się z dwóch drugich stożkowych.

Jakoż, wiadomo że, w założeniu

$$a>b>c,$$

ellipsoida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

ma za stożkowe ogniskowe :

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}+\frac{z^2}{c^2-b^2}=1,$$

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1.$$

Więc stożkowa $\dfrac{\eta^2}{\frac{B}{M}-\frac{A}{M}}+\dfrac{\zeta^2}{\frac{C}{M}-\frac{A}{M}}=1$ jest stożkową ogniskową ellipsoidy

$$AX^2+BY^2+CZ^2=M.$$

Zatem trzy stożkowe, o których mowa, są stożkowemi ogniskowemi ellipsoidy jednokładnej do ellipsoidy środkowej.

Nakoniec, jeśli ellipsoida środkowa jest powierzchnią obrotową, około osi OZ na przykład, wtedy, ponieważ $A=B$, biorąc $\xi=0$ i $\eta=0$, równanie ellipsoidy bezwładności staje się

$$\left(\frac{A}{M}+\zeta^2\right)X^2+\left(\frac{A}{M}+\zeta^2\right)Y^2+\frac{C}{M}Z^2=\frac{1}{M}.$$

i przedstawia ellipsoidę obrotową około osi z^dów^ dla wszelkiego punktu $(0,0,\zeta)$ leżącego na osi obrotu.

W tym ostatnim przypadku ellipsoida obrotowa bezwładności będzie sferą, jeśli jest

$$\frac{A}{M}+\zeta^2=\frac{C}{M}. \quad \text{zkąd} \quad \zeta=\pm\sqrt{\frac{C-A}{M}};$$

co wymaga $A>C$. Więc, jeśli ellipsoida środkowa jest obrotową spłasczoną, wtedy na osi obrotu istnieją dwa punkta równo oddalone od środka ciężkości układu materyalnego, i są środkami dwóch sfer bezwładności.

295. Aby rozwiązać wprost i ogólnie zagadnienie sfery bezwładności, szukajmy *punktów przestrzeni dla których wszystkie momenta bezwładności ciała bryłowego jednorodnego są równe.* Biorąc za osie spółrzędnych trzy osie główne bezwładności, przechodzące przez środek ciężkości O danego ciała, nazwijmy jako wyżej ξ, η, ζ spółrzędne punktu O′ który dopełnia wymaganego warunku. Ponieważ wszystkie momenta bezwładności, względem osi poprowadzonych przez punkt O′, mają być równe jako chce zadanie, ellipsoida bezwładności odnosząca

się do tego punktu jest sferą; zatem trzy średnice prostokątne, odpowiednio równoległe do trzech osi spółrzędnych, są osiami głównemi bezwładności. Wyrażamy ten warunek pisząc

$$\sum m(x-\xi)(y-\eta)=0, \quad \sum m(x-\xi)(z-\zeta)=0,$$

$$\sum m(y-\eta)(z-\zeta)=0.$$

Pierwsze równanie rozwinięte daje

$$\sum mxy-\xi M y_1-\eta M x_1+M\xi\eta=0.$$

Ale, z przyczyny uczynionych założeń, mamy

$$\sum mxy=0, \quad x_1=0, \quad y_1=0;$$

więc równanie przywodzi się do

$$\xi\eta=0.$$

Tak samo dwa inne równania przywodzą się do

$$\xi\zeta=0, \quad \eta\zeta=0.$$

Te trzy warunki wymagają żeby z trzech niewiadomych ζ, η, ζ, dwie przynajmniej były zero. Dajmy na to że jest

$$\xi=0 \quad \text{i} \quad \eta=0.$$

W tem przypuszczeniu punkt O', jeśli istnieje, musi leżeć na osi głównej OZ.

To ustaliwszy, wyraźmy nakoniec że trzy momenta bezwładności, względem osi przechodzących przez punkt O′ i równoległych do osi spółrzędnych, są równe. Stosując wiadome twierdzenie (187) mamy

$$A + M\zeta^2 = B + M\zeta^2 = C;$$

co wymaga żeby było

$$A = B \quad \text{i} \quad A < C.$$

Przypuszczając te warunki dopełnione, otrzymujemy

$$\zeta = \pm\sqrt{\frac{C - A}{M}}.$$

Więc, jeśli dwa momenta główne bezwładności układu materyalnego, odnoszące się do jego środka ciężkości, są równe, a trzeci jest największy; albo innemi słowy, jeśli ellipsoida środkowa jest powierzchnią obrotową około swojej najmniejszej osi, OZ w naszem przypuszczeniu, istnieją na tej osi dwa punkta symetryczne względem środka ciężkości O na odległość ζ, które rozwiązują zagadnienie.

196. Na zastosowanie weźmy równoległościan prostokątny jednorodny. Wiemy że trzy proste przechodzące przez środek ciężkości tego równoległościanu, i odpowiednio równoległe do trzech krawędzi przyległych, są jego osiami głównemi; więc momenta bezwładności względem tych osi,

$$A = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2), \quad B = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2), \quad C = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2),$$

któreśmy znaleźli w numerze 185, są momentami głównemi bezwładności. Owoż, jeśli przypuścimy $a = b$, wtedy żeby

istniały na osi OZ dwa punkta dla każdego z których ellipsoida bezwładności jest sferą, powinno być $A < C$ i temsamem $a > c$. Więc, jeśli podstawa równoległościanu jest kwadratem a bok tego kwadratu nie jest mniejszy od jego wysokości, istnieją na osi głównej OZ, równoległej do wysokości, dwa punkta na odległość

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{12}}$$

od środka O figury z których każdy jest środkiem odpowiedającej sfery bezwładności. Te dwa punkta znajdują się wewnątrz albo zewnątrz równoległościanu, albo nawet na jego powierzchni, według jak wartość ζ będzie mniejsza albo większa od $\frac{c}{2}$, albo jej równa, to jest $a < 2c$, $a > 2c$, $a = 2c$.

Jeśli równoległościan staje się sześcianem dwie sfery bezwładności schodzą się w jedną we środku figury.

Gdyby zamiast równoległościanu uważano ellipsoidę jednorodną, daną przez równanie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

znalezionoby że ta ellipsoida powinna być obrotową około swojej najmniejszej osi, tak żeby, w przypuszczeniu $a = b$, był $a > c$. Wtedy, biorąc momenta bezwładności wyznaczon względem trzech osi głównych (185), otrzymanoby

$$\zeta = \pm \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{5}}; \text{ etc.}$$

197. Szukajmy nakoniec *punktów dla których moment bez-*

władności układu bryłowego względem punktu jest najmniejszy możebny.

Jeśli oznaczymy przez x, y, z spółrzędne prostokątne jednego z punktów materyalnych układu, albo figury geometrycznej uważanej za materyalną, i przez ξ, η, ζ spółrzędne punktu szukanego, moment bezwładności układu względem tego punktu wyrazi się przez

$$\sum m\left\{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2\right\}.$$

Żeby ta summa mogła mieć wartość minimum, trzeba żeby jej pochodne względem ξ, η, ζ były zero; co daje równania

$$\sum m(x-\xi)=0, \qquad \sum m(y-\eta)=0, \qquad \sum m(z-\zeta)=0,$$

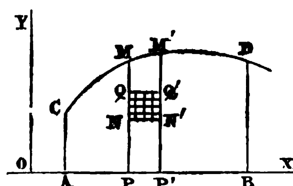
z których wynikają wartości

$$\xi=\frac{\sum mx}{\sum m}, \qquad \eta=\frac{\sum my}{\sum m}, \qquad \zeta=\frac{\sum mz}{\sum m}.$$

Istnieje więc punkt jedyny któremu odpowieda moment bezwładności minimum, i tym punktem jest właśnie środek ciężkości układu bryłowego, wyznaczony przez powyższe równania które są jego określeniem.

198. Moment bezwładności ciała bryłowego obrotowego. Niech będzie linia płaska CD która obracając się około osi OX tworzy powierzchnię obrotową danego ciała. Weźmy za osie spółrzędnych prostę OX i prostopadłę OY na płaszczyznie południkowej. Poprowadźmy rzędne MP, M'P' dwóch punktów sąsiednich M, M' linii CD, i, biorąc na MP punkt N mający

odciętę OP $= x$ a rzędnę NP $= r$, uważajmy nieskończenie



mały prostokąt NQQ'N' którego bokami są dx i dr. Ten prostokąt obracając się około osi OX utworzy figurę obrączkową której objętość, na mocy twierdzenia *Guldina*, ma za miarę $drdx.2\pi r$; zatem, nazywając ρ gęstość nieskończenie małej bryłki zapełniającej tę objętość, jej massa będzie $2\pi\rho rdrdx$, a moment bezwładności względem osi OX wyrazi się przez $2\pi\rho rdrdx.r^2$ albo $2\pi\rho r^3drdx$. Ztąd wnosimy że moment bezwładności ciała, zapełniającego objętość utworzoną obrotem odcinka PMM'P', otrzymuje się przez całkę

$$2\pi dx\int_0^y \rho r^3dr,$$

wziętą od $r = 0$ do $r = y$.

Jeśli ciało jest jednorodne, można wykonać wskazaną całkę i będzie

$$2\pi\rho dx\int_0^y r^3dr = \frac{1}{2}\pi\rho y^4dx.$$

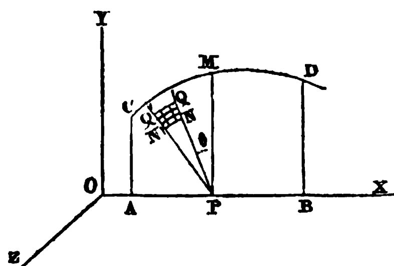
Więc moment bezwładności całego ciała jednorodnego, jakie się mieści w objętości utworzonej obrotem powierzchni ACDB około osi OX, przedstawia się przez całkę określoną

$$\frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4dx,$$

w której a i b oznaczają długości odciętych OA i OB.

Można dojść do tego wyniku ogólniejszym sposobem który nam zaraz będzie potrzebny.

Jakoż, przetnijmy dane ciało obrotowe płasczyzną równoleżnika przechodzącą przez punkt P osi obrotu OX, i poprowadźmy dwie płasczyzny południkowe tworzące kąt $d\theta$; nazywając θ kąt



jaki pierwsza czyni z płasczyzną spółrzędną XY. Te dwie płasczyzny południkowe przecinają równoleżnik wedle promieni PN, PN'. Uczyńmy $PN = r$, i uważajmy w kącie NPN' nieskończenie mały trapez kołowy NQQ'N' którego miarą jest $rdrd\theta$. Owoż, graniaston materyalny mający podstawę różnolinijną NQQ'N', wysokość dx i gęstość ρ, będzie miał massę $\rho rdrd\theta dx$; ztąd wynika że moment bezwładności cząstki nieskończenie małej ciała, zapełniającej ten graniaston, równa się wieloczynowi $\rho rdrd\theta dx.r^2$; więc moment bezwładności całego ciała obrotowego, względem jego osi, wyraża się przez całkę potrójną

$$\int\int\int \rho r^3 drd\theta dz,$$

wziętą w granicach od $\theta = 0$ do $\theta = 2\pi$, od $r = 0$ do $r = y$, i od $x = a$ do $x = b$.

Jeśli ciało jest jednorodne, wykonywając dwa pierwsze cał-

kowania i nazywając A moment bezwładności względem osi głównej OX, znajdziemy już znaną formułę

$$(7)\qquad A = \frac{1}{2}\pi\rho\int_a^b y^4 dx.$$

Powiedzieliśmy wyżej że oś obrotu OX jest osią główną. Aby to usprawiedliwić, trzeba okazać że dwie summy $\int\int\int xydxdydz$ i $\int\int\int xzdxdydz$ są zero. Owoż, dlatego że płasczyzny południkowe XZ i XY są płasczyznami symetryi ciała, będzie

$$\int_{-y_1}^{+y_1} ydy = 0, \qquad \int_{-z_1}^{+z_1} zdz = 0;$$

mamy więc tosamości

$$\int\int\int_{-y_1}^{+y_1} xydxdydz = 0, \qquad \int\int\int_{-z_1}^{+z_1} xzdxdydz = 0,$$

które z resztą są widoczne a priori.

Nietrudno teraz wyznaczyć moment bezwładności ciała jednorodnego obrotowego, względem osi spółrzędnych OY prostopadłej do osi obrotu OX. Jakoż, momenta bezwładności cząstki graniastonnej $\rho rdrd\theta dx$, względem płasczyzn YZ i XY są

$$\rho rdrd\theta dx.x^2 \quad \text{i} \quad \rho rdrd\theta dx.r^2 \text{wst}^2\theta;$$

ztąd wnosimy

$$G = \rho\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^y rdr\int_a^b x^2 dx = \pi\rho\int_a^b y^2 x^2 dx;$$

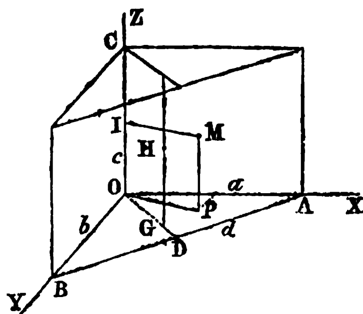
$$I = \rho\int_0^{2\pi}\int_0^y\int_a^b r^3 \text{wst}^2\theta d\theta drdx = \frac{1}{4}\pi\rho\int_a^b y^4 dx.$$

Więc moment bezwładności ciała obrotowego jednorodnego, względem osi spółrzędnych OY prostopadłej do osi obrotu OX, wyraża się przez

$$(8) \qquad B = \pi\rho\int_a^b\left(x^2+\frac{1}{4}y^2\right)y^2dx.$$

MOMENTA NIEKTÓRYCH CIAŁ JEDNORODNYCH.

199. Graniaston trójkątny prosty. Wyznaczymy moment bezwładności graniastonu trójkątnego prostego i jednorodnego, względem osi przechodzącej przez jego środek ciężkości i równoległej do krawędzi bocznych.



Niech będzie graniaston trójkątny prosty OABC; weźmy jego trzy krawędzie przytykające OA, OB, OC za osie spółrzędnych x, y, z, i szukajmy najpierwej momentu bezwładności względem osi OZ która jest prostopadła do płaszczyzny xy. Nazywając a, b, c trzy rzeczone krawędzie i czyniąc kąt AOB$=\alpha$, widzimy łatwo że massa punktu materyalnego M(x, y, z) wyraża się przez $\rho dxdydz \operatorname{wst}\alpha$, a jego moment bewładności względem osi OZ przez $\rho dxdydz \operatorname{wst}\alpha.(x^2+y^2+2xy\operatorname{dos}\alpha)$.

Więc moment bezwładności ciała graniastonnego jednorodnego

względem osi OZ, który nazwiemy K, jest przedstawiony przez całkę potrójną

$$K = \rho \,\mathrm{wst}\,\alpha \int\int\int (x^2 + y^2 + 2xy \,\mathrm{dos}\,\alpha) dx dy dz,$$

wziętą w granicach całej rozciągłości tego ciała.

Całkujemy najpierwej względem zmiennej z która nie wchodzi pod znak całkowania, i otrzymujemy

$$K = \rho c \,\mathrm{wst}\,\alpha \int\int (x^2 + y^2 + 2xy \,\mathrm{dos}\,\alpha) dx dy;$$

poczem szukamy osobno każdej z trzech całek

$$\int\int x^2 dx dy, \quad \int\int y^2 dx dy, \quad \int\int xy dx dy.$$

Uważając że równanie linii AB jest

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

znajdujemy pierwszą całkę

$$\int_0^a x^2 dx \int_0^y dy = b \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) x^2 dx = \frac{ba^3}{12}.$$

Ztąd zaraz wnosimy wartość drugiej całki

$$\int_0^b y^2 dy \int_0^x dx = \frac{ab^3}{12}.$$

Nakoniec wartość trzeciej całki jest

$$\int_0^a x dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} b^2 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 x dx = \frac{a^2 b^2}{24}.$$

Więc, zbierając wszystkie trzy całki, otrzymujemy

$$K = \frac{1}{12}\rho abc(a^2 + b^2 + ab \operatorname{dos} \alpha) \operatorname{wst} \alpha,$$

albo, nazywając M massę graniastonu i oznaczając przez d bok AB,

$$K = \frac{M}{12}(3a^2 + 3b^2 - d^2).$$

To ustaliwszy, nazwijmy C szukany moment bezwładności graniastonu względem osi głównej GH równoległej do OZ i przechodzącej przez środek ciężkości G podstawy OAB; jeśli oznaczymy przez h ośrodkowę OD boku AB, na mocy wiadomego twierdzenia będziemy mieli

$$C = \frac{M}{12}(3a^2 + 3b^2 - d^2) - \frac{4}{9}Mh^2 = \frac{M}{3}\left(\frac{3a^2 + 3b^2 - d^2}{4} - \frac{4h^2}{3}\right).$$

Owoż, trójkąt OAB daje

$$2a^2 + 2b^2 = 4h^2 + d^2;$$

więc, rugując $4h^2$, znajdujemy ostatecznie

$$C = \frac{M}{36}(a^2 + b^2 + d^2).$$

Działając podobnie znajduje się łatwo że, w równoległościanie prostym o podstawie równoległobocznej moment bezwładności, względem osi głównej przechodzącej przez środek ciężkości i równoległej do krawędzi bocznych, wyraża się przez

$$C = \frac{1}{12}\rho abc(a^2 + b^2) \operatorname{wst} \alpha = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

200. Sfera i warstwa sferyczna. Chociaż znamy już moment bezwładności sfery jednorodnej względem średnicy jakiejkolwiek, wyznaczymy go jeszcze drugi raz metodą właściwą ciałom obrotowym. Niech będzie utworzona obrotem koła danego przez równanie

$$x^2+y^2=r^2;$$

biorąc oś $x^{ów}$ za oś obrotu, i stosując formułę n° 198, mamy

$$\mathrm{K}=\frac{1}{2}\pi\rho\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)^2dx=\pi\rho\int_0^r(r^4-2r^2x^2+x^4)dx=\frac{8}{15}\pi\rho r^5,$$

albo, ponieważ massa sfery jest $\mathrm{M}=\frac{4}{3}\pi\rho r^3$,

$$\mathrm{K}=\frac{8}{15}\pi\rho r^5=\frac{2}{5}\mathrm{M}r^2.$$

Z momentu bezwładności sfery wywodzi się zaraz moment bezwładności warstwy sferycznej. Jakoż, gdy promień r sfery bierze przyrost dr, moment bezwładności powiększa się swoją różniczką $\frac{8}{3}\pi\rho r^4dr$, która wyraża moment bezwładności warstwy sferycznej nieskończenie cienkiej, mającej grubość dr i gęstość ρ. Zkąd łatwo wnosimy że całka

$$\frac{8}{3}\pi\int_{r_0}^{r_1}\rho r^4dr$$

przedstawia moment bezwładności warstwy sferycznej, mającej promień wewnętrzny r_0 i promień zewnętrzny r_1. Gęstość ρ warstwy, z założenia jednakowa dla wszystkich punktów leżących w odległości r od środka, może się zmieniać z tą odległością. Ztąd wynika że, względem średnicy jakiejkolwiek, mo-

ment bezwładności sfery promienia R, złożonej z warstew spółśrodkowych jednorodnych których gęstość jest funkcyą odpowiedającego promienia r, wyraża się przez całkę określoną

$$K = \frac{8}{3}\pi\int_0^R \rho r^4 dr.$$

Ta formuła i poprzedzająca otrzymują się wprost za pomocą spółrzędnych biegunowych. Dość tylko uważać że moment bezwładności cząstki nieskończenie małej ciała, względem osi obrotu OX, przedstawia się przez $\rho r^2 \text{wst}\theta\, dr d\theta d\psi . r^2 \text{wst}^2\theta$; więc

$$K = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \text{wst}^3\theta d\theta \int_{r_0}^{r_1} r^4 dr = \frac{8}{3}\pi\int_{r_0}^{r_1} \rho r^4 dr.$$

201. Odcinek sfery. Szukajmy momentu bezwładności odcinka sferycznego, względem jego osi obrotu. Jeśli, nazywając r promień i h wysokość tego odcinka, weźmiemy oś obrotu za oś $x^{ów}$ i styczną u wierzchołka za oś $y^{ów}$, równanie koła tworzącego sferę będzie

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

i moment bezwładności odcinka sferycznego, względem osi obrotu, na mocy wiadomej formuły wyrazi się przez

$$A = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h (2rx - x^2)^2 dx = \frac{1}{2}\pi\rho h^3\left(\frac{4r^2}{3} - rh + \frac{h^2}{5}\right).$$

Ale massa M tego odcinka jest

$$M = \pi\rho\int_0^h (2rx - x^2)\, dx = \pi\rho h^2\left(r - \frac{h}{3}\right);$$

więc promień wirowy k około osi obrotu wyznaczy się przez

$$k^2 = \frac{h}{10} \cdot \frac{20r^2 - 15rh + 3h^2}{3r - h}.$$

Szukajmy jeszcze momentu bezwładności B odcinka sferycznego względem stycznej w jego wierzchołku. Stosując wiadomą formułę, znajdujemy

$$B = \frac{\pi\rho}{4}\int_0^h (3x^2 + 2rx)(2rx - x^2)dx = \frac{\pi\rho}{4}\int_0^h (4rx^3 + 4r^2x^2 - 3x^4)dx$$

$$= \frac{\pi\rho h^3}{60}(20r^2 + 15rh - 9h^2).$$

A że massa odcinka $M = \frac{\pi\rho h^2}{3}(3r - h)$; więc

$$B = \frac{Mh}{20} \cdot \frac{20r^2 + 15rh - 9h^2}{3r - h}.$$

Ztąd wyprowadzamy promień wirowy k' odcinka sferycznego około stycznej u wierzchołka,

$$k'^2 = \frac{h}{20} \frac{20r^2 + 15rh - 9h^2}{3r - h}.$$

Aby łatwo znaleźć promień wirowy k'' tego odcinka około średnicy podstawy, trzeba użyć formuły danej w numerze 187. Owoż, środek ciężkości odcinka sferycznego leży na osi symetryi w odległości $\frac{3(2r - h)^2}{4(3r - h)}$ od środka sfery; zatem jego odległości od wierzchołka i od środka podstawy są $\frac{h(8r - 3h)}{4(3r - h)}$

i $\frac{h(4r-h)}{4(3r-h)}$. Stosując więc rzeczoną formułę, mamy

$$k'^2 - k''^2 = \frac{h^2(2r-h)}{2(3r-h)}.$$

zkąd wynika

$$k''^2 = \frac{h}{20}\cdot\frac{20r^2+15rh-9h^2}{3r-3} - \frac{h^2(2r-h)}{2(3r-h)}$$

albo

$$k''^2 = \frac{h}{20}\cdot\frac{20r^2-5rh+h^2}{3r-h}.$$

Uwaga. Soczewka dwuwypukła jednorodna, zawarta między dwiema powierzchniami sferycznemi równemi, jest podwójnym odcinkiem sferycznym; jej promienie wirowe około osi obrotu i około średnicy podstawy odcinka sferycznego mają wartości oznaczone powyżej przez k^2 i k''^2.

202. Walec obrotowy. Nazywając R promień i h wysokość walca obrotowego jednorodnego, mamy zaraz jego moment bezwładności A względem osi obrotu,

$$A = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^R R^4 dx = \frac{1}{2}\pi\rho R^4 h;$$

a ponieważ massa tego walca ma za miarę $M = \pi\rho R^2 h$, będzie

$$A = \frac{1}{2} MR^2.$$

Moment bezwładności B walca obrotowego jednorodnego, względem prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez środek ciężkości, łatwo się wyznacza za pomocą dopiero co

użytej formuły. Uważając że w obecnym przypadku $y = R$, otrzymujemy

$$B = 2\pi\rho R^2 \int_0^{\frac{1}{2}h} \left(x^2 + \frac{R^2}{4}\right) dx = \frac{1}{12}\pi\rho R^2 h(h^2 + 3R^2)$$

203. Stożek obrotowy. Niech będzie stożek jednorodny którego powierzchnia, utworzona obrotem linii prostej $y = ax$ około osi $x^{ów}$, jest zamknięta płaszczyzną $x = h$.

Moment bezwładności stożka względem osi obrotu jest

$$A = \frac{1}{2}\pi\rho a^4 \int_0^h x^4 dx = \frac{\pi}{10}\rho a^4 h^5,$$

albo

$$A = \frac{\pi}{10}\rho R^4 h = \frac{3}{10} MR^2;$$

nazywając R promień podstawy i M massę stożka.

Owoż, moment bezwładności tego samego stożka względem osi $y^{nów}$ na mocy formuły (8) ma wartość

$$B = \frac{\pi}{4}\rho a^2(4 + a^2) \int_0^h x^4 dx = \frac{\pi}{20}\rho a^2(4 + a^2)h^5,$$

albo

$$B = \frac{\pi}{20}\rho R^2 h(4h^2 + R^2) = \frac{3}{20} M(4h^2 + R^2);$$

więc moment bezwładności B′ stożka obrotowego jednorodnego, względem prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez środek ciężkości, równa się

$$B' = \frac{3}{20} M(4h^2 + R^2) - \frac{9}{16} Mh^2 = \frac{3}{80} M(h^2 + 4R^2).$$

204. Pień stożka obrotowego. Niech będzie $y = ax + r$ linia prosta tworząca powierzchnię pnia stożka obrotowego jednorodnego, którego promieniami podstaw są R i r a wysokością h. Moment bezwładności tego pnia, względem osi obrotu, wziętej za oś $x^{\acute{o}w}$, wyraża się przez

$$A = \frac{1}{2}\pi\rho\int_0^h y^4 dx = \frac{\pi\rho}{2a}\int_r^R y^4 dy = \frac{\pi\rho}{10a}(R^5 - r^5).$$

Ale massa pnia stożkowego jest

$$M = \pi\rho\int_0^h y^2 dx = \frac{\pi\rho}{a}\int_r^R y^2 dy = \frac{\pi\rho}{3a}(R^3 - r^3);$$

więcj

$$A = \frac{3}{10}M\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Moment bezwładności pnia stożka obrotowego jednorodnego, względem osi $y^{n\acute{o}w}$, prostopadłej do osi obrotu i przechodzącej przez środek podstawy promienia r, przedstawia się przez

$$B = \frac{\pi\rho}{a}\int_r^R\left\{\frac{(y-r)^2}{a^2} + \frac{y^2}{4}\right\}y^2 dy = \frac{\pi\rho}{a^3}\int_r^R\left(\frac{4+a^2}{4}y^4 - 2ry^3 + r^2y^2\right)dy$$

$$= \frac{\pi\rho}{a^3}\left\{\frac{4+a^2}{20}(R^5 - r^5) - \frac{r}{2}(R^4 - r^4) + \frac{r^2}{3}(R^3 - r^3)\right\}.$$

A że massa tego pnia stożkowego jest

$$M = \frac{\pi\rho}{3a}(R^3 - r^3),$$

więc

$$B = \frac{3M}{a^2}\left(\frac{4+a^2}{4}\cdot\frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} - \frac{r}{2}\cdot\frac{R^4 - r^4}{R^3 - r^3} + \frac{r^2}{3}\right).$$

205. **Bryła wydrążona.** Chcąc wyznaczyć moment bezwładności bryły wydrążonej, dość jest znaleźć moment bezwładności całej bryły i części wydrążonej, jak gdyby obie były napełnione tą samą materyą, i potem wziąć różnicę tych dwóch momentów.

Zastosujmy to do walca obrotowego wydrążonego. Nazywając R i R′ promienie dwóch walców które przypuszczamy jednorodne, mamy zaraz ich momenta bezwładności względem spólnej osi obrotu,

$$\frac{1}{2}\pi\rho R^4 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}\pi\rho R'^4;$$

zkąd, biorąc różnicę, wywodzimy szukany moment

$$\frac{1}{2}\pi\rho(R^4 - R'^4).$$

Jeśli potrzebujemy promienia wirowego około osi obrotu, uważając że massa walca obrotowego wydrążonego jest $\pi\rho(R^2 - R'^4)$, otrzymujemy

$$k^2 = \frac{1}{2}(R^2 + R'^2).$$

MOMENTA BEZWŁADNOŚCI POWIERZCHNI I LINIJ.

206. Można sobie wyobrazić punkta materyalne jednostajnie rozstawione na powierzchni albo na linii, i, przez podobieństwo, uważać momenta bezwładności powierzchni i linij jak gdyby te były materyalne jednorodne, powierzchnie nieskończenie małej grubości a linie nieskończenie cienkie.

Uważając powierzchnię płaską jako ciało bryłowe mające nieskończenie małą grubość, nazywają *ellipsą bezwładności*,

w danym punkcie, ślad ellipsoidy bezwładności na płasczyznie tej powierzchni.

Momenta bezwładności powierzchni płaskich, a raczej promienie wirowe, grają pewną rolę w Mechanice zastosowanej; dlatego wskażemy kilka przykładów najczęściej przydatnych.

PROSTOKĄT. Nazwijmy a i b dwa boki przyległe prostokąta, i, biorąc pierwszy za oś $x^{ów}$ drugi za oś $y^{ów}$, szukajmy momentu bezwładności, a następnie promienia wirowego około boku b. Jeśli oznaczymy przez dz nieskończenie małą grubość prostokąta i przez ρ jego gęstość, będziemy zaraz mieli

$$\mathrm{M}k^2 = \rho dz \int_0^a \int_0^b x^2 dx dy = \frac{1}{3} \rho a^3 b dz.$$

Owoż, massa M tego prostokąta wyraża się przez

$$\mathrm{M} = \rho abdz;$$

więc

$$k^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Na przyszłość opuścimy czynnik ρdz, zostawiając go domyślnym w tego rodzaju momentów bezwładności.

Przypuszczając że oś momentu bezwładności przechodzi przez środek ciężkości prostokąta, i przenosząc do tego punktu, równolegle, osie spółrzędnych, znajdziemy

$$\mathrm{M}k_y^2 = 4 \int_0^{\frac{1}{2}a} \int_0^{\frac{1}{2}b} x^2 dx dy = \frac{1}{12} a^3 b;$$

zkąd

$$k_y^2 = \frac{a^2}{12}.$$

Jeśli trzeba wyznaczyć promień wirowy k_z tego samego prostokąta, około osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek ciężkości, będzie

$$Mk_z^2 = \int\int (x^2+y^2)dxdy = 2b\int_0^{\frac{1}{2}a} x^2dx + 2a\int_0^{\frac{1}{2}b} y^2dy = \frac{ab}{12}(a^2+b^2);$$

zkąd

$$k_z^2 = \frac{1}{12}(a^2+b^2).$$

TRÓJKĄT. Oznaczając przez a, b, c trzy boki trójkąta, szukajmy promienia wirowego, około osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez wierzchołek C. Sposobem użytym w numerze 199 znajdziemy bez żadnej trudności

$$k^2 = \frac{1}{12}(3a^2+3b^2-c^2).$$

A jeśli oś momentu bezwładności, prostopadła do płaszczyzny trójkąta, przechodzi przez jego środek ciężkości, wtedy

$$k_z^2 = \frac{1}{36}(a^2+b^2+c^2).$$

KOŁO. Wyznacza się łatwo moment bezwładności powierzchni koła względem jednej z jego średnic, uważając tę powierzchnię jako złożoną z nieskończenie małych trapezów kołowych $rdrd\theta$, których momenta bezwładności względem średnicy wziętej za oś $x^{ów}$ wyrażają się przez $rdrd\theta . r^2 \text{wst}^2\theta$. Jeśli więc nazwiemy a promień koła, będzie

$$Mk^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^a r^3 \text{wst}^2\theta\, drd\theta = \frac{a^4}{8}\int_0^{2\pi}(1-\text{dos}\,2\theta)d\theta = \frac{1}{4}\pi a^4;$$

zkąd

$$k^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Zatem moment bezwładności wieńca kołowego mającego promienie a i b, względem średnicy jakiejkolwiek, równa się

$$Mk^2 = \frac{1}{4}\pi(b^4 - a^4); \quad \text{zkąd} \quad k^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Ellipsa. Niech będzie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

równanie ellipsy. Jeśli chcemy znaleźć łatwo moment bezwładności tej ellipsy względem jednej z dwóch jej osi, połóżmy

$$x = ax', \qquad y = by',$$

będziemy mieli

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

koło promienia 1. Tym sposobem moment bezwładności ellipsy względem osi $x^{ów}$, na przykład, wyrazi się przez

$$Mk_x^2 = \int\int y^2 dx dy = ab^3 \int\int y'^2 dx' dy'.$$

Owoż, całka podwójna $\int\int y'^2 dx' dy'$ przedstawia właśnie moment bezwładności powyższego koła mającego jedność za promień, względem osi $x^{ów}$; więc

$$Mk_x^2 = \frac{1}{4}\pi ab^3, \qquad \text{zkąd} \qquad k_x^2 = \frac{b^2}{4}.$$

Tak samo

$$Mk_y^2 = \frac{1}{4}\pi a^3 b, \qquad \text{zkąd} \qquad k_y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Dwa pierwsze wyniki składają moment bezwładności ellipsy, względem osi prostopadłej do jej płaszczyzny i przechodzącej przez środek ciężkości; co daje

$$Mk_z^2 = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2), \qquad \text{zkąd} \qquad k_z^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

Czyniąc $a = b = r$, otrzymujemy moment bezwładności koła względem jego osi,

$$Mk^2 = \frac{1}{2}\pi r^4 \qquad \text{zkąd} \qquad k_z^2 = \frac{r^2}{2}.$$

Ztąd wnosimy że promień wirowy wieńca kołowego mającego promienie a i b, względem jego osi, równa się

$$k_z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2).$$

Linia prosta. Niech będzie linia prosta materyalna AB mająca długość l. Możemy uważać tę prostę jako graniaston albo walec bryłowy nieskończenie cienki, albo, jeszcze lepiej, jako prostokąt nieskończenie wązki, mający podstawę l i wysokość dy. Ztąd wynika że moment bezwładności takiej prostej, względem osi prostopadłej i przechodzącej przez jedną jej skrajności wyraża się przez

$$Mk^2 = \frac{1}{3}l^3 dy, \qquad \text{zkąd} \qquad k^2 = \frac{l^2}{3}.$$

Jeśli oś momentu bezwładności jest prostopadła we środku prostej AB, wtedy

$$Mk_y^2 = \frac{1}{12}l^3 dy, \qquad \text{zkąd} \qquad k_y^2 = \frac{l^2}{12}.$$

Nakoniec, gdy oś momentu bezwładności, prostopadła do AB, znajduje się w przestrzeni na odległość a od tej prostej, wtenczas, stosując twierdzenie numeru 187, mamy

$$k_y^2 = \frac{l^2}{12} + a^2.$$

Aby jeszcze wyznaczyć promień wirowy tej samej prostej AB, około osi AI która z nią czyni kąt BAI $= \alpha$ przechodząc przez skrajność A, bierzemy prostę AB za oś $x^{ów}$, i na płasczyznie kąta BAI prowadzimy oś AY prostopadłą do AB; poczem uważamy ellipsę bezwładności w punkcie A, i, stosując formułę (5) w której A $=0$ i B $= \frac{1}{3} l^3 dy$, otrzymujemy

$$\mathrm{M}k^2 = \frac{1}{3} l^3 dy \,\mathrm{wst}^2\alpha, \qquad \text{zkąd} \qquad k^2 = \frac{1}{3} l^2 \mathrm{wst}^2\alpha.$$

Te wszystkie promienie wirowe linii prostej, a ogólnie linii płaskiej jakiejkolwiek względem osi $y^{ów}$, wywodzą się wprost z formuły

$$lk^2 = \int_{s_0}^{s} x^2 ds,$$

w której l znaczy długość linii.

Okrąg koła. Promień wirowy okręgu względem jego osi otrzymuje się poprostu z ogólnej formuły

$$lk_z^2 = \int_{s_0}^{s} (x^2 + y^2) ds.$$

Jakoż, $\quad x^2 + y^2 = r^2 \quad$ i $\quad 5 = l = 2\pi r; \quad$ więc

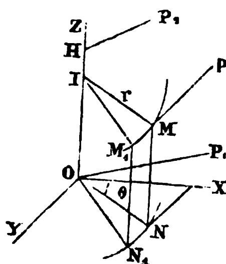
$$k_z = r.$$

ROZDZIAŁ IV.

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO OKOŁO STAŁEJ OSI.

---

207. Wiemy że wszelki ruch ciała bryłowego może być uważany jako składający się z dwóch ruchów pojedynczych spółczesnych, z których jeden, ruch uniesienia, jest ogólnie przeniesieniem środka ciężkości, a drugi, ruch wirowy, jest ruchem względnym wszystkich innych punktów ciała, około tego środka jak gdyby on był punktem stałym. Wyłożyliśmy już ruch punktu materyalnego w pierwszym tomie niniejszego dzieła, i daliśmy główne twierdzenia ruchu środka ciężkości w obecnym; przechodzimy więc do ruchu wirowego. A ponieważ wirowanie ciała około punktu rozkłada się na trzy oddzielne wirowania, każde około jednej osi, myślimy że postąpimy logicznie zajmując się najpierwej ruchem ciała około osi, dając potem ruch około punktu, i wykładając nakoniec ogólne własności ruchu ciała zupełnie wolnego w przestrzeni.



Niech będzie ciało bryłowe obracające się około osi stałej OH pod działaniem sił jakichkolwiek. Ponieważ dany układ mate

ryalny jest ze związkami zupełnemi, jedno równanie wystarcza do wyznaczenia jego ruchu. Zasada d'*Alemberta* daje natychmiast to jedyne równanie; dość tylko zważać że w układzie bryłowym, niezmiennym z przypuszczenia, siły wewnętrzne nie istnieją, i wyrazić że summa momentów sił zewnętrznych rzeczywiście przyłożonych i sił bezwładności (zmyślonych), wzięta względem osi obrotu, jest zero. Jeśli więc, obierając oś obrotu OZ za oś $z^{ów}$, i nazywając x, y, z spółrzędne prostokątne jakiegokolwiek punktu M ciała, oznaczymy przez m jego massę i przez X, Y, Z składowe siły zewnętrznej P istotnie przyłożonej, będziemy mieli

$$(1) \qquad \sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y) - \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = 0.$$

Znalezione równanie może się uprościć. Nazwijmy r odległość MI punktu M od osi obrotu OZ, θ kąt płaszczyzny południkowej MOZ z płaszczyzną spółrzędną ZX, i N moment wszystkich sił zewnętrznych około osi OZ; nareszcie niech będzie $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ prędkość kątowa na końcu czasu t, którą uważamy za dodatną albo odjemną, według jak ruch wirowy odbywa się od lewej ręki do prawej albo w stronę przeciwną, dla widza stojącego na płaszczyznie XY wzdłuż osi obrotu OZ. Mamy

$$x = r\,\mathrm{dos}\,\theta, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\,\theta,$$

zkąd różniczkując wynika

$$\frac{dx}{dt} = -r\,\mathrm{wst}\,\theta\frac{d\theta}{dt} = -y\omega,$$

$$\frac{dy}{dt} = r\,\mathrm{dos}\,\theta\frac{d\theta}{dt} = x\omega,$$

i następnie

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x^2 + y^2)\omega = r^2\omega;$$

a jeśli zróżniczkujemy ostatnie równanie, będzie

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = r^2\frac{d\omega}{dt}.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu (1), otrzymujemy

$$\sum mr^2\frac{d\omega}{dt} = \text{N};$$

a że czynnik $\frac{d\omega}{dt}$ jest ten sam dla wszystkich punktów materyalnych układu w chwili uważanej, można go wyprowadzić z pod znaku $\sum$, i będzie

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = \text{N},$$

albo

(2) $$\frac{d^2\theta}{dt^2}\sum mr^2 = \text{N}.$$

Takie jest równanie różniczkowe ruchu ciała bryłowego około osi stałej.

To równanie pokazuje że $\sum mr^2$ wyraża *liczebnie summę momentów sił bezwładności*, gdy *przyspieszenie kątowe* $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ ciała obracającego się jest jednością. Ztąd pochodzi skrócone

nazwisko *moment bezwładności* którem EULER mianował summę $\sum mr^2$.

Moment bezwładności gra znakomitą rolę w Dynamice; między innemi wchodzi do wysłowienia dwóch ważnych twierdzeń. I tak:

1° W ruchu wirowym ciała summa momentów ilości ruchu ma wartość

$$\sum mvr = \sum m\omega r^2 = \omega \sum mr^2.$$

Więc, *summa momentów ilości ruchu ciała obracającego się, wzięta około osi wirowania, jest równa wieloczynowi prędkości kątowej przez moment bezwładności względem tej osi.*

2° Siła żywa ciała w ruchu wirowym wyraża się przez

$$\sum mv^2 = \sum m\omega^2 r^2 = \omega^2 \sum mr^2.$$

Więc, *siła żywa ciała obracającego się około osi jest równa wieloczynowi kwadratu prędkości kątowej przez moment bezwładności względem tej osi.*

Między równaniem różniczkowem (2) i tem które wyznacza ruch prostolinijny punktu materyalnego pod działaniem siły jakiejkolwiek jest podobieństwo kształtu, z którego wnosimy że moment bezwładności $\sum mr^2$ ciała bryłowego względem osi stałej jest tem, w jego ruchu wirowym około tej osi, czem massa punktu materyalnego w jego ruchu prostolinijnym. Przypuszczając wszystkie inne rzeczy równe, widzimy że przyspieszenie kątowe $\frac{d\omega}{dt}$ jest tem mniejsze im moment bezwładności $\sum mr^2$ jest większy.

208. Można dojść wprost do równania (2). Stosując zasadę d'*Alemberta* do ruchu ciała bryłowego około osi stałej, trzeba wyrazić że siły bezwładności punktów materyalnych czynią równowagę siłom zewnętrznym wprost przyłożonym i siłom wewnętrznym. Owoż, siły wewnętrzne nie istnieją w ciele bryłowem; siła zewnętrzna przyłożona do punktu materyalnego m, rozkłada się na dwie, z których jedna Z jest równoległa do osi obrotu OZ, druga Q prostopadła do tej osi; siła bezwładności punktu m rozkłada się na styczenną $-m\frac{dv}{dt}=-mr\frac{d\omega}{dt}$, i na odśrodkową $-\frac{mv^2}{\rho}=-m\omega^2r$; ale we wszystkich punktach ciała składowe Z i $-m\omega^2r$ są zawsze zniszczone przez opór osi obrotu, a inne składowe znajdują się na płaszczyznach prostopadłych do osi; trzeba więc i dość jest dla równowagi wszystkich sił, żeby summa momentów ostatnich składowych względem osi była zero. Ztąd wynika równanie ruchu

$$-\sum mr^2\frac{d\omega}{dt}+\sum Qq=0$$

albo

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2=\text{N}.$$

To równanie, wyrażone w kształcie

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{\text{N}}{\Sigma mr^2},$$

daje

TWIERDZENIE. *Przyspieszenie kątowe ciała bryłowego, obracającego się około osi stałej, jest równe, w każdej chwili, summie momentów około tej osi wszystkich sił zewnętrznych podzielonej przez moment bezwładności ciała względem tej osi.*

Jeśli $N = 0$, to jest jeśli siły zewnętrzne czynią sobie równowagę około osi obrotu, albo jeśli niema żadnych sił zewnętrznych (poruszających), wtedy ruch jest jednostajny, $\frac{d\omega}{dt} = 0$ zkąd $\omega = stat.$

209. W ogóle momenta sił zmieniają się z położeniem ciała. Gdy te siły nie zależą od czasu t, ich momenta są funkcyami wiadomemi kąta θ; wtedy całkując równanie (2), otrzymuje się θ w funkcyi t, i dwóch stałecznych dowolnych. Te ostatnie wyznaczają się przez wartości początkowe dla θ i $\frac{d\theta}{dt}$ które odpowiedają wartości $t = 0$, gdy położenie i prędkość kątowa ciała są znane na początku ruchu.

Pomnóżmy teraz przez $2d\theta$ obie strony równania (2) i zcałkujmy, będzie

$$\left\{\frac{d\theta^2}{dt^2} - \left(\frac{d\theta^2}{dt^2}\right)_0\right\}\sum mr^2 = 2\int N d\theta = 2\int P dp.$$

albo

$$(\omega^2 - \omega_0^2)\sum mr^2 = 2Pr(P), \tag{3}$$

oznaczając przez $Pr(P)$ całą pracę sił zewnętrznych.

Ostatnie równanie, które jest właśnie równaniem sił żywych, możnaby napisać odrazu, wiedząc że siła żywa układu wyraża się przez

$$\sum m\omega^2 r^2 = \omega^2 \sum mr^2.$$

210. Parcia na oś obrotu. Możemy uważać ciało bryłowe, obracające się ruchem jakimkolwiek około osi stałej OZ, jako

zupełnie wolne, jeśli do dwóch punktów O i H tej osi przyłożymy dwie siły P_1, P_2, równe i przeciwne parciom jakie te dwa punkta wytrzymują w każdej chwili ruchu. Biorąc punkt O za początek spółrzędnych prostokątnych, uczyńmy $OH = h$, i niech będą X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2 Z_2 składowe dwóch sił P_1, P_2. Ponieważ po przyłożeniu sił P_1 i P_2, które wyrażają oddziaływania punktów stałych O i H, układ stał się wolnym w przestrzeni, stosując ogólną zasadę Mechaniki (122) będziemy mieli sześć następujących równań ruchu tego układu:

$$\sum\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right) + X_1 + X_2 = 0,$$

$$\sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right) + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$\sum\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right) + Z_1 + Z_2 = 0,$$

$$\sum\left\{\left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)y - \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)z\right\} - Y_2h = 0,$$

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)z - \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)x\right\} + X_2h = 0,$$

$$\sum\left\{\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)x - \left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)y\right\} = 0.$$

Te równania uproszczają się przez wprowadzenie prędkości kątowej ω. Jakoż, mamy

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega, \qquad \frac{dy}{dt} = x\omega, \qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - x\omega^2, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - y\omega^2, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

więc, podstawiając te wartości w powyższych równaniach, będzie

$$\sum X + \frac{d\omega}{dt}\sum my + \omega^2\sum mx + X_1 + X_2 = 0,$$

$$\sum Y - \frac{d\omega}{dt}\sum mx + \omega^2\sum my + Y_1 + Y_2 = 0,$$

$$\sum Z + Z_1 + Z_2 = 0,$$

(4)

$$L + \frac{d\omega}{dt}\sum mxz - \omega^2\sum myz - Y_2h = 0,$$

$$M + \frac{d\omega}{dt}\sum myz + \omega^2\sum mxz + X_2h = 0,$$

$$N - \frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = 0.$$

Z tych sześciu równań ostatnie tylko nie zawiera oddziaływań P_1, P_2, i jest właśnie równaniem ruchu ciała około osi znalezionem wyżej. Jeśli da się zcałkować, będzie wiadoma prędkość kątowa ω i zaraz składowe X_2, Y_2, a następnie X_1, Y_1. Ale składowe Z_1, Z_2 pozostaną niewyznaczone i tylko ich summa będzie znana, z przyczyny którąśmy już w Statyce widzieli. Więc, biorąc te składowe oddziaływań ze znakami przeciwnemi, będziemy mieli parcie jakich oś obrotu doznaje prostopadle do swojego kierunku w punktach O i H. Co do parć wzdłuż osi, będziemy tylko znali ich summę.

211. Wynikowa i dwojan sił bezwładności. Równania (4) dają, dla ciała obracającego się około osi stałej, składowe wynikowej przeniesienia i składowe dwojanu przeniesienia sił

bezwładności do punktu O osi obrotu, wziętego za początek spółrzędnych. Nazywając X′, Y′, Z′ pierwsze składowe a L′, M′, N′ drugie, mamy

$$X'=\frac{d\omega}{dt}\sum my+\omega^2\sum mx', \quad Y'=-\frac{d\omega}{dt}\sum mx+\omega^2\sum my, \quad Z'=0,$$

$$L'=\frac{d\omega}{dt}\sum mxz-\omega^2\sum myz,$$

$$M'=\frac{d\omega}{dt}\sum myz+\omega^2\sum mxz,$$

$$N'=-\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2.$$

Owoż, żeby jakiekolwiek siły przyłożone do ciała bryłowego miały wynikowę, trzeba i dość jest żeby dopełniały podwójnego warunku

$$LX+MY+NZ=0 \quad \text{i} \quad X^2+Y^2+Z^2>0;$$

więc, w obecnym przypadku sił bezwładności, ponieważ $Z'=0$, te dwa warunki przywodzą się do

$$L'X'+M'Y'=0 \quad \text{i} \quad X'^2+Y'^2>0.$$

Dla uproszczenia podstawień, nazwijmy M massę ciała, a weźmy za płaszczyznę ZX płaszczyznę przechodzącą przez oś obrotu i przez środek ciężkości, będzie

$$y_1=0, \qquad X'=\omega^2 Mx_1, \qquad Y'=-\frac{d\omega}{dt}Mx_1.$$

Podstawiając teraz wartości X', Y', Z', L', M', znajdziemy

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\Sigma mxz-\omega^2\,\Sigma myz\right)\omega^2 Mx_1 -\left(\frac{d\omega}{dt}\Sigma myz+\omega\;\Sigma mxz\right)\frac{d\omega}{dt}\,Mx_1=0$$

$$\left(\omega^4+\frac{d\omega^2}{dt^2}\right)M^2x_1^2>0,$$

albo

$$\left(\omega^4+\frac{d\omega^2}{dt^2}\right)Mx_1\sum myz=0,$$

$$\left(\omega^4+\frac{d\omega^2}{dt^2}\right)M^2x_1^2>0.$$

Tym dwom warunkom jednoczesnym można zadość uczynić tylko przez $\sum myz=0$ i $x_1^2>0$; a że jest zarazem $\sum myz=0$ i $y_1=0$, to wymaga żeby oś obrotu OZ była osią główną bezwładności w jednym ze swoich punktów O', którego odległość h od początku O spółrzędnych jest dana przez wartość

$$h=\frac{\Sigma mxz}{Mx_1}.$$

Więc, jeśli środek ciężkości ciała obracającego się nie leży na osi obrotu, wtedy, aby siły bezwładności przywodziły się do jedynej wynikowej, trzeba i dość jest żeby ta oś obrotu była osią główną bezwładności ciała w jednym ze swoich punktów; a jeśli środek ciężkości ciała znajduje się na osi obrotu, siły bezwładności przywodzą się do dwojanu. Ale w ruchu jednostajnym ten dwojan jest zero, gdy oś obrotu zawierająca środek ciężkości ciała jest zarazem osią główną bezwładności.

Słowem, w ruchu ciała około osi głównej OZ, składowe wynikowej i dwojanu pochodzące z przeniesienia sił bezwładności do punktu O tej osi, wziętego za początek spółrzędnych

i względnie do płaszczyzny ZOX przechodzącej przez środek ciężkości, są

$$X' = \omega^2 \sum mx, \qquad Y' = -\frac{d\omega}{dt}\sum mx, \qquad Z' = 0,$$

$$L' = \frac{d\omega}{dt}\sum mxz, \qquad M' = \omega^2 \sum mxz, \qquad N' = -\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2.$$

W tym przypadku nietrudno wyznaczyć punkt, w którym wynikowa sił bezwładności spotyka płaszczyznę przechodzącą przez oś obrotu OZ i przez środek ciężkości ciała. Niech będą ξ, 0, ζ spółrzędne tego punktu. Stosując twierdzenie momentów do sił bezwładności i do ich wynikowej która jest na płaszczyznie prostopadłej do osi OZ, mamy

$$L' + Y'\zeta = 0, \qquad M' - X'\zeta = 0, \qquad N' - Y'\xi = 0;$$

zkąd, podstawiając wskazane wyżej wartości, otrzymujemy

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mxz - \frac{d\omega}{dt} Mx_1\zeta = 0,$$

$$\omega^2 \sum mxz - \omega^2 Mx_1\zeta = 0,$$

$$-\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 + \frac{d\omega}{dt} Mx_1\xi = 0.$$

Dwa pierwsze równania zgadzają się, i dają

$$\zeta = \frac{\Sigma mxz}{Mx_1} = h.$$

Ta, już znana, wartość pokazuje że punkt szukany znajduje się na prostej, równoległej do osi OX i przechodzącej przez punkt O' dla którego oś OZ jest osią główną bezwładności.

Trzecie równanie daje odciętę punktu szukanego

$$\xi = \frac{\Sigma\, r^2}{Mx_1}.$$

Punkt któryśmy wyznaczyli nazywa się *środkiem uderzenia*. Będziemy wkrótce wiedzieli przyczynę tego nazwiska.

212. Osie ustawiczne wirowania. Zobaczmy teraz co się dzieje z parciami na oś obrotu. gdy niema żadnej siły poruszającej. W ogóle parcia i tężności, jako wiadomo, przedstawiają się przez siły stracone; równania (4) pokazują to wydatnie. Owoż, gdy żadna siła zewnętrzna nie działa na ciało obracające się, siły stracone są poprostu siłami bezwładności, a te ostatnie, z przyczyny $\frac{d\omega}{dt} = 0$, przywodzą się do samych sił odśrodkowych, a więc, w przypadku ruchu wirowego jednostajnego którym się zajmujemy, parcia pochodzą jedynie od sił odśrodkowych, a oddziaływania osi obrotu, równe i przeciwne parciom jakich ta oś doznaje, czynią równowagę siłom odśrodkowym wszystkich punktów materyalnych ciała.

Aby to wszystko jeszcze jaśniej wykazać, uczyńmy zarazem $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$ w równaniach (4), otrzymamy następujące :

(5)
$$\begin{aligned}
\omega^2 &= Mx_1 + X_1 + X_2 = 0\\
\omega^2 &= My_1 + Y_1 + Y_2 = 0\\
Z_1 &+ Z_2 = 0\\
\omega^2 &\sum myz + Y_2 h = 0\\
\omega^2 &\sum mxz + X_2 h = 0.
\end{aligned}$$

Te równania dają składowe oddziaływań P_1, P_2, i temsamem parcie jakie oś obrotu OZ wytrzymuje, w ruchu jednostajnym o którym mowa.

Trzecie równanie pokazuje że oddziaływania P_1, P_2 punktów O, H są oba prostopadłe do osi OZ, ponieważ składowe Z_1, Z_2 niszczą się nawzajem. Cztery inne równania wyznaczają składowe tych oddziaływań prostopadłych, a temsamem dają wielkość i stronę przeciwną parć jakie oś OZ wytrzymuje normalnie do swojego kierunku. Te równania pokazują jeszcze że parcia na oś OZ w jej punktach O i H są proporcyonalne do kwadratu prędkości kątowej statecznej ω; nareszcie, dwa ostatnie równania dowodzą że parcie w punkcie H jest odwrotnie proporcyonalne do rzędnej h tego punktu.

Punkt H nie dozna żadnego parcia, jeśli składowe X_2 i Y_2 są zero, jakakolwiek jest prędkość kątowa ω; do tego trzeba i dość jest żeby istniały dwa warunki $\sum mxz = 0$ i $\sum myz = 0$, czyli żeby oś obrotu OZ była jedną z osi głównych bezwładności względnych do punktu O.

Więc, *jeśli ciało bryłowe, utrzymane przez punkt stały, zaczyna się obracać z prędkością kątową stateczną, około jednej z osi głównych przechodzących przez ten punkt, to będzie się ciągle obracało jednostajnie około tej samej osi jak gdyby ona była niezmienna.*

Z przyczyny tej własności, trzy osie główne bezwładności ciała w jego punkcie stale utrzymanym, nazywają się *osiami ustawicznemi wirowania* względnie do tego punktu.

Jeśli w dwóch pierwszych równaniach (5) uczynimy $X_2 = 0$ i $Y_2 = 0$, otrzymamy składowe parcia P_1 jakiego punkt stały O doznaje

$$-X_1 = \omega^2 M x_1 \quad \text{i} \quad -Y_1 = \omega^2 M y_1,$$

zkąd

$$P_1 = \omega^2 \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad \frac{Y_1}{X_1} = \frac{y_1}{x_1}.$$

Te wyniki dowodzą że parcie normalne, jakie oś obrotu wytrzymuje w punkcie stałym O, jest skierowane na płaszczyznie przechodzącej przez tę oś i przez środek ciężkości ciała.

Można urządzić rzeczy tak żeby oba punkta H i O osi obrotu nie ponosiły żadnego parcia. Aby się to zdarzało, trzeba i dość jest żeby istniały cztery warunki : $\sum mxz = 0$, $\sum myz = 0$, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, które znaczą że oś obrotu OZ powinna być osią główną bezwładności w punkcie O, i przechodzić przez środek ciężkości ciała; wtedy oś OZ będzie osią główną bezwładności we wszystkich swoich punktach, i nie dozna żadnego parcia przez cały czas ruchu wirowego.

Więc, *jeśli ciało bryłowe, zupełnie wolne w przestrzeni i niepoddane żadnej sile zewnętrznej, zaczyna się obracać około jednej z osi głównych bezwładności przechodzących przez środek ciężkości, jego ruch będzie się odbywał ciągle około tej samej osi z prędkością kątową stateczną.*

Widzimy teraz dlaczego osie główne bezwładności, względne do środka ciężkości ciała, zostały nazwane *osiami naturalnemi wirowania.*

213. Kamienie młyńskie. W młynach do mielenia mąki są dwa kamienie, jeden leżący drugi nad nim ruchomy; ziarna sypią się między oba, i, wsuwając się w ich wykute rowki, zostają zgniecione. W kamieniu ruchomym, niżej środka ciężkości, jest utkwiona paprzyca; w jej środek wchodzi wrzeciono które ją unosi, i obracając się nadaje przez nią ruch wirowy temu kamieniowi. Gdyby kamień był niezmiennie związany z wrzecionem, mlewo byłoby bardzo nierówne; bo małe ziarka,

wciskając się między jednostajne przedziały dwóch kamieni, kręciłyby się niezgniecione. Unika się tej niedogodności, zostawiając kamieniowi możebność malutkiego oscyllowania około punktu oparcia paprzycy na wrzecionie. Kamień ruchomy powinien być tak przyrządzony żeby oś wirowania była osią główną w jego punkcie oparcia; co wymaga dwóch warunków $\sum mxz = 0$ i $\sum myz = 0$. Jeśli ich dopełniono, ma się rozumieć sposobami których sama praktyka naucza, i postarano się koniecznie o to żeby środek ciężkości kamienia znajdował się na osi obrotu, ta linia staje się osią naturalną wirowania, i ruch kamienia odbywa się jednostajnie bez udziału sił zewnętrznych. O tem wszystkiem łatwo się zapewnić; dość tylko uważać czy się kamień próżny nie chyboce i obraca okrągło.

214. W tem co poprzedza przypuszczaliśmy że niema sił poruszających, a temsamem że ruch wirowy jest jednostajny; rozbierzemy teraz dwa przypadki sił zewnętrznych, które dają niemniej ważne wyniki i zasługują na uwagę.

A najpierwej, jeśli siły poruszające mają wynikowę równoległą do osi obrotu, ta wynikowa nie wpływa na prędkość kątową ruchu; wywiera wprawdzie parcie na oś, ale tylko wzdłuż; więc nie zmienia kierunku osi ustawicznych wirowania.

Uważajmy potem przypadek ogólniejszy, w którym siły poruszające przywodzą się do dwojanu leżącego na płaszczyznie prostopadłej do osi obrotu OZ. Będzie wtedy

$$\sum X = 0, \qquad \sum Y = 0, \qquad \sum Z = 0,$$

$$L = 0, \qquad M = 0.$$

Wprowadzając te wartości do równań (4) i biorąc z nich dwa

przedostatnie, widzimy że punkt H nie dozna żadnego parcia, jakiinkolwiek jest przyspieszenie kątowe $\frac{d\omega}{dt}$, jeśli dwa następujące równania są tosamościami

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mxz - \omega^2\sum myz = 0$$

$$\frac{d\omega}{dt}\sum myz + \omega^2\sum mxz = 0$$

to jest jeśli istnieją warunki

$$\sum mxz = 0 \quad \text{i} \quad \sum myz = 0.$$

Te dwa warunki dostateczne są także konieczne; albowiem, rugując $\frac{d\omega}{dt}$ otrzymujemy równanie

$$\omega^2\left\{\left(\sum mxz\right)^2 + \left(\sum myz\right)^2\right\} = 0$$

które właśnie wymaga żeby tym warunkom stało się zadość. Rzeczone warunki wyrażają że oś obrotu OZ powinna być jedną z osi głównych względnych do punktu O; a to wszystko, razem z ostatniem równananiem (4), dowodzi że dwojan wynikowy sił bezwładności powinien być zero. W tem założeniu, dwa pierwsze równania (4) wyznaczają składowe $-X_1$, $-Y_1$ parcia P_1 wywartego na punkt O; to zaś parcie jest prostopadłe do osi OZ, bo $Z = 0$ daje $Z_1 + Z_2 = 0$. Więc oś OZ jest osią ustawiczną wirowania względnie do punktu O. Żeby także punkt O nie doznawał żadnego parcia, trzeba i dość jest żeby, czyniąc $X_1 = 0$, $Y_1 = 0$, $Z_1 = 0$ i $X_2 = 0$, $Y_2 = 0$ w równaniach (4), było, niezależnie od $\frac{d\omega}{dt}$,

$$\frac{d\omega}{dt} My_1 + \omega^2 Mx_1 = 0,$$

$$-\frac{d\omega}{dt} Mx_1 + \omega^2 My_1 = 0;$$

co wymaga dwóch warunków

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_1 = 0$$

które pokazują że środek ciężkości ciała obracającego się powinien być na osi obrotu OZ. Dwa powyższe równania razem z warunkiem $Z' = 0$ znaczą że wynikowa sił bezwładności powinna być zero; co widoczne a priori. Jeśli tym wszystkim warunkom staje się zadość, oś OZ będzie osią naturalną wirowania.

Więc, *jeśli ciało bryłowe zaczyna się obracać około jednej z osi głównych bezwładności, które przechodzą przez jego środek ciężkości, a jest tylko pod działaniem dwojanu leżącego na płasczyznie prostopadłej do osi obrotu, ruch tego ciała będzie się odbywał ciągle około tej samej osi, stałej w przestrzeni chociaż zupełnie wolnej.*

Widzimy tedy że, w warunkach sił wyżej określonych, ciało obracające się około osi posiada te same własności jak gdy nie jest pod działaniem żadnej siły poruszającej.

Ale, gdyby oś obrotu OZ nie była jedną z osi głównych bezwładności względnych do punktu O, a ten punkt zostawał sam jeden stały, parcie w punkcie H nie mogłoby nigdy przywieśdź się do zera, i ciało nie poruszałoby się ciągle około tej samej osi OZ. Ten przykład jest dobrze wybrany aby pokazać ze ciało, utrzymane przez jeden punkt stały O i poddane działaniu dwojanu, nie ma dążności do obracania się około osi OZ prostopadłej do płasczyzny tego dwojanu, tylko wtedy jedynie kiedy ta oś jest jedną z osi głównych bezwładności dla punktu O.

215. Działanie dwojanu. Uważajmy ogólnie dwojan jakikolwiek, i zobaczmy jakie jest jego działanie na ciało bryłowe w spoczynku albo w ruchu. Przypuszczając najpierwej ciało w spoczynku, rozłóżmy dwojan na trzy inne L, M, N, około osi głównych bezwładności które się krzyżują w punkcie *stałym* O, wziętym za początek spółrzędnych. Niech będą dp, dq, dr składowe nieskończenie małego wirowania, i A, B, C momenta bezwładności około tych trzech osi głównych.

Dwojan L, prostopadły do osi głównej bezwładności, wywiera przez czas dt działanie którego skutkiem jest przyspieszenie kątowe

$$\frac{dp}{dt} = \frac{L}{A}, \quad \text{zkąd} \quad dp = \frac{L}{A} dt.$$

Tak samo dwojany M i N sprawiają około dwóch drugich osi odpowiedające wirowania

$$dq = \frac{M}{B} dt \quad \text{i} \quad dr = \frac{N}{C} dt.$$

Składając te trzy niezależne wirowania, wedle ogólnej zasady składania ruchów, otrzymamy dla nieskończenie małego wirowania, sprawionego przez dwojan, wartość

$$\sqrt{dp^2 + dq^2 + dr^2} = dt \sqrt{\frac{L^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{N^2}{C^2}}.$$

Osią tego wirowania jest średnica sprężona płaszczyzny dwojanu względem ellipsoidy bezwładności dla punktu stałego O. W samej rzeczy, oś wirowania wynikowego czyni z osiami spółrzędnych kąty których dostawy są proporcyonalne do

$$\frac{L}{A}, \quad \frac{M}{B}, \quad \frac{N}{C}.$$

równanie ellipsoidy bezwładności jest

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

a płaszczyzna średnicowa, równoległa do płaszczyzny dwojanu, ma równanie

$$LX + MY + NZ = 0;$$

zatem, nazywając α, β, γ kąty jakie średnica sprzężona płaszczyzny średnicowej czyni z osiami spółrzędnych, będzie

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{L}{A}} = \frac{\cos\beta}{\frac{M}{B}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{N}{C}}.$$

Owoż, $\frac{L}{A}$, $\frac{M}{B}$, $\frac{N}{C}$, podstawione za $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, sprawdzają te równania; więc twierdzenie jest dowiedzione.

Przypuśćmy teraz że ciało bryłowe jest już w ruchu gdy na nie działa dwojan; będziemy mieli dwa ruchy jednoczesne. Aby wiedzieć jaki będzie ruch ciała na końcu czasu *dt*, trzeba składać nieskończenie małe wirowanie jakieby wydał dwojan w czasie *dt*, gdyby sam jeden działał na ciało, z ruchem jakiby wzięło ciało w tym samym czasie *dt*, gdyby nie było dwojanu. Te dwa oddzielne ruchy złożą się w jeden wynikowy, który właśnie będzie ruchem ciała na końcu czasu *dt*. Otóż skutek działania dwojanu.

Aby to wszystko jeszcze jaśniej wystawić, niech będzie ciało

ciężkie M, obracające się około osi naturalnej wirowania, którą

przypuścimy poziomą OX i mającą jeden punkt stały O. Oś obrotu OX wytrzymuje parcia w punktach O i H, pochodzące z ciężaru P ciała wirującego. Aby się o tem przekonać, dość w równaniach (4) przemienić między sobą litery x, z, małe i wielkie; poczem, uważając że $X = 0$, $Y = 0$, $\sum X = P$, $\frac{d\omega}{dt} = 0$; i następnie $\sum mxy = 0$, $\sum mxz = 0$, bo oś OX jest osią naturalną wirowania, otrymujemy

$$P + Z_1 + Z_2 = 0$$

$$Ph + Z_2 h = 0.$$

Te równania wydatnie pokazują że punkta O i H doznają parcia. Owoż, jeśli podtrzymując ręką skrajność H osi obrotu, której druga skrajność O opiera się na punkcie stałym O, puszczono raptem tę skrajność H, ciało nie upada; ruch wirowy ciągnie się dalej, i oś obrotu OX bierze ruch poziomy około punktu stałego O. To ciekawe zjawisko może się łatwo wytłumaczyé za pomocą dwojanu. Jakoż, ciężar P ciała, z przyczyny punktu stałego O, sprawia dwojan którego oś OK, jest pozioma i prostopadła do osi obrotu OX. Ale, jeśli OX jest osią główną bezwładności, i płasczyzna pionowa XZ dwojanu także płasczyzną główną, wtedy oś OK będzie średnicą sprężoną płasczyzny dwojanu; więc dwojan sprawi, w czasie dt, nieskończenie małe wirowanie OB. Owoż, gdyby dwojan nie działał, wirowanie ciała M odbywałoby się ciągle około OX osi naturalnej wirowania, i byłoby OA w czasie dt; mamy więc dwa ruchy wirowe OA i OB jednoczesne które się składają w jeden. Oś OD wirowania wynikowego jest pozioma, i czyni nieskończenie mały kąt DOA z osią OA. To wszystko jasno pokazuje że oś OX istotnego obrotu ciała, która będąc osią naturalną wirowania zostawałaby nią ciągle gdyby nie było dwojanu pochodzącego

z ciężkości, traci tę własność z przyczyny działania dwojanu i opisuje płaszczyznę poziomą.

216. Przypuszczając że oś wirowania OZ nie jest osią główną bezwładności, i ma tylko sam punkt O stały, szukajmy pod jakiemi warunkami ciało obracające się około takiej osi zachowuje ruch wirowy jednostajny z prędkością ω. Aby znaleźć te warunki, dość jest w równaniu (4), uczynić

$$\frac{d\omega}{dt}=0, \quad X_2=0, \quad Y_2=0, \quad Z_2=0;$$

co daje

$$\sum X+\omega^2 Mx_1+X_1=0,$$

$$\sum Y+\omega^2 My_1+Y_1=0,$$

$$\sum Z+Z_1=0,$$

$$L-\omega^2\sum mxz=0,$$

$$M+\omega^2\sum myz=0,$$

$$N=0.$$

Ostatnie równanie pokazuje że dwojan przeniesienia sił zewnętrznych jest na płaszczyznie równoległej do osi OZ. Jeśli więc uczynimy jeszcze $\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum Z=0$, ciało obracające się będzie tylko pod działaniem samego dwojanu, którego składowe na płasczyznach ZX i ZY mają momenta $\omega^2\sum mxz$ i $\omega^2\sum myz$. Teraz parcie, jakie punkt stały O wytrzymuje, jest wynikową sił $-X_1=\omega Mx_1$ i $-Y_1=\omega^2 My_1$. To parcie będzie zero jeśli $x_1=0$ i $y_1=0$, to jest jeśli ciało obracające się ma środek ciężkości na osi obrotu.

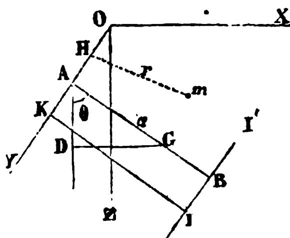
Ztąd wnosimy że, przykładając dwojan przyzwoity, można otrzymać, bez żadnego punktu stałego, wirowanie jednostajne ciała około osi jakiejkolwiek przechodzącej przez jego środek ciężkości.

WAHADŁO SKŁADANE.

217. Nazywa się *wahadłem składanem* ciało bryłowe ciężkie, ruchome około osi stałej poziomej, ale nie przechodzącej przez środek ciężkości. To ciało, pod działaniem samej ciężkości zostające, bierze położenie równowagi w którem jego środek ciężkości znajduje się na płasczyznie pionowej poprowadzonej przez oś obrotu; a jeśli jest zepchnięte z tego położenia i zostawione sobie samemu, to zaraz wchodzi w ruch oscyllacyjny, któryby trwał ciągle gdyby nie było zewnętrznych przeszkód, jako opór powietrza, tarcie około osi, i t. p. Przez przeciwieństwo, nazwano *wahadłem prostem* wahadło idealne, utworzone z punktu materyalnego ciężkiego, zawieszonego na jednej skrajności nici, nierozciągalnej i bez massy, której druga skrajność jest utkwiona. Znamy już ustawę ruchu wahadła pojedynczego; zobaczymy teraz jak to wahadło może się urzeczywiścić przez wahadło składane.

Równanie różniczkowe ruchu wahadła składanego wywodzi się z ogólnej formuły (2) ruchu ciała bryłowego około osi stałej, kładąc tylko za N jego wartość która się równa momentowi ciężaru ciała względem tej osi. Ale otrzymuje się wprost to równanie wyrażając że, na mocy zasady d'*Alemberta*, summa momentów sił poruszających i sił bezwładności jest zero około osi obrotu. Niech będzie OY oś pozioma zawieszenia wahadła składanego, OZ oś pionowa skierowana w stronę ciężkości, OX oś prostopadła do dwóch pierwszych; G środek ciężkości wahadła i $GA=a$ odległość tego środka od osi OY, θ kąt jaki czyni płasczyzna GOY, przechodząca przez środek ciężkości G i przez oś zawieszenia OY,

z płaszczyzną pionową ZY. Będziemy uważali ruch oscyllacyjny



wahadła składanego jako dodatny albo odjemny, według jak kąt θ będzie się zwiększał albo zmniejszał; będzie więc w tem założeniu $\omega = -\frac{d\theta}{dt}$ i $\frac{d\omega}{dt} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}$.

To ustaliwszy, ponieważ jedyną siłą poruszającą wahadła jest ciężkość, która działa na każdą jego cząstkę materyalną m, widzimy zaraz że summa momentów sił poruszających, względem osi OY, jest

$$g\sum mx = Mgx_1 = Mga \operatorname{wst}\theta.$$

Wiemy nadto że summa momentów sił bezwładności względem osi obrotu przywodzi się do summy momentów ich składowych styczennych, która się wyraża przez

$$-\sum mr^2 \frac{d\omega}{dt} = -\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = \frac{d^2\theta}{dt^2}\sum mr^2.$$

Więc równając do zera summę momentów wszystkich sił poruszających i sił bezwładności, mamy

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\sum mr^2 + Mga \operatorname{wst}\theta = 0.$$

Takie jest równanie różniczkowe ruchu wahadła składanego.

To równanie może się uprościć. Nazwijmy k promień wirowy wahadła składanego około osi OZ, będzie

$$\sum mr^2 = M(a^2 + k^2);$$

jeśli podstawimy tę wartość, znalezione równanie weźmie kształt prosty

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ga}{a^2+k^2} \text{ wst}\theta = 0.$$

Przypuśćmy teraz że ciało bryłowe w ruchu staje się punktem materyalnym ciężkim, który jest związany z osią obrotu za pośrednictwem linii prostej mającej długość l. Ruch tego wahadła pojedynczego jest dany przez równanie różniczkowe

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{ wst}\theta = 0.$$

Porównywając dwa ostatnie równania, widzimy że drugie wywodzi się z pierwszego; dość tylko uczynić $k = 0$ i zamienić a na l. Więc, jeśli wyznaczymy długość l przez warunek

$$\frac{ga}{a^2+k^2} = \frac{g}{l}, \quad \text{zkąd} \quad l = a + \frac{k^2}{a},$$

wahadło składane i wahadło pojedyncze będą miały zupełnie ten sam ruch, byle tylko wartości początkowe kąta θ i prędkości kątowej $\frac{d\theta}{dt}$ były te same dla obydwóch. To dowodzi że ustawy ruchu wahadła składanego są te same co wahadła pojedynczego. Z przyczyny tosamości ruchu, wahadło pojedyncze, mające jednocześnie z wahadłem składanem ten sam ruch, nazwiemy wahadłem *spólnoczesnem*.

218. Oś oscyllacyi. Z tego co poprzedza wynika ważne następstwo. Jeśli na płaszczyznie GOY, przechodzącej przez środek

ciężkości wahadła składanego i przez jego oś zawieszenia, poprowadźmy prostę IBI′ równoległą do tej osi na odległość l, wszystkie punkta ciała leżące na prostej IBI′ będą oscyllowały jako wahadła pojedyncze; bo wszystkie są w tej samej odległości l od osi OY, i mogą być uważane jak gdyby, nie należąc do ciała, były punktami ciężkiemi, związanemi z osią przez linie proste długości l niemające żadnej massy. To więc dowodzi istnienia wahadeł pojedynczych spólnoczesnych. Inne punkta ciała, mniej albo więcej odległe od osi OY, oscyllują pierwsze wolniej drugie prędzej niż gdyby były oddzielne i niezależne. Dla tej przyczyny prosta IBI′ została nazwana *osią oscyllacyi* wahadła, odpowiedającą osi zawieszenia OY; a w szczególności nazwano *środkiem oscyllacyi* punkt B osi oscyllacyi, w którym ją spotyka prostopadła AG do osi zawieszenia przechodząca przez środek ciężkości. Otrzymuje się punkt B przedłużając prostę AG ilością $GB = \frac{k^2}{a}$; co pokazuje że środek ciężkości jest bliższy osi zawieszenia niż środek oscyllacyi.

Długość k wyraża promień wirowy wahadła, około osi poprowadzonej przez środek ciężkości G równolegle do osi zawieszenia; jeśli więc nazwiemy a' długość GB, będziemy mieli związek

$$aa' = k^2,$$

który dowodzi że odległości a i a', osi zawieszenia i osi oscyllacyi tego wahadła od jego środka ciężkości, są odwrotne jedna drugiej; to jest, im środek ciężkości wahadła będzie bliżej danej osi zawieszenia, tem dalej od niego będzie oś oscyllacyi, i nawzajem. Istnieje więc przypadek w którym odległości a i a' są równe. To się zdarza gdy summa $a + a'$, wyrażająca długość wahadła pojedynczego, odpowiedającego danej osi zawieszenia, jest minimum. Jakoż, wieloczyn $aa' = k^2$ jest stateczny;

więc summa $a + a'$ nabywa wartości minimum gdy $a' = a$. Wtedy długość wahadła pojedynczego spólnoczesnego równa się $2a = 2k$.

219. Twierdzenie. *Osie zawieszenia i oscyllacyi są wzajemne.*

To znaczy : jeśli wzięto oś oscyllacyi wahadła składanego za oś zawieszenia, wtenczas oś pierwotna zawieszenia staje się osią oscyllacyi. Jakoż, w tym przypadku długość wahadła pojedynczego spólnoczesnego wyraża się przez

$$a' + \frac{k^2}{a'};$$

jeśli więc zamiast a' położymy jego wartość $\frac{k^2}{a}$, będzie

$$a' + \frac{k^2}{a'} = \frac{k^2}{a} + a;$$

co dowodzi twierdzenia.

Nawzajem, *jeśli wahadło zawieszone kolejno na dwóch osiach równoległych, leżących na jednej płaszczyznie z jego środkiem ciężkości, daje małe oscyllacye których czas jest ten sam, wtedy odległość tych osi równa się długości wahadła pojedynczego spólnoczesnego.*

Nazwijmy a i a' odległości dwóch osi zawieszenia od środka ciężkości wahadła. Ponieważ czas małych oscyllacyj jest ten sam, długości wahadeł pojedynczych spólnoczesnych są równe; mamy więc

$$a' + \frac{k^2}{a'} = a + \frac{k^2}{a},$$

zkąd

$$(a' - a)\left(1 - \frac{k^2}{aa'}\right) = 0,$$

Temu równaniu staje się zadość jeśli weźmiemy $1 - \frac{k^2}{aa'} = 0$,

co daje $a' = \frac{k^2}{a}$; więc

$$a + a' = a + \frac{k^2}{a}.$$

Wartość $a' = a$ jest szczególnym przypadkiem położenia dwóch osi zawieszenia, któremu odpowieda długość minimum $2a = 2k$ wahadła pojedynczego spólnoczesnego. Zresztą ten przypadek nie ma nic osobliwego, i mieści się w poprzedzającym ogólnym.

220. Istnieje nieskończona liczba osi równoległych między sobą, około których trwanie małych oscyllacyj jest to samo. Jakoż, formuła

$$l = a + \frac{k^2}{a}$$

pokazuje że długość wahadła pojedynczego spólnoczesnego zostaje ta sama dla wszystkich osi zawieszenia i osi oscyllacyi, które są liniami tworzącemi dwóch walców obrotowych, mających za spólną oś figury prostę poprowadzoną przez środek ciężkości wahadła równolegle do danego kierunku, a za promienie linie a i $\frac{k^2}{a}$.

Ta kwestya może się przedstawić ogólniej. Niech będą A, B, C trzy momenta główne bezwładności wahadła względne do środka ciężkości G, i α, β, γ kąty jakie prosta, przechodząca przez ten punkt i równoległa do osi zawieszenia, czyni z jego osiami głównemi. Moment bezwładności wahadła, względem tej prostej, wyraża się przez

$$Mk^2 = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma;$$

zatem długość wahadła pojedynczego spólnoczesnego jest

$$l = a + \frac{k^2}{a} = a + \frac{A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma}{Ma};$$

Widzimy teraz łatwo że długość l może zostawać stateczna, choćby nawet zmieniano ilość a i dwa z trzech kątów α, β, γ. Istnieje więc nieskończona liczba osi zawieszeń około których trwanie małych oscyllacyj będzie zawsze to samo.

Między temi osiami znajduje się jedna dla której długość wahadła pojedynczego spólnoczesnego jest najmniejsza możebna. Aby ją znaleźć, przypuśćmy że A jest najmniejszym momentem bezwładności a C największym. W tem założeniu najmniejsza wartość momentu bezwładności $A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma$ jest A, ilość odpowiedająca kątom $\alpha = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$. Co już pokazuje że szukana oś zawieszenia powinna być równoległa do osi najmniejszego momentu bezwładności ciała, względnie do jego środka ciężkości.

Mamy więc

$$l = a + \frac{A}{Ma}.$$

Owoż, gdy się a zmienia wieloczyn $a.\frac{A}{Ma} = \frac{A}{M}$ zostaje stateczny; więc summa $a + \frac{A}{Ma}$ bierze wartość najmniejszą możebną gdy $a = \frac{A}{Ma}$, to jest jeśli $a = \sqrt{\frac{A}{M}}$. Co daje

$$l = 2\sqrt{\frac{A}{M}}.$$

Wynik zgodny z tym któryśmy znalezli w numerze 218.

Z tego wszystkiego wnosimy że, między osiami równo oddalonemi od środka ciężkości, ta, której odpowieda długość wahadła pojedynczego spólnoczesnego najmniejsza albo największa możebna, jest równoległa do największej albo do najmniejszej osi ellipsoidy środkowej.

221. Wyznaczenie praktyczne momentu bezwładności. Chcąc znaleźć moment bezwładności ciała bryłowego, względem danej osi, trzeba najpierwej wyrachować jego ciężar P, i wyznaczyć odległość a środka ciężkości od osi. Poczem, zawiesiwszy ciało na tej osi, ustawionej poziomo, daje się mu ruch oscyllacyjny oddalając je bardzo mało od położenia równowagi; rachuje się liczbę n oscyllacyj wykonanych przez τ sekund, i tym sposobem otrzymuje się czas $\frac{\tau}{n}$ jednej oscyllacyi. To mając, znajduje się zaraz moment bezwładności $\sum mr^2$ względem uważanej osi. W samej rzeczy, czas małych oscyllacyj wahadła pojedynczego spólnoczesnego z wahadłem składanem, wyraża się przez

$$\frac{\tau}{n} = \pi\sqrt{\frac{a^2+k^2}{ga}};$$

a ponieważ

$$\sum mr^2 = \mathrm{M}(a^2+k^2),$$

więc

$$\frac{\tau}{n} = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{\mathrm{M}ga}}.$$

Ztąd, zważając że $\mathrm{M}g = \mathrm{P}$, otrzymujemy

$$\sum mr^2 = \frac{\mathrm{P}a\tau^2}{n^2\pi^2}.$$

222. Oto jakiem doświadczeniem można wyznaczyć natężenie g ciężkości. Bierze się cienką sztabkę miedzianą, dobrze ulaną i ukutą; przytwierdza się do niej dwa noże stalowe A i A′, prostopadłe do jej długości na płaszczyznie zawierającej środek ciężkości G, i mierzy się odległości $GA = a$, $GA' = a'$. To ustaliwszy, jeśli dano ruch oscyllacyjny temu wahadłu, kolejno około każdej z dwóch osi zawieszenia A i A′, nazywając T i T′ czas odpowiedających oscyllacyj, otrzyma się dwa równania

$$T = \pi\sqrt{\frac{a^2+k^2}{ga}} \quad \text{i} \quad T' = \pi\sqrt{\frac{a'^2+k^2}{ga'}};$$

zkąd, rugując k^2, wynika

$$g = \pi^2\frac{a^2 - a'^2}{aT^2 - a'T'^2}.$$

Formuła przypuszcza że a' jest różne od a. Tego warunku łatwo się dopełnia, osadzając noże A i A′ w nierównych odległościach od środka ciężkości G. W przypadku szczególnym w którym $T = T'$, otrzymuje się

$$g = \pi^2\frac{a+a'}{T^2}, \quad \text{albo} \quad T = \pi\sqrt{\frac{a+a'}{g}}.$$

Co być powinno, dlatego że wtedy jeden z nożów A i A′ jest osią zawieszenia a drugi osią oscyllacyi.

223. Wyłożona teorya wahadła składanego jest ściśle prawdziwa ale tylko w próżni. Rzeczy mają się inaczej gdy wahadło porusza się w powietrzu albo w innym płynie.

Wpływ powietrza na wahadło ma dwojaki skutek.

1 Na mocy zasady *Archimedesa*, ciało bryłowe zanurzone w jakimkolwiek płynie traci ze swojego ciężaru tyle ile waży

płyn przez nie wypchnięty; albowiem płyn wywiera na ciało pchanie które je podnosi. Jeśli więc nazwiemy M' massę płynu przemieszczonego przez ciało, moment sił ciężkości działających na wszystkie cząstki będzie już tylko

$$(\mathrm{M} - \mathrm{M}')ga \operatorname{wst} \theta.$$

Zatem długość l wahadła pojedynczego spółnoczesnego przedstawi się przez

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{(\mathrm{M}-\mathrm{M}')a} = \left(a + \frac{k^2}{a}\right)\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{M}-\mathrm{M}'} = \left(a + \frac{k^2}{a}\right)\frac{1}{1-\rho};$$

gdzie ρ znaczy stosunek gęstości powietrza do gęstości wahadła.

Tym sposobem trwanie małych oscyllacyj wahadła w powietrzu jest powiększone. Ale poprawka nie jest dokładna teorycznie; bo zasada *Archimedesa* tylko wtedy jest prawdziwa kiedy ciało bryłowe zanurzone w płynie zostaje z nim w spoczynku. Wahadło poruszające się w powietrzu traci więcej ze swojego ciężaru niż gdyby było w równowadze. *Poisson* rachunkiem a *Bessel* doświadczeniem okazali że do wahadła w ruchu przyczepia się warstwa powietrza która razem z niem oscylluje, i przywodzi jego ciężar do $mg\left(1 - \frac{3}{2}\rho\right)$. Wartość przybliżona, potrzebująca nowego potwierdzenia.

2° Powietrze wpływa jeszcze na wahadło przeciwstawiąc jego ruchowi opór, rosnący z prędkością, który wyrażają zwykle przez μv^2. Doświadczenie dowodzi że powietrze, opóźniając pół-oscyllacyę zestępującą a skrócając pół-oscyllacyę wnoszącą się, prawie nie wpływa na czas całej oscyllacyi, i tylko zmniejsza jej obszerność. Co pozwoliło sprawdzić ustawę równoczesności małych oscyllacyj wahadła pojedynczego.

224. Parcie wahadła na oś. Jeśli wahadło składane jest sy-

metryczne względem płasczyzny przechodzącej przez środek ciężkości G i prostopadłej do osi zawieszenia, co zwykle ma miejsce, jego parcie na oś, znajdujące się na tej płasczyznie, łatwo się wyznaczyć daje. Jakoż, zamieniając w równaniach numeru 210 y_1, Y_1+Y_2 na z_1, Z_1+Z_2, widzimy zaraz że to parcie, równe i wprost przeciwne wynikowej sił X_1+X_2 i Z_1+Z_2, w chwili gdy wahadło zestępuje z położenia θ_0 na położenie θ, jest wynikową ciężaru Mg, siły odśrodkowej $\omega^2 Ma$ w kierunku AG, i siły bezwładności styczennej $-\frac{d\omega}{dt}Ma$ prostopadłej do AG. Dwie ostatnie składowe mogą się wyrazić w funkcyi kąta θ i długości l wahadła pojedynczego spólnoczesnego. Albowiem równanie ruchu wahadła daje

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{Mga \operatorname{wst}\theta}{\Sigma mr^2}=-\frac{g \operatorname{wst}\theta}{l};$$

a całkując to równanie, albo biorąc wprost równanie sił żywych, mamy

$$\omega^2=\frac{2Mga(\operatorname{dos}\theta-\operatorname{dos}\theta_0)}{\Sigma mr^2}=\frac{2g}{l}(\operatorname{dos}\theta-\operatorname{dos}\theta_0).$$

Więc, podstawiając te wartości, i uważając że ciężar $Mg=P$ rozkłada się na $P\operatorname{dos}\theta$ i $P\operatorname{wst}\theta$, otrzymujemy ostatecznie dwie siły prostokątne,

jedną $\quad Pa\left\{\frac{2a}{l}(\operatorname{dos}\theta-\operatorname{dos}\theta_0)+\operatorname{dos}\theta\right\}\quad$ wedle AG,

drugą $\quad Pa\left(\frac{a}{l}+1\right)\operatorname{wst}\theta\quad$ prostopadłą do AG,

których wynikowa przedstawia parcie na oś zawieszenia.

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO OKOŁO OSI SPRAWIONY PRZEZ UDERZENIE.

225. Wyłożyliśmy już ogólnie ruch ciała bryłowego około osi stałej, zostającego pod działaniem sił jakichkolwiek; zajmiemy się teraz przypadkiem szczególnym w którym to ciało jest wprowadzone w ruch około osi przez uderzenia, czyli jako mówią, przez siły chwilowe.

Niech będzie P jedna z tych sił chwilowych która, działając na massę μ części ciała, nadaje całemu ciału ruch około osi stałej OZ. Owoż, wiemy że siła chwilowa, przyłożona do punktu ruchomego, ma za miarę ilość ruchu jakąby mu udzielała gdyby był wolny i w spoczynku; jeśli więc nazwiemy v prędkość jaką siła chwilowa P, przyłożona do środka ciężkości massy μ, mogłaby nadać wszystkim jej cząstkom gdyby ta massa była wolna, μv będzie odpowiedającą ilością ruchu massy μ i wyrazi natężenie siły P. A jeśli jeszcze nazwiemy ω prędkość kątową ciała w ruchu około osi OZ, prędkości linijne jego cząstek m, m', m''... wyrażą się w tym ruchu przez $mr\omega$, $m'r'\omega$, $m''r''\omega$,... To mając, zważajmy że, na mocy zasady d'*Alemberta* zastosowanej do sił chwilowych, powinna być równowaga, około osi obrotu, między ilościami ruchu sprawionemi przez siły chwilowe, i ilościami ruchu pochodzącemi z oddziaływań cząstek m, m', m''...; co wymaga żeby summa momentów tych ilości ruchu uważanych jako siły, względem osi OZ, było zero. Więc, oznaczając przez q najkrótszą odległość kierunku siły uderzenia P od osi OZ a przez γ kąt tych dwóch kierunków, i biorąc summę momentów wszystkich ilości ruchu względem osi OZ, znajdujemy równanie ruchu ciała około tej osi

$$\mu v q \operatorname{wst} \gamma - \sum mr^2\omega = 0;$$

zkąd

(1) $$\omega = \frac{\mu v q \operatorname{wst}\gamma}{\Sigma mr^2}.$$

Ta formuła wyznacza prędkość kątową ω, pokazuje że jej wartość jest największa możebna gdy uderzenie, nadające ruch ciału, zostało wykonane w kierunku prostopadłym do płaszczyzny poprowadzonej przez oś obrotu. Wtedy $\gamma=\frac{\pi}{2}$, i formuła (1) staje się

$$(2) \qquad \omega=\frac{\mu vq}{\Sigma mr^2}.$$

Jeśli różne części $\mu, \mu', \mu''...$ ciała ruchomego około osi stałej, odebrały jednoczesne uderzenia, rozumując jako wyżej pojmuje się łatwo że prędkość kątowa ω będzie

$$\omega=\frac{\Sigma\mu vq \operatorname{wst}\gamma}{\Sigma mr^2}.$$

Równania (1) i (2) stosują się oczywiście do ciała bryłowego niezmiennego, ruchomego około osi stałej, które zostało w ruch wprowadzone uderzeniem drugiego ciała mającego massę μ, jeśli to drugie ciało, ożywione ruchem przeniesienia, uderzywszy pierwsze z niem się łączy i razem porusza; wtedy $\sum mr^2$ przedstawia moment bezwładności całego układu bryłowego dwóch ciał skupionych. Będziemy tego mieli przykład w wahadle balistycznem.

226. Uderzenie wytrzymane przez oś stałą. Przypuśćmy że ciało bryłowe, ruchome około osi stałej OZ, zostało w ruch wprowadzone przez drugie ciało mające massę μ, które uderzyło pierwsze i z niem złączone porusza się razem; albo co to samo, że siła uderzenia P, udzielając części μ ciała prędkość v, nadała ruch całemu ciału. Siła P, jest przyłożona do środka ciężkości massy μ i ma za miarę ilość ruchu μv. Nazwijmy ξ, η, ζ spółrzędne punktu przyłożenia siły P odniesione do trzech osi prostokątnych OX, OY, OZ; i niech będą X, Y, Z

składowe ilości ruchu μv uważanej jako siła, a zaś $-m\frac{dx}{dt}$, $-m\frac{dy}{dt}$, $-m\frac{dz}{dt}$ składowe ilości ruchu pochodzącej z oddziaływania cząstki m ciała. Jeśli zastąpimy oś obrotu przez jej dwa punkta O i H, przykładając do nich siły P_1, P_2, równe i przeciwne uderzeniom jakich doznają, ciało obracające się około osi OZ będzie mogło być uważane jako wolne w przestrzeni, i wyznaczenie uderzeń $-P_1$, $-P_2$, jakie oś wytrzymuje, przyprowadzi się do kwestyi już ogólnie wiadomej. Jakoż, na mocy zasady d'*Alemberta*, w ruchu ciała bryłowego niezmiennego jest równowaga między siłami zewnętrznemi, siłami bezwładności i parciami, a w obecnym przypadku siły przedstawiają się przez ilości ruchu; wyrażamy więc równowagę między ilościami ruchu, uważanemi jako siły, pisząc sześć następujących równań

$$X-\sum m\frac{dx}{dt}+X_1+X_2=0,$$

$$Y-\sum m\frac{dy}{dt}+Y_1+Y_2=0,$$

$$Z-\sum m\frac{dz}{dt}+Z_1+Z_2=0,$$

(3)

$$Z\eta-Y\zeta-\sum m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)-Y_2h=0$$

$$X\zeta-Z\xi-\sum m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)+X_2h=0$$

$$Y\xi-X\eta-\sum m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=0.$$

Można uprościć te równania wprowadzając prędkość ką-

tową ω. Jakoż, uczyńmy jako zwykle

$$x = r\,\mathrm{dos}\theta, \qquad y = r\,\mathrm{wst}\theta,$$

będzie

$$\frac{dx}{dt} = -y\omega, \qquad \frac{dy}{dt} = x\omega.$$

Zkąd

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\omega,$$

i następnie

$$\sum m\frac{dx}{dt} = -\sum my\omega = -\omega M y_1$$

$$\sum m\frac{dy}{dt} = +\sum mx\omega = +\omega M x_1.$$

Do tego, ponieważ każdy punkt materyalny m opisuje okrąg równoległy do płasczyzny xy, jego rzędna z jest stateczna; co daje $\frac{dz}{dt} = 0$. Przez podstawienie tych wartości, powyższe równania stają się

$$\begin{gathered}
X + \omega M y_1 + X_1 + X_2 = 0 \\
Y - \omega M x_1 + Y_1 + Y_2 = 0 \\
Z + Z_1 + Z_2 = 0, \\
Z\eta - Y\zeta + \omega\sum mxz - Y_2 h = 0 \\
X\zeta - Z\xi - \omega\sum myz + X_2 h = 0, \\
Y\xi - X\eta - \omega\sum mr^2 = 0.
\end{gathered} \tag{4}$$

Ostatnie równanie nie zawiera składowych oddziaływania punktów O i H; jest przeto równaniem ruchu ciała około osi OZ, i wyznacza jego prędkość kątową ω przez formułę

$$\omega = \frac{Y\xi - X\eta}{\Sigma mr^2}.$$

Ta formuła jest w gruncie ta sama co (2); bo liczniki, tylko kształtem różne, wyrażają ten sam moment ilości ruchu μv względem osi OZ.

Dwa przedostatnie równania dają składowe X_2 i Y_2 uderzenia jakiego oś doznaje w punkcie H prostopadle do swojego kierunku. Podstawiając te wartości w dwóch pierwszych równaniach, otrzymuje się składowe uderzenia jakie oś wytrzymuje w punkcie O, także prostopadle do swojego kierunku. Nakoniec, trzecie równanie daje summę $Z_1 + Z_2$ która wyraża uderzenie jakiemu oś ulega wzdłuż swojego kierunku.

227. Szukajmy teraz pod jakiemi warunkami oś obrotu nie dozna żadnego uderzenia, to jest nie będzie wstrząśnięta. Chcemy żeby nie było parcia; trzeba więc, i oczywiście dość jest, żeby składowe oddziaływań punktów O i H były każda osobno zero. Wprowadzając te założenia do równań (4), otrzymujemy

$$(5)\qquad \begin{aligned} X + \omega M y_1 &= 0, \\ Y - \omega M x_1 &= 0, \\ Z &= 0 \\ -Y\zeta + \omega \sum mxz &= 0, \\ X\zeta - \omega \sum myz &= 0, \\ Y\xi - X\eta - \omega \sum mr^2 &= 0. \end{aligned}$$

Równanie $Z = 0$ pokazuje że siła uderzenia, przyłożona do środka ciężkości massy μ, powinna być na płasczyznie prostopadłej do osi. Jeśli więc weźmiemy tę płasczyznę za płasczyznę xy, będzie $\zeta = 0$, i dwa przedostatnie równania (5) staną się

$$\sum mxz = 0, \qquad \sum myz = 0.$$

Te równania dowodzą że oś obrotu powinna być osią główną bezwładności w nowym początku spółrzędnych, to jest w punkcie w którym ją spotyka płasczyzna prostopadła, zawierająca środek ciężkości massy uderzonej μ.

Aby wiedzieć co wyrażają dwa pierwsze równania (5), przypuśćmy że, za płasczyznę xz, wzięto płasczyznę przechodzącą przez środek ciężkości ciała w chwili uderzenia; wtedy $y_1 = 0$ i $x_1 = a$; co przywodzi te równania do kształtu

$$X = 0, \qquad Y = \omega M a.$$

Pierwsze równanie pokazuje że siła uderzenia, która jako już wiemy leży na płasczyznie xy, jest prostopadła do płasczyzny xz, to jest do płasczyzny przechodzącej przez oś obrotu i środek ciężkości ciała. Możemy nawet znaleźć punkt w którym rzeczona siła spotyka tę płasczyznę; albowiem szukany punkt jest na osi OX i dość tylko wyznaczyć jego odciętę. W tym celu, ponieśmy wartości X i Y do ostatniego równania (5), otrzymamy zaraz

$$\xi = \frac{\Sigma mr^2}{Ma}.$$

A jeśli jeszcze nazwiemy k promień wirowy ciała względem osi przechodzącej przez jego środek ciężkości i równoległej do osi OZ, będziemy mieli

$$\xi = \frac{a^2 + k^2}{a} = a + \frac{k^2}{a}.$$

Ta wartość wyraża długość wahadła pojedynczego spółnoczesnego z ciałem oscyllującem około osi OZ, gdyby ta oś była pozioma; co dowodzi że siła uderzenia powinna spotykać oś oscyllacyi odpowiedającą osi obrotu.

Więc, aby oś obrotu nie doznawała żadnego wstrząśnienia, trzeba i dość jest :

1° Żeby ta oś była osią główną bezwładności ciała w punkcie w którym ją spotyka płasczyzna prostopadła zawierająca środek ciężkości massy uderzonej μ.

2° Żeby siła uderzenia była prostopadła do płasczyzny wyznaczonej przez oś obrotu i środek ciężkości ciała,

3° Żeby jeszcze ta siła spotykała odpowiedającą oś oscyllacyi, w punkcie jej przecięcia z płasczyzną prostopadłą która przechodzi przez środek ciężkości massy uderzonej μ.

Środek uderzenia. Nazywa się środkiem uderzenia ciała, względnym do osi obrotu, punkt w którym siła uderzenia nie wstrząsająca tej osi spotyka odpowiedającą oś oscyllacyi. Przez ten punkt przechodzi właśnie wynikowa sił bezwładności; czego dowodem tosamość wartości ξ i ζ z otrzymanemi w numerze 211. To być powinno; albowiem oś obrotu wtenczas tylko nie doznaje żadnego parcia, kiedy siły bezwładności mają wynikowę jedyną której siła poruszająca jest równa i wprost przeciwna.

Osie główne bezwładności, poprowadzone przez środek ciężkości ciała, nie mają środka uderzenia; bo $a=0$, daje $\xi=\infty$.

W mechanice zastosowanej środek uderzenia gra przeważną rolę. Jakoż, w machinach części ruchome około osi są wystawione na gwałtowne uderzenia. Trzeba się więc starać żeby ta oś była osią główną bezwładności, i żeby możebne wstrząśnienia były skierowane na środek uderzenia, prostopadle do płasczyzny osi obrotu i osi oscyllacyi. Tym sposobem zmniejsza się szkodliwe skutki uderzeń które często łamią oś, a zawsze nadwerężają machinę.

Na mocy równań (4) składowe X_2, Y_2 oddziaływania puktu H są zero, gdy istnieją zarazem równania

$$\sum mxz = 0, \qquad \sum myz = 0, \qquad Z = 0, \qquad \zeta = 0,$$

to jest, gdy oś OZ jest osią główną bezwładności w punkcie O, i siła uderzenia leży na płaszczyznie xy. W tym przypadku punkt O doznaje uderzenia; ale, jeśli jest stale utrzymany, ciało w ruch wprowadzone przez siłę uderzenia która zadość czyni wyłuszczonym warunkom, będzie się ciągle obracało około tej samej osi z prędkością kątową stateczną. Wtedy oś obrotu jest osią ustawiczną wirowania.

Jeśli oś obrotu przechodzi przez środek ciężkości, nie można bez jej wstrząśnienia nadać ruchu wirowego ciału jedną siłą uderzenia, ale tylko dwojanem. Jakoż, siła uderzenia wyraża się przez $Ma\omega$, a środek uderzenia jest dany przez $\xi = a + \frac{k^2}{a}$; jeśli więc $a = 0$, będzie

$$Ma\omega = 0, \qquad \xi = \infty.$$

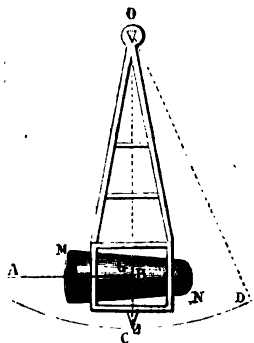
Co dowodzi że żadna jedyna siła uderzenia nie jest zdolna nadać ruchu wirowego ciału około środka ciężkości, nie udzielając mu zarazem ruchu przeniesienia. Ten wynik łatwo się tłumaczy. Środek ciężkości zaczyna się poruszać jak gdyby siła uderzenia była do niego przyłożona; więc jeśli go ustalimy to oczywiście dozna parcia. W tym przypadku, byle oś obrotu była osią bezwładności, ciało uderzone przez dwojan sił chwilowych leżący na płaszczyznie prostopadłej do tej osi, weźmie ruch wirowy bez żadnego wstrząśnienia osi, i będzie się ciągle obracało około niej jak gdyby była niezmienna; co wydatnie pokazują równania (5). Wtedy oś obrotu jest osią naturalną wirowania.

Ztąd wynika że, jeśli ciało już jest w ruchu około osi stałej, można je raptem zatrzymać bez wstrząśnienia osi, przykładając do środka uderzenia siłę chwilową prostopadłą do płasczyzny przechodzącej przez oś i środek ciężkości tego ciała.

WAHADŁO BALISTYCZNE.

228. Do mierzenia prędkości początkowej pocisków używa się wahadła składanego zwanego *wahadłem balistycznem*. To wahadło jest utworzone z naczynia mającego kształt pnia stożkowego, zawieszonego poziomo w ramach żelaznych które oscyllują około osi poziomej. Pień stożkowy, zamknięty przy podstawie mniejszej, zwykle krymką sferyczną, jest napełniony suchym piaskiem ubłoczonym, żeby mógł umarzać prędkość kuli działowej, w niego wchodzącej przez podstawę większą, bez uszkodzenia wahadła. Kula uderza w piasek, zapuszcza się w niego do pewnej głębokości i oddaje całą swoją prędkość linijną wahadłu; tak że na końcu uderzenia, w czasie niezmiernie krótkim, kula i wahadło stanowią jedno ciało ożywione prędkością kątową około osi zawieszenia, Wahadło, najpierwej w spoczynku, uderzone kulą która z niem zostaje, oddala się od położenia pionowego równowagi na mocy odebranej prędkości, i środek ciężkości całego układu wznosi się aż dopóki praca odjemna ciężkości nie zniszczy nabytej siły żywej. W tej chwili wahadło doszło do najwyższego położenia i dosięgnęło skrajności oscyllacyi; jego ruch ciągnie się dalej, ale już w stronę przeciwną. U dołu wahadła sterczy sztyft który, wznosząc się z wahadłem, popycha wskazówkę osadzoną na łuku koła, i opuszcza ją gdy wahadło zaczyna się zniżać. Pozostała wskazówka oznacza kąt zboczenia wahadła który posłuży do wyrachowania prędkości kątowej początkowej wahadła, a następnie do wyznaczenia prędkości linijnej jaką miała kula na początku uderzenia. Oto jakim sposobem.

Niech będzie MN naczynie wahadła balistycznego, O rzut osi



zawieszenia, G środek ciężkości, AB krążna pozioma kuli działowej która uderza wahadło wpadając w piasek jego naczynia, C wskazówka ślizgająca na łuku CD.

Nazwijmy teraz : p ciężar kuli, v jej prędkość, l odległość środka uderzenia B od osi zawieszenia O; P ciężar wahadła balistycznego, a odległość jego środka ciężkości G od osi O; P′ ciężar układu wahadła z kulą, a' odległość jego środka ciężkości od osi O, i $\sum mr^2$ moment bezwładności całego układu; nakoniec ω_0 prędkość kątową po uderzeniu.

Na mocy formuły (2) numeru 225, mamy

$$\omega_0 \sum mr^2 = \frac{p}{g} vl.$$

Oznaczmy przez ω prędkość kątową wahadła z kulą gdy opisało kąt θ; wedle zasady sił żywych będzie

$$(\omega^2 - \omega_0^2) \sum mr^2 = -2P'a' \int_0^\theta \text{wst}\,\theta d\theta = -4P'a' \text{wst}^2 \frac{1}{2}\theta.$$

Owoż, gdy wahadło dosięga skrajności oscyllacyi, prędkość kątowa ω staje się zero; więc znajdziemy kąt maximum θ_1, wyrażający pół obszerności oscyllacyi, czyniąc $\omega = 0$ i $\theta = \theta_1$ w ostatniem równaniu które da

$$\omega_0^2 \sum mr^2 = 4P'a' \operatorname{wst} \frac{1}{2}\theta_1.$$

Poczem, jeśli między tem równaniem i pierwszem wyrugujemy ω_0, otrzymamy

$$\sum mr^2 = \frac{p^2 v^2 l^2}{4g^2 P'a' \operatorname{wst}^2 \frac{1}{2}\theta_1};$$

zkąd

$$(1) \qquad v = \frac{2g}{lp} \sqrt{P'a' \Sigma mr^2} \operatorname{wst} \frac{1}{2}\theta_1.$$

Ta formuła może się znacznie uprościć, pozbywając się ilości a' i $\sum mr^2$ których wyznaczenie nie jest łatwe. Uważajmy najpierwej że kula, uderzająca wahadło, powinna koniecznie przechodzić przez środek uderzenia B odpowiedający osi zawieszenia O; bo inaczej ta oś doznawałaby parcia któreby nadwerężało cały przyrząd. Przypuszczając rzeczy jako trzeba, i nazywając K moment bezwładności samego wahadła względem osi O, musi być zawsze

$$l = \frac{Kg}{Pa}.$$

Jeśli tego warunku ściśle dopełniono, środek oscyllacyi układu wahadła i kuli zostaje ten sam co wahadła bez kuli. Aby tego dowieśdź, nazwijmy l' długość wahadła pojedynczego, spółnoczesnego z układem dwóch ciał połączonych; będziemy mieli

$$l' = \frac{g\Sigma mr^2}{P'a'} = \frac{g(K + \frac{p}{g}l^2)}{P'a'} = \frac{Kg + pl^2}{P'a'}.$$

Ale poprzedzające równanie daje

$$Kg = Pla,$$

a jest oczywiście

$$P'a' = Pa + pl;$$

więc podstawiając znajdujemy $l' = l$.

To ustaliwszy, ponieśmy do formuły (1) wyciągniętą z tego co poprzedza wartość

$$P'a'\sum mr'^2 = \frac{P'a'}{g}(Kg + p\,l^2) = \frac{l}{g}(Pa + pl)^2,$$

otrzymamy ostateczną formułę

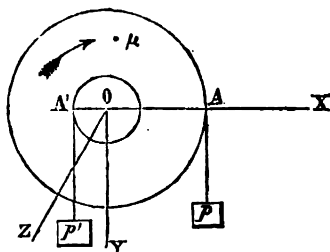
$$(2) \qquad v = \frac{2}{p}(Pa + pl)\sqrt{\frac{g}{l}}\,\text{wst}\,\frac{1}{2}\,\theta,$$

w której tylko wyznaczenie długości l przedstawia niejaką trudność. Ale i tę trudność potrafiono zmniejszyć. Jakoż, jeśli kula przechodzi przez środek B uderzenia wahadła, a rozumie się zawsze, prostopadle do płasczyzny zawierającej środek ciężkości G i oś zawieszenia, przydanie tej kuli w punkcie B nie zmienia czasu oscyllacyj wahadła. Można więc będzie praktycznie znaleźć punkt B w który kula uderzać powinna, umieszczając tę kulę w różnych wysokościach na płasczyznie przechodzącej prostopadle do osi wahadła przez jego środek ciężkości, i sprawiając ruch oscyllacyjny. Szukane położenie kuli jest to w którem jej przydanie nie zmienia czasu małych oscyllacyj. Zresztą, łatwo się zapewnić że kula uderzyła istotnie w punkt B; dość tylko sprawdzić czy czas jednej oscyllacyi jest ten sam po uderzeniu jak przedtem.

Wahadło balistyczne, przyzwoicie zmodyfikowane, może także służyć do mierzenia cofania się dział i strzelb; ale są jeszcze inne sposoby które należą do *Balistyki*.

RUCH KOŁOWROTU.

229. Niech będzie kołowrot obracający się około osi poziomej, mającej rzut O, pod działaniem dwóch ciężarów p, p, przyłożonych za pomocą dwóch sznurów z których pierwszy jest styczny do koła OA w punkcie A a drugi styczny do walca OA′ w punkcie A′.



Oznaczamy przez $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ prędkość kątową kołowrotu, przez μ massę jednej z jego cząstek i przez r promień Oμ, przez m i m' massy ciężarów p i p''; nakoniec czynimy OA $= a$ i OA′ $= a'$. Nie biorąc pod rachunek ani ciężaru sznurów ani tarcia czopów osi, o których później będzie mowa, otrzymuje się natychmiast równanie ruchu kołowrotu, za pomocą ogólnej zasady Mechaniki (122). Przypuszczając że kołowrot obraca się w stronę wskazaną przez strzałę, to równanie jest

$$m\left(g - a\frac{d\omega}{dt}\right)ad\theta - m'\left(g + a'\frac{d\omega}{dt}\right)a'd\theta - \sum \mu r\frac{d\omega}{dt}rd\theta = 0;$$

ztąd

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(ma - m'a')g}{\Sigma\mu r^2 + ma^2 + m'a'^2}.$$

Wyraźmy $\Sigma\mu r^2$, moment bezwładności kołowrotu wzglę-

dem osi obrotu, przez $k^2\Sigma\mu$, i wprowadźmy ciężary zamiast mass, kładąc $g\Sigma\mu = P$; $mg = p$, $m'g = p'$, będziemy mieli

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(pa - p'a')g}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2}.$$

Jeśli zcałkujemy, przypuszczając prędkość początkową zero, otrzymamy

$$\omega = \frac{(pa - p'a')gt}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2}.$$

Ta wartość pokazuje że prędkość kątowa kołowrotu jest proporcyonalna do czasu; więc jego ruch jest jednostajnie przyspieszony.

Gbyby było $pa - p'a' = 0$, prędkość kątowa byłaby zero, i kołowrot zostawałby w spoczynku. Ale, jeśli prędkość początkowa nie jest zero, wtedy z warunkiem $pa - p'a' = 0$ prędkość kątowa jest stateczna, i kołowrot ma ruch jednostajny.

230. Tężności sznurów, na mocy tego cośmy ogólnie powiedzieli w n° 123, przedstawiają się przez siły stracone względne do ciężarów p i p'; więc, nazywając T i T' te tężności mamy

$$T = m\left(g - a\frac{d\omega}{dt}\right), \qquad T' = m'\left(g + a'\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Zkąd, zastępując $\frac{d\omega}{dt}$ przez jego wartość, otrzymujemy

$$T = mg - \frac{mga(pa - p'a')}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2} = p - \frac{pa(pa - p'a')}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2},$$

$$T' = m'g + \frac{m'ga'(pa - p'a')}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2} = p' + \frac{p'a'(pa - p'a')}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2}.$$

Jeśli $pa - p'a' > 0$, kołowrot ma ruch jednostajnie przyspieszony i w stronę wskazaną na figurze; wtedy $T < p$ a $T' > p'$. Co dowodzi że w tym ruchu tężność T sznura, za pośrednictwem którego ciężar p działa jako siła poruszająca, jest mniejsza od tego ciężaru; a przeciwnie tężność T', względna do ciężaru p który stanowi opór, jest większą od tego oporu. Ale, jeśli $pa - p'a' = 0$, kołowrot zostaje w spoczynku, albo ma ruch jednostajny; w obydwóch razach tężności T i T' są równe odpowiedającym ciężarom p i p'. We wszystkich przypadkach, w ruchu albo w równowadze, obie tężności są zawsze stateczne.

Parcie jakiego doznaje oś kołowrotu, równe i przeciwne jej oddziaływaniu, jest wynikową sił zewnętrznych i sił bezwładności. Aby je wyznaczyć, w założeniu że kołowrot jest symetryczny względem swojej osi, bierzemy jego środek ciężkości za początek O spółrzędnych, oś poziomą obrotu za oś OZ, a pionowę idącą w stronę ciężkości za oś OY; i szukamy składowych sił zewnętrznych i sił bezwładności. Siłami zewnętrznemi są: ciężkość działająca na wszystkie cząstki μ kołowrotu, i ciężary p, p'; te siły są pionowe i nie dają składowych X ani Z. Składowemi sił bezwładności kołowrotu są summy

$$-\sum\mu\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -\sum\mu\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -\sum\mu\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Owoż, z przyczyny że początek O spółrzędnych jest środkiem ciężkości kołowrotu, mamy

$$\sum\mu x = x_1\sum\mu = 0, \qquad \sum\mu y = y_1\sum\mu = 0,$$

$$\sum\mu z = z_1\sum\mu = 0;$$

więc $$\sum\mu\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \sum\mu\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \sum m\frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Co dowodzi że wynikowa sił bezwładności kołowrotu jest zero. Ciężary p i p', jako siły styczenne pionowe nie dostarczają sił odśrodkowych; dają tylko składowe styczenne bezwładności, równoległe do osi OY i wyrażone przez $-ma\frac{d\omega}{dt}$, $-m'a'\frac{d\omega}{dt}$. To ustaliwszy, widzimy że, dla wyrachowania parcia na oś obrotu, dość jest wziąć składowę sił straconych równoległą do osi OY, przedstawioną ogólnie przez

$$\sum\left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

i podstawić wartości summ $\sum Y$, $\sum m\frac{d^2y}{dt^2}$. Te wartości są:

$$\sum Y = g\sum\mu + p + p',$$

$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2} = (ma - m'a')\frac{d\omega}{dt} = \frac{(pa - p'a')^2}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2}.$$

Więc parcie jakie oś kołowrotu wytrzymuje jest

$$P + p + p' - \frac{(pa - p'a')^2}{Pk^2 + pa^2 + p'a'^2} = P + T + T'.$$

231. Machina Atwood'a. Wiadomo że machina *Atwooda* składa się z krążka na którym jest nawinięta nić, niosąca zawieszone na skrajnościach dwa ciężary p i $p + p'$. Oś krążka opiera się nie na panwiach ale na dwóch parach okręgów równych; przez co tarcie tak zostaje zmniejszone że niema prawie żadnego błędu z jego zaniechania. Zaniedbując także massę nici, która jest bardzo mała względem dwóch ciężarów, można łatwo wyprowadzić równanie ruchu machiny *Atwooda* z równania ruchu kołowrotu; dość tylko uczynić $a' = a$ i zamienić

p na $p+p'$ a p' na p; co zaraz daje

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{agp'}{Pk^2+(2p+p')a^2}.$$

Ztąd, jeśli oznaczymy przez v prędkość ciężaru $p+p'$, przez s drogę jaką on przebiega w czasie t wychodząc ze spoczynku bez prędkości początkowéj, otrzymamy dwa równania

$$v=\frac{a^2gp't}{Pk^2+(2p+p')a^2}$$

$$s=\frac{1}{2}\,\frac{a^2gp't^2}{Pk^2+(2p+p'a)^2}.$$

które stanowią ustawę spadku ciał ciężkich w próżni. Ale ta teorya machiny *Atwooda* i te ustawy są tylko przybliżone; bo przypuszczają ruch samoisty, a on jest względny. Zobacz *Tom* I, n^ro^ 291.

232. UWAGA OGÓLNA. Zakończymy ten rozdział małym przeglądem metod. Aby znaleźć równanie ruchu ciała bryłowego około osi stałéj, użyliśmy w różnych przypadkach zasady d'*Alemberta*. Można jednak znaleźć te równania innemi sposobami, mniej więcej szczególnemi, ale zawsze takiemi które rugują niewiadome oddziaływania, W obecnej kwestyi, oddziaływaniami niewiadomemi są oddziaływania osi stałej, a sposobami które je rugują są : twierdzenie momentów ilości ruchu względem tej osi, i twierdzenie sił żywych. Każde z dwóch twierdzeń wystarcza do wyznaczenia równania ruchu; bo to równanie jest jedyne, dlatego że układ bryłowy obracający się około osi stałej jest ze *związkami zupełnemi.*

1° Zastosujemy najpierwej ogólne twierdzenie momentów ilości ruchu do ciała bryłowego które się obraca około osi stałej OZ. Twierdzenie tak się wysłowia : *W układzie mate-*

ryalnym, wolnym w przestrzeni, pochodna summy momentów ilości ruchu, względem osi stałej jakiejkolwiek, jest równa summie momentów sił zewnętrznych, względem tej samej osi. To twierdzenie istnieje jeszcze gdy układ materyalny obraca się około osi stałej byle ta linia była wzięta za oś spółrzędnych; bo wtenczas siły zewnętrzne zastępujące dwa punkta stałe osi, to jest siły przedstawiające jej oddziaływania, nie dają żadnego momentu względem niej, a więc nie wchodzą do równania. Wiedząc o tem, szukamy momentów ilości ruchu i momentów sił zewnętrznych względem osi OZ. Otóż: moment ilości ruchu punktu materyalnego m, względem osi OZ, wyraża się przez $mr\omega.r$, zatem summa momentów ilości ruchu wszystkich punktów ciała, w tej samej chwili i około tej samej osi, jest $\omega\sum mr^2$; następnie summa momentów sił zewnętrznych, względem osi OZ, równa się $\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)$. Więc, biorąc pochodnę pierwszej summy i równając ją z drugą summą, znajdujemy równanie różniczkowe ruchu

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = \sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y), \qquad \text{albo} \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\mathrm{N}}{\Sigma mr^2}.$$

2° Zastosujemy teraz zasadę sił żywych do tego samego ruchu. Zasada sił żywych zależy na TWIERDZENIU: *Przyrost siły żywej układu materyalnego w ruchu, przez jakikolwiek przeciąg czasu, nieskończenie mały albo skończony, jest równy podwójnej summie odpowiedających prac, rozwiniętych tak przez siły zewnętrzne jak wewnętrzne.* Owoż, siła żywa ciała obracającego się około osi OZ jest $\omega^2\sum mr^2$, a summa nieskończenie małych prac pochodzących od sił zewnętrznych, w ruchu około tej samej osi OZ, wyraża się przez $\sum(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)d\theta$ (*Tom* I, n^ro 320); nadto, w ciele bryłowem niezmiennem siły wewnętrzne nie istnieją;

będzie więc

$$d.\omega^2 \sum mr^2 = 2\sum (Yx - Xy)d\theta.$$

Zkąd

$$d\omega \sum mr^2 = \sum (Yx - Xy)dt \quad \text{albo} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{N}{\Sigma mr^2}.$$

3° Jakkolwiek te sposoby, i inne użyte w rozdziale, są ogólne i w zastosowaniu dogodne, istnieje przecież metoda jeszcze ogólniejsza. Wiemy albowiem że zasada d'*Alemberta*, zkombinowana z zasadą prędkości przysposobionych *Lagrange'a*, daje najogólniejsze twierdzenie Dynamiki, takiej treści :

Aby układ materyalny jakikolwiek, wolny albo przymuszony, był w równowadze dynamicznej, trzeba i dość jest żeby summa prac przysposobionych, wszystkich sił tak zewnętrznych jak wewnętrznych i sił bezwładności, była zero dla każdego przemieszczenia możebnego.

Jeśli oznaczymy przez X, Y, Z składowe sił zewnętrznych wprost przyłożonych do punktu materyalnego m (sił poruszających), przez $-m\frac{d^2x}{dt^2}$, $-m\frac{d^2y}{dt^2}$, $-m\frac{d^2z}{dt^2}$ składowe jego siły bezwładności, przez I siły wewnętrzne (siły cząstoczkowe), nakoniec przez X_1, Y_1, Z_1 składowe sił zewnętrznych które pochodzą ze związków, twierdzenie wyrazi się przez równanie ogólne

$$\sum \left\{ \left(X + X_1 - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y + Y_1 - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y \right.$$
$$\left. + \left(Z + Z_1 - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z + I\delta r \right\} = 0,$$

w którem przemieszczenia przysposobione δx, δy, δz, $\delta x'$,.....,

niezależne od czasu, powinny być zgodne z ustawą istnienia układu. Owoż, w założeniu że układ jest bryłowy niezmienny, i bierze przemieszczenia zgodne ze swojemi związkami, prace sił wewnętrznych i sił normalnych pochodzących ze związków są zero; więc równanie ogólne staje się

$$\sum\left\{\left(X - m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x + \left(Y - m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y + \left(Z - m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right\} = 0.$$

To równanie, z którego możnaby wywieśdź zasadę prędkości przysposobionych, wyraża *ogólną zasadę Mechaniki.*

Użyliśmy już tej ogólnej zasady do wyznaczenia równania ruchu kołowrotu, zastosujemy ją teraz do wahadła składanego.

W wahadle składanem siłami zewnętrznemi wprost przyłożonemi są siły ciężkości, działające na wszystkie cząstki materyalne; summa prac przysposobionych tych sił, w ruchu wahadła około osi OY, wyraża się przez $\mathrm{M}ag\,\mathrm{wst}\theta.\delta\theta$. Summa prac przysposobionych sił bezwładności przywodzi się do summy prac sił styczennych bezwładności, a ta summa, na mocy ugody znaku prędkości kątowej ω, przedstawia się przez $\sum mr^2\frac{d\omega}{dt}.\delta\theta$. Mamy więc równanie różniczkowe ruchu wahadła

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2.\delta\theta + \mathrm{M}ga\,\mathrm{wst}\theta.\delta\theta = 0,$$

albo

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{ga}{a^2+k^2}\mathrm{wst}\theta = 0.$$

ROZDZIAŁ V.

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO OKOŁO PUNKTU STAŁEGO.

---

233. Niech będzie m punkt materyalny ciała bryłowego które się obraca około punktu stałego O. Oznaczamy przez x, y, z spółrzędne punktu m, odniesione do trzech osi prostokątnych *stałych* OX, OY, OZ przechodzących przez punkt stały O, a przez ξ, η, ζ spółrzędne tego samego punktu m, odniesione do trzech osi prostokątnych *ruchomych* $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, które przechodzą także przez punkt O i niezmiennie związane z ciałem z niem się obracają.

Ponieważ w układzie jest punkt stały, dla znalezienia równania ruchu udajemy się naturalnie do zasady momentów ilości ruchu, aby nie wprowadzać niewiadomych oddziaływań. Stosuje się tę zasadę wyrażając że pochodna summy momentów ilości ruchu, względem każdej z trzech osi prostokątnych OX, OY, OZ, jest równa odpowiedającej summie momentów sił poruszających; jeśli więc nazwiemy L_1, M_1, N_1 summy momentów tych sił względem osi stałych, będziemy mieli

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = L_1,$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) = M_1,$$

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = N_1.$$

Napisane formuły zawierają spółrzędne $x, y, z, x'...$, zmienne z czasem t, wszystkich punktów materyalnych ciała; ale one mogą się wyrazić za pomocą spółrzędnych $\xi, \eta, \zeta, \xi'..$, stałecznych co do czasu t, i dziewięciu dostaw $(a, a', a''), (b, b' b'')$.. które, jako wiadomo, są funkcyami trzech kątów θ, φ, ψ zmiennych z czasem t. To wszystko się uprości, jeśli za zmienne weźmiemy składowe p, q, r wirowania chwilowego.

Uważając pierwsze równanie widzimy zaraz że summa

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$$

przedstawia rzut dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu wszystkich punktów ciała, na osi OX. Owoż, znając składowe v_ξ, v_η, v_ζ prędkości punktu m, równoległe do osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ i dane, w funkcyi p, q, r (*Tom* I, n^{ro} 280), przez równania

$$v_\xi = q\zeta - r\eta,$$

$$v_\eta = r\xi - p\zeta,$$

$$v_\zeta = p\eta - q\xi,$$

mamy temsamem w funkcyi p, q, r rzuty dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, na osiach ruchomych; zkąd możemy łatwo otrzymać rzuty tego dwojanu, na osiach stałych OX, OY, OZ, za pomocą zmiennych p, q, r. Jakoż, rzut dwojanu wynikowego wszystkich ilości ruchu, na osi $O\xi$, przedstawia się przez

$$\sum m(\eta v_\zeta - \zeta v_\eta) = p\sum m(\eta^2 + \zeta^2) - q\sum m\xi\eta - r\sum m\xi\zeta.$$

A jeśli, za osie ruchome, obierzemy trzy osie główne bezwładności ciała względne do punktu stałego O, będzie

$$\sum m\xi\eta = 0, \qquad \sum m\xi\zeta = 0,$$

i szukany rzut wyrazi się przez

$$p\sum m(\eta^2 + \zeta^2) = Ap;$$

nazywając A moment bezwładności ciała względem osi $O\xi$.

Dwa inne rzuty tego dwojanu, na osiach $O\eta$ i $O\zeta$, są oczywiście

$$Bq \quad \text{i} \quad Cr.$$

Mając wiadome składowe Ap, Bq, Cr dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, około osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, rzutujemy te składowe na osi stałej OX, mnożąc je odpowiednio przez dostawy a, b, c; i znajdujemy

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = Aap + Bbq + Ccr.$$

Więc

$$\frac{d}{dt}(Aap + Bbq + Ccr) = L_1.$$

Tak samo

$$\frac{d}{dt}(Aa'p + Bb'q + Cc'r) = M_1,$$

$$\frac{d}{dt}(Aa''p + Bb''q + Cc''r) = N_1.$$

Wykonywając wskazane różniczkowania, otrzymujemy

$$Aa\frac{dp}{dt}+Bb\frac{dq}{dt}+Cc\frac{dr}{dt}+Ap\frac{da}{dt}+Bq\frac{db}{dt}+Cr\frac{dc}{dt}=L_1,$$

$$Aa'\frac{dp}{dt}+Bb'\frac{dq}{dt}+Cc'\frac{dr}{dt}+Ap\frac{da'}{dt}+Bq\frac{db'}{dt}+Cr\frac{dc'}{dt}=M_1,$$

$$Aa''\frac{dp}{dt}+Bb''\frac{dq}{dt}+Cc''\frac{dr}{dt}+Ap\frac{da''}{dt}+Bq\frac{db''}{dt}+Cr\frac{dc''}{dt}=N_1.$$

Oznaczmy teraz przez L, M, N summy momentów sił, względem osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$. Jeśli pomnożymy te równania, pierwsze przez a, drugie przez a', trzecie przez a'' i dodamy; potem, jeśli je pomnożymy tak samo przez b, b', b'' i dodamy; a nakoniec jeśli pomnożymy przez c, c', c'' i jeszcze dodamy; zważając na związki między dostawami $a, a', a'', b, b'...$, i na wartości pdt, qdt, rdt dane w tomie I, nr° 380 ; nareszcie wiedząc że

$$aL_1+a'M_1+a''N_1=L,\quad bL_1+b'M_1+b''N_1=M,\quad cL_1+c'M_1+c''N_1=N,$$

znajdziemy trzy równania różniczkowe ruchu, odniesione do osi ruchomych,

$$A\frac{dp}{dt}-(B-C)qr=L,$$

$$(1)\qquad B\frac{dq}{dt}-(C-A)rp=M,$$

$$C\frac{dr}{dt}-(A-B)pq=N.$$

Te równania, podane przez Eulera, są pierwszego rzędu

względem niewiadomych p, q, r. Jeśli się uda ich całkowanie, będą wiadome w funkcyi czasu t składowe p, q, r prędkości kątowej ω i temsamem ta prędkość, a następnie jej składowe $\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$; zkąd wynikną wartości trzech kątów θ, φ, ψ w funkcyi czasu t, które wyznaczą położenie trójścianu ruchomego $O\xi\eta\zeta$, a z nim położenie ciała w każdej chwili ruchu. Ale ogólne całkowanie równań Eulera nie jest znane, i tylko w rzadkich szczególnych przypadkach uskutecznić się daje. Trzeba więc szukać innym sposobem związków między ilościami p, q, r i θ, φ, ψ. Możnaby je otrzymać analitycznie, biorąc dostawy $a, a', a'', b, \ldots$, dane w funkcyi trygonometrycznej kątów θ, φ, ψ, i podstawiając w wartościach dla pdt, qdt, rdt. Ten ruchunek jest dość mozolny, i daleko prościej dochodzi się do żądanych wyników geometrycznie, przez rzuty.

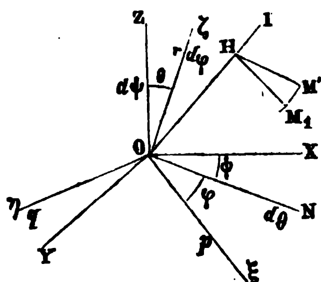
Jakoż, niech będzie M jeden z punktów materyalnych ciała bryłowego w ruchu około punktu stałego O; oznaczamy, *fig. poniżej*, przez x, y, z spółrzędne prostokątne tego punktu względem trzech osi OX, OY, OZ stałych w przestrzeni, a przez ξ, η, ζ jego spółrzędne względem trzech osi prostokątnych ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, niezmiennie z ciałem związanych. Oczywiście zagadnienie ruchu zostaje rozwiązane, jeśli jest wiadome w każdej chwili położenie trójścianu ruchomego $O\xi\eta\zeta$ względem trójścianu stałego OXYZ. To położenie wyznacza się przez trzy kąty ψ, φ, θ. Dla ich określenia, niech będzie ON ślad płaszczyzny ruchomej $\xi\eta$ na płaszczyznie stałej XY.

Kąt $NOX = \psi$ znaczy kąt śladu ON z pół-osią stałą OX, i liczy się dodatnie w stronę w którą się obraca, od lewej ręki do prawej, ślad ON około osi OZ.

Kąt $\xi ON = \varphi$, pół-osi ruchomej $O\xi$ ze śladem ON, liczy się dodatnie w stronę w którąby się obracała oś $O\xi$ od lewej ręki do prawej około osi $O\zeta$.

Nakoniec kąt ζOZ, dwóch pół-osi $O\zeta$ i OZ, jest kątem prosto-

linijnym kąta dwójściennego „ONY płasczyzn $\xi\eta$ i XY, a liczy się dodatnie w stronę w którąby się obracała, od lewej ręki do prawej, płasczyzna $\xi\eta$ około śladu ON.



To ustaliwszy, nietrudno wyrazić p, q, r w funkcyi kątów θ, φ, ψ i prędkości kątowych $\frac{d\theta}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$. Albowiem, wirowanie ωdt ciała około osi chwilowej OI, które jest wynikowem trzech wirowań pdt, qdt, rdt, około odpowiedających osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, może być uważane jako wynikowe trzech innych wirowań $d\psi$, $d\varphi$, $d\theta$ około osi OZ, $O\zeta$ i około śladu ON. Na osi $O\xi$, rzut pdt wirowania wynikowego ωdt jest równy summie rzutów wirowań składowych $d\psi$, $d\varphi$, $d\theta$. Owoż, na tej osi, rzut wirowania $d\psi$ jest $d\psi \operatorname{dos} ZO\xi = a''d\psi$; rzut wirowania $d\varphi$ jest zero, a rzut wirowania $d\theta$ równa się $d\theta \operatorname{dos}\varphi$; zatem będzie

$$pdt = a''d\psi + d\theta \operatorname{dos}\varphi.$$

Z wiadomych formuł Eulera wywodzą się wartości dziewięciu dostaw a, a', a'', b..... w funkcyi kątów ψ, φ, θ; ale można je wprost otrzymać przez trójkąty sferyczne czyli trójściany. I tak, trójścian ONZξ, w którym kąt ZON jest prosty, daje zaraz

$$a'' \text{ czyli } \operatorname{dos} ZO\xi = \operatorname{wst}\varphi \operatorname{dos}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \operatorname{wst}\varphi \operatorname{wst}\theta.$$

Więc

$$pdt = d\psi \,\text{wst}\varphi\, \text{wst}\theta + d\theta\, \text{dos}\varphi.$$

Takim samym sposobem znajduje się dwie inne wartości qdt i rdt. Mamy więc razem trzy równania

$$p = \frac{d\psi}{dt}\text{wst}\varphi\,\text{wst}\theta + \frac{d\theta}{dt}\text{dos}\varphi,$$

(2) $$q = \frac{d\psi}{dt}\text{dos}\varphi\,\text{wst}\theta - \frac{d\theta}{dt}\text{wst}\varphi,$$

$$r = \frac{d\psi}{dt}\text{dos}\theta + \frac{d\varphi}{dt},$$

które wyznaczają kąty ψ, φ, θ, gdy p, q, r są wiadome. Po zcałkowaniu tych równań, zagadnienie ruchu ciała około punktu stałego jest zupełnie rozwiązane.

234. Ogólne całkowanie równań Eulera, jakośmy już powiedzieli, przedstawia trudności których dotąd analiza przezwyciężyć nie mogła. W niektórych tylko przypadkach potrafiono rozwiązać zupełnie zagadnienie ruchu, i to jeszcze wtedy kiedy się udało zastąpić jedno albo dwa z tych równań przez jedną albo dwie całki pierwsze, których zasada momentów ilości ruchu i zasada sił żywych dostarczają. Pokażemy teraz kiedy te dwie zasady mogą pomódz do rozwiązywania zagadnienia.

Zastosowanie zasady sił żywych. Znosząc dt, pomnóżmy pierwsze z równań (1) przez p, drugie przez q, trzecie przez r, i dodajmy pierwsze strony, będzie

$$\text{A}pdp + \text{B}qdq + \text{C}rdr = \frac{1}{2}d.(\text{A}p^2 + \text{B}q^2 + \text{C}r^2 + stat).$$

Summa $\text{A}p^2 + \text{B}q^2 + \text{C}r^2$ oznacza siłę żywą ciała; jakoż, ta

siła żywa wyraża się ogólnie przez

$$\sum m(v_\xi^2+v_\eta^2+v_\zeta^2)=\sum m\left\{(q\zeta-r\eta)^2+(r\xi-p\zeta)^2+(p\eta-q\xi)^2\right\}$$

$$=\sum m\left\{(\eta^2+\zeta^2)p^2+(\xi^2+\zeta^2)q^2+(\xi^2+\eta^2)r^2-2qr\eta\zeta-2pr\xi\zeta-2pq\xi\eta\right\}.$$

Ale

$$\sum m(\eta^2+\zeta^2)=\mathrm{A},\quad \sum m(\xi^2+\zeta^2)=\mathrm{B},\quad \sum m(\xi^2+\eta^2)=\mathrm{C}.$$

$$\sum m\eta\zeta=0,\quad \sum m\xi\zeta=0,\quad \sum m\xi\eta=0;$$

więc

$$\sum m(v_\xi^2+v_\eta^2+v_\zeta^2)=\mathrm{A}p^2+\mathrm{B}q^2+\mathrm{C}r^2.$$

Nazwijmy T całą pracę sił działających na ciało, i h ilość stateczną która znaczy, naprzykład, siłę żywą w chwili w której zaczęto mierzyć pracę; będzie

$$(3)\qquad \mathrm{A}p^2+\mathrm{B}q^2+\mathrm{C}r^2-h=2\mathrm{T}.$$

To równanie zastąpi jedno z równań (1), gdy można otrzymać całkę przedstawioną przez T.

Jeśli drugie strony równań (1), wyrażone przez L, M, N, są zero, (co się zdarza gdy niema żadnej siły poruszającej, albo gdy wynikowa sił poruszających przechodzi przez punkt stały O, jako naprzykład w ruchu ciała które się obraca około swojego środka ciężkości i pod działaniem samej tylko ciężkości), wtedy T = 0 i powyższe równanie staje się

$$(4)\qquad \mathrm{A}p^2+\mathrm{B}q^2+\mathrm{C}r^2=h,$$

a będąc całką ruchu może zastąpić jedno z równań (1).

Równanie (4) łatwo się wprost otrzymuje, gdy niema sił poruszających. Jakoż, w tym przypadku siła żywa ciała w ruchu wirowym jest stateczna, a ponieważ się wyraża przez $\omega^2 \sum mr^2$, będzie więc

$$\omega^2 \sum mr^2 = h.$$

Owoż, ellipsoida bezwładności względna do punktu obrotu O daje

$$\sum mr^2 = \mathrm{A}\,\mathrm{dos}^2\alpha + \mathrm{B}\,\mathrm{dos}^2\beta + \mathrm{C}\,\mathrm{dos}^2\gamma,$$

α, β, γ są kątami osi chwilowej z osiami głównemi bezwładności, to jest kątami wyznaczonemi przez związki

$$\mathrm{dos}\,\alpha = \frac{p}{\omega}, \qquad \mathrm{dos}\,\beta = \frac{q}{\omega} \qquad \mathrm{dos}\,\gamma = \frac{r}{\omega};$$

więc ostatecznie

$$\omega^2 \sum mr^2 = \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2 = h.$$

Zastosowanie zasady momentów ilości ruchu. Znosząc dt, pomnóżmy pierwsze strony równań (1) odpowiednio przez $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$, i dodajmy, będzie

$$\mathrm{A}^2pdp + \mathrm{B}^2qdq + \mathrm{C}^2rdr = \frac{1}{2}d(\mathrm{A}^2p^2 + \mathrm{B}^2q^2 + \mathrm{C}^2r^2 + stat.).$$

Owoż, wiemy (stronica 459) że $\mathrm{A}p$, $\mathrm{B}q$, $\mathrm{C}r$ wyrażają summy momentów ilości ruchu, około osi ruchomych $\mathrm{O}\xi$, $\mathrm{O}\eta$, $\mathrm{O}\zeta$ które są osiami głównemi bezwładności ciała; więc summa kwadratów tych wieloczynów równa się kwadratowi dwojanu wyni-

kowego momentów ilości ruchu wszystkich punktów ciała. Nazywając k en dwojan, mamy ogólnie

$$(5)\qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Gdy $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, wtedy k^2 jest stateczną całkowania, i równanie (5) będąc całką ruchu może zastąpić jedno z równań (1).

Jeśli żadna siła nie działa na ciało w ruchu, równanie (1) otrzymuje się wprost. Jakoż, w tym przypadku dwojan wynikowy momentów ilości ruchu jest stateczny co do wielkości i do kierunku osi w przestrzeni; a już wiemy że Ap, Bq, Cr są jego rzutami na osiach ruchomych. Te ilości nie są stateczne. ponieważ są rzutami ilości statecznej na kierunkach zmiennych; ale summa kwadratów rzutów jednej i tej samej linii prostej na trzech osiach prostokątnych, stałych albo ruchomych, wyraża zawsze kwadrat długości tej linii. Więc, oznaczając przez k^2 oś, albo raczej moment linijny dwojanu, znajdujemy całkę pierwszą równań (1), przedstawioną przez

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Nazwijmy i kąt osi chwilowej wirowania z osią dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu; będzie

$$\operatorname{dos} i = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{k\omega} = \frac{h}{k\omega}.$$

zkąd

$$\omega \operatorname{dos} i = \frac{h}{y}.$$

Więc, *gdy niema sił, prędkość kątowa chwilowa daje składowę stateczną na osi dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu.*

CAŁKOWANIE RÓWNAŃ EULERA W PRZYPADKU

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

235. Gdy wynikowa sił zewnętrznych przechodzi przez punkt stały O obrotu ciała, albo gdy niema żadnej siły zewnętrznej, wtedy summy L_1, M_1, N_1 i temsamem L, M, N,, momentów sił względem osi spółrzędnych stałych OX, OY, OZ i osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, są zero; zatem równania *Eulera* stają się

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} A\frac{dp}{dt} - (B - C)qr &= 0, \\ B\frac{dq}{dt} - (C - A)rp &= 0, \\ C\frac{dr}{dt} - (A - B)pq &= 0. \end{aligned}$$

W tym dość obszernym przypadku, całkowanie równań przywodzi się do kwadratur. Jakoż, mamy najpierwej dwa równania całkowe

$$\text{(4)} \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$

$$\text{(5)} \qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2,$$

za pomocą których możemy wyrazić p i q w funkcyi r. Te równania dają

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} p^2 &= \frac{k^2 - Bh + (B - C)Cr^2}{A(A - B)}, \\ q^2 &= \frac{k^2 - Ah + (A - C)Cr^2}{B(B - A)}. \end{aligned}$$

Podstawiając wartości p i q w trzeciem równaniu (6), otrzymujemy równanie różniczkowe

$$C\frac{dr}{dt}=\pm(A-B)\sqrt{\frac{k^2-Bh+(B-C)Cr^2}{A(A-B)}\cdot\frac{k^2-Ah+(A-C)Cr^2}{B(B-A)}}.$$

z którego wywodzimy

$$(8)\quad dt=\pm\sqrt{AB}\frac{Cdr}{\sqrt{\{k^2-Bh+(B-C)Cr^2\}\{Ah-k^2-(A-C)Cr^2\}}}.$$

Ponieważ czas t rośnie ciągle, jego różniczka dt jest zawsze dodatna; trzeba więc brać znak $+$ albo $-$, według jak dr będzie dodatne albo odjemne.

Równanie (8) całkuje się przez kwadraturę, i w ogóle rozwiązanie otrzymuje się za pomocą funkcyj elliptycznych. Ale, jeśli k^2 jest równe średniemu z trzech wieloczynów Ah, Bh, Ch, w tym osobliwym przypadku całka wyraża się w kształcie skończonym.

Znając całkę (8), wyprowadzi się z niej wartość r w funkcyi czasu t, poczem p i q wyznaczą się przez formuły (7).

Aby mieć zupełne rozwiązanie zagadnienia, przypuśćmy że na początku ruchu oś stała OZ schodzi się z osią dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu; a ponieważ ostatnia jest niezmienna z założenia (234), obie osie zostaną ciągle razem. Owoż, składowe dwojanu wynikowego, to jest summy momentów ilości ruchu względem osi ruchomych $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$, wyrażają się przez Ap, Bq, Cr; będzie więc

$$(9)\quad \begin{aligned} Ap &= k\,\mathrm{dos}\,ZO\xi = ka'' = k\,\mathrm{wst}\,\varphi\,\mathrm{wst}\,\theta,\\ Bq &= k\,\mathrm{dos}\,ZO\eta = kb'' = k\,\mathrm{dos}\,\varphi\,\mathrm{wst}\,\theta,\\ Cr &= k\,\mathrm{dos}\,ZO\zeta = kc'' = k\,\mathrm{dos}\,\theta. \end{aligned}$$

Z tych równań wynikają dwa związk

$$\text{sty}\varphi = \frac{Ap}{Bq},$$

(10)

$$\text{dos}\theta = \frac{Cr}{k},$$

które wyznaczają kąty φ i θ w funkcyi p, q, r, a następnié w funkcyi czasu t.

Dla wyznaczenia kąta ψ, wyrugujmy najpierwej $\frac{d\theta}{dt}$ między dwoma pierwszemi równaniami (2); będziemy mieli

$$p\,\text{wst}\varphi + q\,\text{dos}\varphi = \frac{d\psi}{dt}\,\text{wst}\theta;$$

poczem, jeśli pomnożymy to równanie przez wstθ, będziemy mogli za pomocą formuł (9) wyrugować kąty φ i θ. Tym sposobem znajdujemy

$$Ap^2 + Bq^2 = k\left(1 - \frac{C^2r^2}{k^2}\right)\frac{d\psi}{dt};$$

zkąd, na mocy równąnia (4), wynika

(11) $$d\psi = \frac{(h - Cr^2)kdt}{k^2 - C^2r^2};$$

nakoniec, jeśli za dt podstawimy jego wartość (8) ψ wyrazi się w funkcyi r przez całkę elliptyczną.

Przypadek osobliwy $k^2 - Bh = 0$.

236. Ten przypadek przedstawia pewną osobliwość ruchu, o której później będzie mowa. Teraz pokażemy tylko że całka (8) może się wyrazić w kształcie skończonym gdy $k^2 - Bh = 0$

w założeniu A > B > C. Uczyńmy $k^2 = \text{B}h$ w formułach (7) i (8), będziemy mieli

$$p^2 = \frac{(\text{B}-\text{C})\text{C}r^2}{(\text{A}-\text{B})\text{B}},$$

$$(12)\qquad q^2 = \frac{(\text{A}-\text{B})h - (\text{A}-\text{C})\text{C}r^2}{(\text{A}-\text{B})\text{B}} = \frac{h}{\text{B}} - \frac{(\text{A}-\text{C})\text{C}r^2}{(\text{A}-\text{B})\text{B}},$$

$$dt = \pm\sqrt{\frac{\text{ABC}}{\text{B}-\text{C}}}\cdot\frac{dr}{r^2\sqrt{(\text{A}-\text{B})\frac{h}{r^2} - (\text{A}-\text{C})\text{C}}}.$$

Niech będzie najpierwej $dr > 0$; to jest, przypuśćmy że p_0 i q_0 mają te same znaki, i, biorąc znak $+$, dajmy ostatniej formule następującą postać

$$dt = -\sqrt{\frac{\text{ABC}}{(\text{A}-\text{B})(\text{B}-\text{C})h}}\cdot\frac{d.\frac{1}{r}\sqrt{(\text{A}-\text{B})h}}{\sqrt{(\text{A}-\text{B})\frac{h}{r^2} - (\text{A}-\text{C})\text{C}}}.$$

Dla skrócenia, połóżmy $\sqrt{\frac{(\text{A}-\text{B})(\text{B}-\text{C})h}{\text{ABC}}} = n$; jeśli zcałkujemy, nazywając α stateczną dowolną, otrzymamy

$$-nt = \log\left(\frac{\sqrt{(\text{A}-\text{B})\frac{h}{r^2}} + \sqrt{(\text{A}-\text{B})\frac{h}{r^2} - (\text{A}-\text{C})\text{C}}}{\alpha}\right).$$

Stateczna α wyznacza się przez wartości początkowe $t = 0$, $r = r_0$; co daje

$$\alpha = \sqrt{(\text{A}-\text{B})\frac{h}{r_0^2}} + \sqrt{(\text{A}-\text{B})\frac{h}{r_0^2} - (\text{A}-\text{C})\text{C}}.$$

Trzeba uważać że w przypadku którym się zajmujemy, z przy-

czyny $k^2 - Bh = 0$ wartości początkowe p_0, q_0, r_0 nie są dowolne, jest między niemi związek

$$A^2p_0^2 + B^2q_0^2 + C^2r_0^2 = B(Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2)$$

albo

$$A(A - B)p_0^2 - C(B - C)r_0^2 = 0,$$

do którego q_0 nie wchodzi. Moglibyśmy więc wziąć $q_0 = 0$, to jest przypuścić że oś chwilowa początkowa znajduje się na płaszczyźnie $\zeta\xi$; wtedy byłoby $\alpha = \sqrt{(A - C)C}$. Wolimy jednak zostawić ogólną wartość α; ale, żeby nie trudziła w rachunku, zachowujemy literę α, i z równania całkowego wywodzimy następujące:

$$\sqrt{(A - B)\frac{h}{r^2}} + \sqrt{(A - B)\frac{h}{r^2} - (A - C)C} = \alpha e^{-nt}.$$

Owoż, mamy także

$$\sqrt{(A - B)\frac{h}{r^2}} - \sqrt{(A - B)\frac{h}{r^2} - (A - C)C} = \frac{(A - C)Ce^{nt}}{\alpha};$$

co łatwo sprawdzić mnożąc stronami oba równania.

Ztąd, dodając, wynika

$$2\sqrt{(A - B)\frac{h}{r^2}} = \alpha e^{-nt} + \frac{(A - C)Ce^{nt}}{\alpha} = \frac{\alpha^2 + (A - C)Ce^{2nt}}{\alpha e^{nt}};$$

więc

$$(13) \qquad r = \pm \frac{\alpha e^{nt}}{2\{\alpha^2 + (A - C)Ce^{2nt}\}\sqrt{(A - B)h}}.$$

Podstawiając tę wartość w dwie pierwsze formuły (12), otrzy-

mujemy

$$(14)\qquad p^2 = \frac{(B-C)C\alpha^2}{(A-B)^2Bh}\left(\frac{e^{nt}}{\alpha^2+(A-C)Ce^{2nt}}\right)^2,$$

$$(15)\qquad q^2 = \frac{h}{B} - \frac{(A-C)C\alpha^2}{(A-B)^2Bh}\left(\frac{e^{nt}}{(\alpha^2+(A-C)Ce^{2nt}}\right)^2.$$

Trzy ostatnie formuły pokazują że, w miarę jak czas t rośnie, r i p dążą do zera, a q^2 doży do $\frac{h}{B}$. Ale r i p stają się zero dopiero z $t = \infty$; więc *nigdy oś chwilowa nie zejdzie się w jedną linię z pół-osią średnią* $\frac{1}{\sqrt{B}}$, *jeśli nie przystawała do niej na początku ruchu.*

Mając wiadome p, q, r w funkcyi czasu t, dokończa się rozwiązania za pomocą formuł

$$\operatorname{dos}\theta = \frac{Cr}{Bh}, \qquad \operatorname{sty}\varphi = \frac{Ap}{Bq}, \qquad d\psi = \frac{h-Cr^2}{Bh-C^2r^2}dt,$$

kładąc w ostatniej wartość r w funkcyi t, i całkując.

Jeśli p_0 i q_0 mają znaki przeciwne, będzie $dr < 0$; wtedy łatwo jest widzieć że wartości r, p, q wywodzą się z formuł (13), (14), (15), zamieniając tylko n na $-n$. Co zaraz daje

$$r = \pm \frac{\alpha e^{nt}}{2\{\alpha^2e^{2nt}+(A-C)C\}\sqrt{(A-B)h}},$$

$$p^2 = \frac{(B-C)C\alpha^2}{(A-B)^2Bh}\left\{\frac{e^{nt}}{\alpha^2e^{2nt}+(A-C)C}\right\}^2,$$

$$q^2 = \frac{h}{B} - \frac{(A-C)C\alpha^2}{(A-B)^2Bh}\left\{\frac{e^{nt}}{\alpha^2e^{2nt}+(A-C)C}\right\}^2.$$

Te i poprzedzające wartości dowodzą że p i q dążą do zera a zaś q dąży do granicy $\pm\sqrt{\frac{h}{B}}$, gdy czas rośnie do nieskończoności. Owoż, na mocy równań (6) dq jest odjemne albo dodatne, według jak p i r mają te same znaki albo znaki przeciwne; więc, w pierwszym razie $q < 0$ maleje aż do $-\sqrt{\frac{h}{B}}$, w drugim $q > 0$ rośnie do $+\sqrt{\frac{h}{B}}$. Ztąd wnosimy że, jeśli oś chwilowa jest położona bardzo blisko osi średniej na początku ruchu, to będzie się kierowała ku jej stronie dodatnej albo odjemnej, według jak p_0 i r_0 będą dane ze znakami przeciwnemi albo z temi samemi znakami.

Przypadki szczególne $A = B$ i $A = B = C$.

237. Formuły (7) i następnie formuła (8) zostały otrzymane w założeniu że A i B nie są równe; trzeba więc wprost rozwiązać przypadek szczególny $A = B$, do którego się nie stosuje formuła (8). Owoż, jeśli ellipsoida bezwładności jest powierzchnią obrotową, około osi $O\zeta$ naprzykład, będzie $A = B$; wtedy trzecie równanie (6) daje

$$\frac{dr}{dt} = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad r = n;$$

a mnożąc dwa pierwsze równania odpowiednio przez p, q, i dodając, znajdujemy

$$pdp + qdq = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad p^2 + q^2 = m^2;$$

m i n są dwie stateczne dowolne które się wyznaczą przez wartości początkowe p_0, q_0, r_0.

Ztąd wynika

$$\omega^2 = m^2 + n^2;$$

co dowodzi że prędkość kątowa jest stateczna.

Aby otrzymać p w funkcyi czasu t, bierzemy pierwsze równanie (6)

$$dp = \frac{A - C}{A} nqdt,$$

które daje znak początkowy różniczki dp; mamy zaś

$$q = \pm\sqrt{m^2 - p^2}.$$

Więc

$$\frac{A - C}{A} ndt = \pm \frac{dp}{\sqrt{m^2 - p^2}}.$$

Dla skrócenia uczyńmy $\frac{(A - C)n}{A} = \mu$, i przypuśćmy $\mu > 0$, $dp > 0$; będzie

$$\mu dt = \frac{dp}{\sqrt{m^2 - p^2}},$$

zkąd, całkując, wywodzimy

$$p = m \operatorname{wst}(\mu t + \alpha) \quad \text{i} \quad q = m \operatorname{dos}(\mu t + \alpha).$$

Gdy $t = 0$, powinno być

$$p_0 = m \operatorname{wst} \alpha \quad \text{i} \quad q_0 = m \operatorname{dos} \alpha;$$

a ponieważ m jest wartością samoistą, te dwa warunki wyznaczają ćwiercian w którym się kończy łuk α, najmniejszy dodatny.

Rozwiązanie zagadnienia uzupełnia się przez formuły (10) i (11), które dają

$$\operatorname{dos}\theta = \frac{Cr}{k} = \frac{Cn}{k}, \qquad \operatorname{sty}\varphi = \frac{Ap}{Bq} = \frac{p}{q} = \operatorname{sty}(\mu t + \alpha),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{(h - Cr^2)k}{k^2 - C^2r^2} = \frac{A(p^2+q^2)k}{A^2(p^2+q^2)} = \frac{k}{A}.$$

Ztąd wynika

$$\theta = \theta_0, \qquad \varphi = \frac{(A - C)}{A}nt + \varphi_0, \qquad \psi = \frac{k}{A}t + \psi_0.$$

Wartość stateczna kąta θ pokazuje że oś figury $O\zeta$ ellipsoidy bezwładności opisuje stożek prosty, około osi stałej OZ dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, a zatem że nachylenie płaszczyzny równika ellipsoidy na płaszczyznę dwojanu wynikowego zostaje stateczne. Wartość kąta φ dowodzi że promienie równika poruszają się jednostajnie, z prędkością kątową μ, względem jego śladu ON na płaszczyznie dwojanu wynikowego; nareszcie wartość kąta ψ okazuje że ten ślad ON równika i oś figury $O\zeta$ ellipsoidy mają ruch jednostajny.

Oś chwilowa OI czyni z osią figury $O\zeta$ kąt stateczny, ponieważ $\operatorname{dos}(OI, O\zeta) = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$; więc oś chwilowa kreśli koło na powierzchni ellipsoidy obrotowej, i opisuje w ciele stożek prosty.

Jeśli $A = B = C$ ellipsoida bezwładności jest sferą; wtedy równania (6) dowodzą że p, q, r są stateczne; więc oś chwilowa wirowania, jakiekolwiek wzięła położenie początkowe, zostaje niezmienna w ciele; ale oś dwojanu wynikowego, niezmienna w przestrzeni, ma równania $\frac{\xi}{Ap} = \frac{\eta}{Bq} = \frac{\zeta}{Cr}$ które się przywodzą do $\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}$, dlatego że $A = B = C$. Co dowodzi że te dwie osie są jedną i tą samą linią stałą. Otrzymany wynik

stanowi już nam wiadome twierdzenie Cynematyki, które wkrótce ogólniej sprawdzimy.

238. Trzeba uważać że, *gdy* A = B, *oś chwilowa, oś figury i oś dwojanu wynikowego są ciągle na jednej płasczyznie.* Aby się o tem przekonać, dość okazać że rzuty osi chwilowej OI i osi OZ dwojanu wynikowego są te same na płasczyznie $\xi\eta$. Owoż, równania tych rzutów są $\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}$ i $\frac{\xi}{Ap}=\frac{\eta}{Bq}$, a z założenia A = B; więc trzy linie OI, OZ, Oζ, mające na płasczyznie $\xi\eta$ rzuty w linii prostej, leżą na jednej płasczyznie. Zatem linia ON, prostopadła do osi OZ i Oζ, jest prostopadła do tej płasczyzny.

239. Gdy ellipsoida bezwładności jest powierzchnią obrotową i summa momentów si zewnętrznych względem jej osi figury jest zero, *wirowanie* około tej osi jest stateczne. Jakoż, jeśli na przykład A = B i N = 0, trzecie równanie (1) staje się

$$C\frac{dr}{dt}=0, \qquad \text{zkąd} \qquad r=stat=n.$$

W tym przypadku który, jako łatwo widzimy, może się tylko zdarzać pod dwoma wskazanemi warunkami, całkowanie równań *Eulera* znacznie się uproszcza. I w samej rzeczy, dwa pierwsze równania stają się

$$\frac{dp}{dt}-\frac{A-C}{A}nq=\frac{L}{A},$$

$$\frac{dq}{dt}+\frac{A-C}{A}np=\frac{M}{A};$$

a jeśli położymy jeszcze

$$\frac{A-C}{A}n=\mu$$

te równania wezmą dogodną postać

$$\frac{dp}{dt}-\mu q=\frac{L}{A},$$

$$\frac{dq}{dt}+\mu p=\frac{M}{A},$$

μ jest ilością stateczną, ale L i M mogą być stateczne albo zmienne.

Gdy L i M są wiadomemi funkcyami czasu t, dwa ostatnie równania, *jednoczesne i linijne*, nie przedstawiają żadnej trudności całkowania. Jakoż, stosując ogólną metodę, bierzemy te równania bez drugich stron, to jest piszemy

$$\frac{dp}{dt}-\mu q=0;$$

$$\frac{dq}{dt}+\mu p=0;$$

dla wyrugowania q różniczkujemy pierwsze równanie; co daje

$$\frac{d^2p}{dt^2}+\mu\frac{dq}{dt}-0.$$

Między tem równaniem i drugiem rugujemy $\frac{dq}{dt}$, i otrzymujemy równanie linijne drugiego rzędu

$$\frac{d^2p}{dt^2}+\mu^2p=0,$$

którego całka ogólna wyraża się w kształcie

$$p=\mathrm{P}\operatorname{dos}\mu t+\mathrm{Q}\operatorname{wst}\mu t.$$

P i Q są dwie stateczne dowolne.

Poczem znajdujemy

$$q = -\mathrm{P}\,\mathrm{wst}\mu t + \mathrm{Q}\,\mathrm{dos}\mu t.$$

Teraz, aby zadość uczynić równaniom różniczkowym które zcałkować chcemy, dość jest użyć metody zmienności stałecznych dowolnych. Różniczkujemy więc znalezione całki p i q, i mamy

$$\frac{dp}{dt} = -\mu\mathrm{P}\,\mathrm{wst}\mu t + \mu\mathrm{Q}\,\mathrm{dos}\mu t + \frac{d\mathrm{P}}{dt}\,\mathrm{dos}\mu t + \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\,\mathrm{wst}\mu t,$$

$$\frac{dq}{dt} = \mu\mathrm{P}\,\mathrm{dos}\mu t + \mu\mathrm{Q}\,\mathrm{wst}\mu t + \frac{d\mathrm{P}}{dt}\,\mathrm{wst}\mu t - \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\,\mathrm{dos}\mu t.$$

Podstawiamy te wartości w równaniach różniczkowych zadanych, i otrzymujemy do wyznaczenia funkcyj P i Q dwa równania warunkowe

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt}\,\mathrm{dos}\mu t + \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\,\mathrm{wst}\mu t = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt}\,\mathrm{wst}\mu t + \frac{d\mathrm{Q}}{dt}\,\mathrm{dos}\mu t = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}};$$

zkąd

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}\,\mathrm{dos}\mu t - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}\,\mu\,\mathrm{wst}\mu t,$$

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dt} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{A}}\,\mathrm{wst}\mu t + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A}}\,\mathrm{dos}\mu t.$$

P i Q wyznaczą się przez kwadratury, gdy L i M będą dane w funkcyi czasu t.

WŁASNOŚCI GEOMETRYCZNE RUCHU OKOŁO PUNKTU.

240. Całki równań Eulera, wtedy nawet gdy niema sił poruszających, przedstawiają jeszcze trudności mnogich formuł elliptycznych które, mimo pięknych prac Jakobiego, nie okazują wydatnie ogólnych własności ruchu. Poinsot, w sławnej Nowej teoryi wirowania ciał bryłowych (*Théorie nouvelle de la rotation des corps solides*), opierając się na ruchu ellipsoidy bezwładności, wykazał geometrycznie ogólne własności ruchu ciała około punktu stałego, i tym sposobem uzupełnił rozwiązanie zagadnienia, w przypadku gdy momenta L, M, N są wszystkie trzy zero. Zajmiemy się teraz temi własnościami.

Twierdzenie. *Gdy ciało bryłowe obraca się około punktu stałego*, czy są siły poruszające czy niema, *zawsze oś chwilowa wirowania jest, w ellipsoidzie bezwładności względem tego punktu, średnicą sprzężoną płaszczyzny dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu.*

Niech będą $O\xi$, $O\eta$, $O\zeta$ trzy osie główne bezwładności ciała, względne do punktu stałego O obrotu, wzięte za osie ruchome spółrzędnych; ellipsoida bezwładności przedstawia się przez równanie

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1,$$

a oś chwilowa przez

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}.$$

Dostawy kątów, jakie czyni z osiami spółrzędnych normalna do płaszczyzny stycznej w punkcie (ξ, η, ζ), są proporcyonalne do

$$A\xi, \quad B\eta, \quad C\zeta,$$

a zaś podobne dostawy normalnej do płasczyzny dwojanu wynikowego są proporcyonalne do

$$Ap, \quad Bq, \quad Cr.$$

Owoż, jeśli płasczyzna styczna jest sprzężona z osią chwilową, równania tej ostatniej pokazują że pierwsze dostawy są proporcyonalne do drugich; więc płasczyzna dwojanu wynikowego jest równoległa do płasczyzny stycznej. Co dowodzi wysłowionego twierdzenia.

241. Poinsot nazywa *biegunem chwilowym* punkt w którym oś chwilowa przecina powierzchnię ellipsoidy bezwładności.

Na mocy tego określenia, spółrzędne ξ, η, ζ, bieguna chwilowego I wywodzą się ogólnie z równań

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{\sqrt{A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2}}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}} = \frac{1}{\sqrt{2T + h}};$$

jakiekolwiek są siły poruszające.

A jeśli przypuścimy $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, będzie $2T = 0$, i spółrzędne bieguna I wyrażą się przez

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{h}}, \qquad \eta = \frac{q}{\sqrt{h}}, \qquad \zeta = \frac{r}{\sqrt{h}}.$$

Nazwijmy l długość OI promienia wodzącego (biegunowego), będzie

$$l = \sqrt{\frac{p^2 + q^2 + r^2}{h}} = \frac{\omega}{\sqrt{h}};$$

zkąd

$$\omega = l\sqrt{h}.$$

Więc, *gdy niema sił poruszających, albo gdy wynikowa tych*

sił przechodzi przez punkt stały obrotu ciała, prędkość chwilowa kątowa jest proporcyonalna do promienia biegunowego.

Nadto, płasczyzna styczna do ellipsoidy bezwładności w biegunie chwilowym ma równanie

$$Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{h},$$

a odległość δ punktu stałego O od tej płasczyzny jest

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}} = \frac{\sqrt{h}}{k}.$$

Co dowodzi że *płasczyzna styczna do ellipsoidy bezwładności w biegunie chwilowym zostaje w odległości statecznej od jej środka* O.

Owoż, ta płasczyzna jest równoległa do płasczyzny niezmiennej dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, czyli do płasczyzny *powierzchni maximum;* więc ona jest jedną i tą samą płasczyzną stałą w przestrzeni.

Ztąd TWIERDZENIE POINSOTA. *Ruch ciała około punktu stałego odbywa się tak że ellipsoida bezwładności zostaje ciągle w zetknięciu z płasczyzną stałą w przestrzeni, i obraca się w każdej chwili około promienia punktu zetknięcia, z prędkością kątową proporcyonalną do tego promienia.*

POLODIA I HERPOLODIA.

242. W ruchu ciała około punktu stałego O, biegun chwilowy kreśli na powierzchni ellipsoidy bezwładności linię krzywą którą POINSOT mianował *polodią* (πολός biegun, ὁδός droga); a na płasczyznie stałej w przestrzeni ten biegun kreśli drugą krzywę, *herpolodię* (ἕρπειν wężykować); ponieważ zaś jeden i ten sam punkt opisuje obie krzywe, polodia, linia ruchoma, toczy się w ruchu względnym na herpolodii, linii stałej.

Polodia jest podstawą stożka, który ma wierzchołek w O i, ściśle związany z ciałem, obraca się razem z niem; a herpolodi jest podstawą drugiego stożka, który ma ten sam wierzchołek O ale jest stały w przestrzeni. Ztąd wynika że ruch ciała około punktu stałego jest toczeniem się stożka ruchomego na stożku stałym; a wiemy z Cynematyki (82) że to toczenie się jest ruchem najogólniejszym jaki wziąć może ciało bryłowe mające punkt stały.

Równania polodii. Według określenia, polodia jest miejscem punktów powierzchni ellipsoidy bezwładności w których płasczyzna styczna ma odległość stateczną od środka O.

Owoż, odległość środka O ellipsoidy od płasczyzny stycznej w punkcie (ξ, η, ζ) równa się

$$\frac{1}{\sqrt{A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2}}=\delta=\frac{\sqrt{h}}{k};$$

więc równania polodii, odniesione do osi ruchomych, są

$$(16)\qquad \begin{aligned} &A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2=1\\ &A^2\xi^2+B^2\eta^2+C^2\zeta^2=\frac{k^2}{h}. \end{aligned}$$

Te równania przedstawiają dwie ellipsoidy, mające spólne płasczyzny główne; zatem polodia, będąc przecięciem się dwóch powierzchni krzywych zamkniętych, jest linią zamkniętą i ogólnie o podwójnéj krzywiznie. A zważając że spółrzędne bieguna chwilowego wyrażają się przez $\frac{p}{\sqrt{h}}$, $\frac{q}{\sqrt{h}}$, $\frac{r}{\sqrt{h}}$, widzimy łatwo że równania polodii są równaniami (4) i (5) w których zastąpiono p, q, r przez $\xi\sqrt{h}$, $\eta\sqrt{h}$, $\zeta\sqrt{h}$.

Rzuty polodii na płasczyznach spółrzędnych są liniami krzywemi drugiego rzędu. Jakoż, rugując po kolei ξ, η, ζ, otrzy-

mujemy na płasczyznach $\eta\zeta$, $\xi\zeta$, $\xi\eta$ równania rzutów

$$(a) \qquad B(A-B)\eta^2+C(A-C)\zeta^2=\frac{Ah-k^2}{h},$$

$$(b) \qquad A(A-B)\xi^2-C(B-C)\zeta^2=\frac{k^2-Bh}{h},$$

$$(c) \qquad A(A-C)\xi^2+B(B-C)\eta^2=\frac{k^2-Ch}{h}.$$

Przypuśćmy $A>B>C$. Ponieważ odległość $\delta=\frac{\sqrt{h}}{k}$ nie może być mniejsza od pół-osi małej $\frac{1}{\sqrt{A}}$, ani przewyższać pół-osi wielkiej $\frac{1}{\sqrt{C}}$, powinno być w ogóle

$$\frac{1}{A}<\delta^2<\frac{1}{C}$$

albo

$$Ah>k^2>Ch.$$

Ale k^2 może być większe albo mniejsze od Bh.

Więc mamy tylko do roztrząsania: dwa przypadki ogólne, to jest δ zawarte między $\frac{1}{\sqrt{A}}$ i $\frac{1}{\sqrt{B}}$ albo między $\frac{1}{\sqrt{B}}$ i $\frac{1}{\sqrt{C}}$; dwa przypadki szczególne $\delta=\frac{1}{\sqrt{A}}$ i $\delta=\frac{1}{\sqrt{C}}$; nakoniec przypadek osobliwy $\delta=\frac{1}{\sqrt{B}}$.

W przypadkach ogólnych, równania (*a*), (*b*), (*c*) pokazują że rzuty polodii na każdej z dwóch płasczyzn ruchomych $\eta\zeta$ i $\xi\eta$ są zawsze ellipsami podobnemi, bo spółczynniki kwadratów

ξ^2, η^2, ζ^2 są dodatne i niezależne od $\frac{k^2}{h}$; przeciwnie, na płasczyznie $\xi\zeta$ te rzuty są zawsze hiperbolami mającemi spólne niemaltyczne, i ich położenia względem niemaltycznych zależą od znaku ilości $k^2 - Bh$, która może być dodatna, odjemna, a nawet zero. Gdy $\frac{1}{\sqrt{A}} < \delta < \frac{1}{\sqrt{B}}$ czyli $Ah > k^2 > Bh$, polodia otacza wierzchołek A osi mniejszej ellipsoidy bezwładności; a gdy $\frac{1}{\sqrt{B}} < \delta < \frac{1}{\sqrt{C}}$ czyli $Bh > k^2 > Ch$, wtenczas polodia otacza wierzchołek C osi większej.

W przypadkach szczególnych $\delta = \frac{1}{\sqrt{A}}$ i $\delta = \frac{1}{\sqrt{C}}$, czyli $k^2 = Ah$ i $k^2 = Ch$, polodia jest punktem, wiérzchołkiem małej albo wielkiej osi; wtedy oś chwilowa schodzi się z jedną z tych dwóch osi głównych ellipsoidy bezwładności, i nie mogła nigdy ani będzie mogła zajmować innego położenia. Albowiem odległość płasczyzny stycznej biegunowej od środka ellipsoidy jest, w tym razie, najmniejsza albo największa możebna; gdyby więc oś chwilowa mogła przedtem albo potem zmieniać położenie, toby biegun chwilowy musiał opuszczać płasczyznę styczną. W tych dwóch przypadkach ciało obraca się jednostajnie około jednej z dwóch osi głównych $\frac{2}{\sqrt{A}}$ albo $\frac{2}{\sqrt{C}}$, i ta oś zostaje niezmienna w przestrzeni.

Nakoniec, w przypadku osobliwym $k^2 = Bh$, równanie (b) przedstawia dwie płasczyzny prostopadłe do płasczyzny $\xi\zeta$, które przecinają ellipsoidę bezwładności wedle dwóch ellips, mających średnią oś ellipsoidy za oś spólną. Te dwie *ellipsy osobliwe* są równe; jakoż, ich płasczyzny nachylają się na płasczyznę $\xi\eta$ pod kątem θ danym przez formułę

$$\operatorname{stg}\theta = \pm\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}};$$

oś mała jest $\frac{2}{\sqrt{B}}$; a oś wielka, równa swojemu rzutowi na płaszczyźnie $\xi\eta$ podzielonemu przez dosθ, wyraża się przez

$$2\sqrt{\frac{B-C}{A(A-C)}} : \mathrm{dos}\theta = 2\sqrt{\frac{A+C-B}{AC}}.$$

W tym przypadku osobliwym polodia nie jest koniecznie punktem, jako w poprzedzających przypadkach szczególnych; bo na powierzchni ellipsoidy bezwładności, oprócz wierzchołka średniego B w którym płaszczyzna styczna jest na odległość $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ od jej środka O, istnieje nieskończona liczba punktów w których ta płaszczyzna może mieć tę samą odległość od środka ellipsoidy O. Ciąg tych punktów tworzy właśnie dwie ellipsy osobliwe, i polodia jest jedną z nich. Ale, jeśli na początku ruchu biegun chwilowy przypada w samym wierzchołku B osi średniej, w którym się krzyżują ellipsy osobliwe, polodia jest punktem; bo wtedy oś chwilowa schodzi rię z osią średnią $\frac{2}{\sqrt{B}}$ i zostaje nieruchoma w przestrzeni. I w samej rzeczy, kiedy biegun chwilowy jest w wierzchołku B, to może się tylko przemieszczać na jednej z dwóch ellips osobliwych, ponieważ one są miejscem punktów powierzchni ellipsoidy w których płaszczyzna styczna znajduje się na odległość $\frac{1}{\sqrt{B}}$ od środka O; owoż, niema żadnej przyczyny żeby ten biegun opisywał raczej jedną niż drugą z dwóch ellips równych i symetrycznych; więc zostaje nieruchomy. Ztąd jeszcze wynika że oś średnia ellipsoidy bezwładności może być tak dobrze jak oś mała albo oś wielka osią ustawiczną wirowania.

Szukając maximum i minimum promienia wodzącego OI,

danego przez formułę

$$OI = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta}$$

w której zmienne ξ, η, ζ są związane równaniami (16), nietrudno znaleźć że polodia ma cztery wierzchołki, odpowiedające właśnie wartościom maximum i minimum promienia OI. Te wierzchołki dzielą polodię na cztery części równe i symetryczne, które biegun chwilowy przebiega po kolei w czasach równych.

243. Stożek ruchomy, *miejsce osi chwilowych w ciele obracającem się około punktu stałego.* Oś chwilowa ma równania

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r},$$

a między p, q, r są dwa związki (4) i (5) które dają

$$\frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{h} = \frac{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}{k^2}.$$

Uważając że trzy ilości p, q, r są proporcyonalne do ξ, η, ζ, możemy je wyrugować między temi trzema równaniami jednorodnemi, i znajdujemy

$$(17) \quad A(k^2 - Ah)\xi^2 + B(k^2 - Bh)\eta^2 + C(k^2 - Ch)\zeta^2 = 0.$$

Więc *oś chwilowa wirowania opisuje w ciele stożek drugiego rzędu, którego wierzchołkiem jest punkt stały* O *a kierownicą polodia.* Równanie tego stożka można wyprowadzić z dwóch równań polodii, mnożąc pierwsze przez k^2 a drugie przez h, i odciągając stronami.

Biorąc rzeczy ogólnie, przypuśćmy że momenta główne bezwładności są nierówne, i niech będzie $A > B > C$. W tem zało-

żeniu spółczynniki skrajne $k^2 - Ah$ i $k^2 - Ch$ mają znaki przeciwne; albowiem z wiadomych nierówności

$$\frac{1}{A} < \frac{h}{k^2} < \frac{1}{C}$$

wynikają następujące

$$k^2 - Ah < 0 \quad \text{i} \quad k^2 - Ch > 0.$$

Więc, jeśli żaden z trzech spółczynników $k^2 - Ah$, $k^2 - Bh$, $k^2 - Ch$ nie jest zero, równanie (17) przedstawia stożek, który otacza małą oś $O\xi$ albo wielką oś $O\zeta$ ellipsoidy bezwładności, według jak jest $k^2 - Bh > 0$ albo $k^2 - Bh < 0$.

Stożek staje się linią prostą albo przywodzi się do dwóch płaszczyzn, gdy jeden z trzech spółczynników jest zero. I tak:

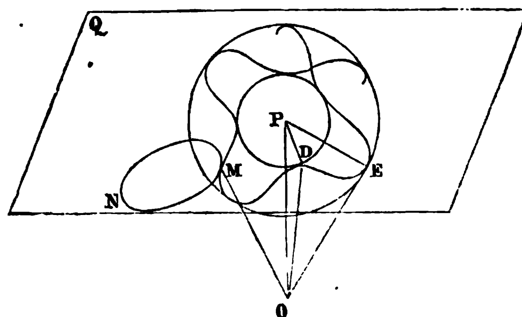
W przypadku szczególnym $k^2 - Ah = 0$, spółczynniki $k^2 - Bh$ i $k^2 - Ch$ są oba dodatne; co wymaga $\eta = 0$ i $\zeta = 0$; więc wtedy stożek przywodzi się do małej osi $O\xi$.

W drugim przypadku szczególnym $k^2 - Ch = 0$, spółczynniki $k^2 - Ah$ i $k^2 - Bh$ są oba odjemne, musi więc być $\xi = 0$ i $\eta = 0$; co dowodzi że stożek stał się wielką osią $O\zeta$.

Ale w przypadku osobliwym $k^2 - Bh = 0$, spółczynniki $k^2 - Ah$ i $k^2 - Ch$ są znaków przeciwnych; wtedy równanie (17) przedstawia dwie płaszczyzny na których się znajdują właśnie dwie ellipsy osobliwe.

244. **Herpolodia.** Niech będzie O środek ellipsoidy bezwładności, M jej punkt zetknięcia z płaszczyzną stałą Q, równoległą do płaszczyzny dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu. Ze środka O spuśćmy na płaszczyznę Q prostopadłę OP, i poprowadźmy dwie linie proste: jedną OD *minimum* promienia wodzącego l, drugą OE *maximum* tego promienia; nakoniec z punktu P jako środka i promieniami PD, PE zakreślmy dwa okręgi kół. Podczas gdy ellipsoida bezwładności, wirując około

promienia OM, toczy się na płasczyznie stycznej Q, biegun



chwilowy M przechodzi od jednego z dwóch okręgów PD, PE do drugiego, i kreśli na tej płasczyznie linię krętą MDE która się nazywa herpolodią. Ta krzywa zwykle otacza punkt P, raz się zbliżając drugi raz oddalając; ale się nie zamyka jeśli kąt mający wierzchołek w P, i odpowiedający obwodowi polodii nawiniętej na herpolodii, nie jest spółmierny z kątem prostym. Stożek, mający za wierzchołek środek O ellipsoidy a za podstawę herpolodię, jest miejscem osi chwilowej w przestrzeni; na tym właśnie stożku, niejako rowkowanym, toczy się stożek ruchomy związany z ciałem, i przedstawia obraz jego ruchu wirowego około punktu O. Stożek ruchomy jest poprostu stożkiem drugiego rzędu; ale stożek stały jest ogólnie stożkiem *przestępnym,* którego powierzchnia wije się nieskończenie około osi dwojanu wynikowego. W przypadku osobliwym $k^2 - Bh = 0$, stożek ruchomy staje się jedną z dwóch płasczyzn która się toczy na stożku rowkowanym; wtedy polodia jest jedną z dwóch ellips osobliwych, a herpolodia linią spiralną która się zbliża coraz bardziej do punktu P ale go nigdy nie dosięga. Jednakże długość tej spiralnej jest skończona, bo się oczywiście równa obwodowi ellipsy osobliwej której łuki po sobie idące, tocząc się na płasczyznie stycznej stałej Q, składają herpolodię.

Jeśli A = B, ellipsoida bezwładności i stożek ruchomy są powierzchniami obrotowemi, mającemi oś Oζ figury za oś, i polodię za spólny równoleżnik. Wtedy prędkość kątowa jest stateczna (237), i temsamem promień biegunowy stateczny; więc dwa koła graniczne herpolodii schodzą się w jedno, i ta krzywa staje się kołem. Teraz stożek ruchomy jest obrotowy, i toczy się jednostajnie na stożku stałym także obrotowym.

Nareszcie, jeśli A = B = C, ellipsoida bezwładności jest sferą, i prędkości p, q, r są stateczne, a temsamem dostawy $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ są stateczne; więc oś chwilowa zostaje stała w ciele. Owoż, oś dwojanu wynikowego jest stateczna w przestrzeni, i jej równania $\frac{\xi}{Ap} = \frac{\eta}{Bq} = \frac{\zeta}{Cq}$ przywodzą się teraz do równań $\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r}$ osi chwilowej; co dowodzi że te dwie osie schodzą się w jedną. Więc, w tym przypadku polodia i herpolodia stają się jednym i tym samym punktem.

Polodia i herpolodia mają kształty zupełnie różne: ale, ponieważ ten sam punkt kreśli obie, ich równania w funkcyi łuku opisanego i promienia wodzącego OM, wyprowadzonego ze środka O, są całkiem jednem i temsamem równaniem. Dla herpolodii jednak lepiej jest wziąć za początek spółrzędnych rzut P środka O ellipsoidy na płaszczyznie stałej Q, i, nazywając u promień wodzący PM, zamiast OM podstawić $\sqrt{\delta^2 + u^2}$.

STAŁOŚĆ WIROWANIA OKOŁO OSI GŁÓWNYCH.

245. Wirowanie ciała około jednej z trzech osi głównych ellipsoidy bezwładności raz zaczęte trwa nieustannie, jeśli go żadna obca siła nie narusza. Ale istnieje wielka różnica dotycząca stałości tego wirowania około osi średniej albo około każdej z dwóch osi skrajnych. Wirowanie około osi średniej

nie ma żadnej stałości. Chcemy przez to powiedzieć że, przykładając dwojan sił chwilowych do ciała obracającego się około osi średniej OB, jeśli odwiedziono cokolwiek od jej wierzchołka B biegun chwilowy I, to on nietylko nie powróci do tego bieguna ale się jeszcze od niego oddali, i pójdzie opisywać nową polodię około wielkiej osi albo około małej, według jak nadany popęd przez dwojan chwilowy powiększy albo zmniejszy odległość δ płasczyzny stycznej od środka O. A jeśli przemieszczenie bieguna chwilowego nie zmienia odległości δ, to biegun będzie opisywał jedną z dwóch ellips osobliwych, o których wyżej mówiliśmy.

Jest przecież jeden przypadek w którym biegun chwilowy, strącony z wierzchołka B osi średniej, usiłuje do niego powrócić; co się zdarza gdy biegun został poniesiony na jedną z dwóch ellips osobliwych w stronę w której wirowanie zbliża go do wierzchołka B; ale, jeśli ten biegun, poniesiony na tę samą ellipsę, znajduje się z drugiej strony jej wierzchołka B, to będzie się ciągle od niego oddalał a zbliżał nieskończenie do wierzchołka przeciwnego B' którego nigdy nie dosięgnie. W tym jedynym przypadku ellipsoida, dotykająca płasczyznę stałą Q najpierwej biegunem średnim B, dotykałaby ją na końcu czasu $t = \infty$ biegunem średnim przeciwnym B'; tak że położenie ciała byłoby przewrócone w przestrzeni. Takie jest największe zboczenie jakie dwojan chwilowy sprawić może w ruchu ciała około osi średniej $\frac{2}{\sqrt{B}}$.

Zatem, jeśli jedna z dwóch osi skrajnych ellipsoidy bezwładności niewiele się różni od osi średniej, ta oś skrajna będzie miała mało stałości. Nie można więc twierdzić bezwzględnie że, gdy oś chwilowa zostaje cokolwiek odchylona od osi głównej, odpowiedającej najmniejszemu albo największemu momentowi bezwładności ciała, to się od niej bardzo mało oddali, czyniąc tylko małe oscyllacye przez cały ciąg ruchu. Bo, jeśli moment bezwładności, względny do tej osi, mało się różni od momentu

średniego, biegun chwilowy, chociaż bardzo mało przemieszczony, może jednak opisywać linię krzywą około drugiej osi głównej, a nawet krzywę wązką i bardzo wydłużoną; może więc czynić obszerne oscyllacye z obydwóch stron bieguna głównego z którego był zepchnięty.

Aby to wszystko jeszcze wydatniej okazać, wyobraźmy powierzchnię ellipsoidy bezwładności podzieloną na cztery części czyli wrzecienia ellipsoidalne, przez dwie ellipsy osobliwe których płasczyzny, przechodzące przez oś średnią $\frac{2}{\sqrt{B}}$, są równo nachylone na pół-oś skrajną $\frac{1}{\sqrt{A}}$, z obydwóch jej stron pod wiadomym kątem θ. Wtedy biegun średni B będzie spólnym wierzchołkiem dwóch ellips osobliwych; biegun główny A będzie leżał w środku wrzecienia mającego kąt 2θ, a biegun główny C w środku wrzecienia spełniającego.

Owoż, jeśli biegun chwilowy I przypada w biegunie średnim B, a będzie cokolwiek przemieszczony, to, ogólnie, padnie w jednem z dwóch wrzecieni i będzie opisywał polodię około jednego z dwóch biegunów skrajnych, A albo C. Ale to przemieszczenie może się zdarzyć wzdłuż jednej albo drugiej ellipsy osobliwej; w tym razie biegun chwilowy będzie opisywał jedną ellipsę osobliwą, i, albo powróci do bieguna średniego B, albo się będzie ciągle zbliżał do bieguna przeciwnego B', według jak wirowanie ciała będzie mu nadawało dążność ku pierwszemu albo ku ostatniemu; jakośmy poprzednio okazali. Więc, oprócz tego jedynego przypadku, oś średnia nie ma żadnej stałości.

Atoli, jeśli biegun chwilowy wirowania przypada w jednym z dwóch biegunów głównych, A albo C, ellipsoidy bezwładności, to jest jeśli ciało wiruje około jednej z dwóch osi skrajnych $\frac{2}{\sqrt{A}}$ albo $\frac{2}{\sqrt{C}}$, wtenczas można umieścić ten biegun chwilowy w jakimkolwiek punkcie jego wrzecienia, a on zawsze

będzie opisywał polodię około tego samego bieguna głównego. Dla tej ważnej przyczyny, wrzecienie ellipsoidalne otaczające biegun osi większej albo mniejszej jest niejaką miarą stałości wirowania, około tych dwóch osi skrajnych. Ztąd także wynika że stałość wirowania około osi średniej jest zero.

Gdy ciało ma figurę obrotową, to jest jeśli dwa momenta główne jego bezwładności są równe, na przykład $A = B$, wtedy oś figury $\frac{2}{C}$ jest sama jedna osią stałą; żadna inna oś główna, a niemi są wszystkie średnice równika, nie może mieć stałości. W samej rzeczy, jeśli biegun chwilowy przypada na równiku, a będzie od niego cokolwiek oddalony na prawo albo na lewo, to już nie zostanie nieruchomy jako przedtem, ale opisze na powierzchni ellipsoidy koło prawie równe temu równikowi. Co pokazuje że w takim razie biegun chwilowy I będzie miał w ciele ruch bardzo wielki; gdy przeciwnie jego ruch w przestrzeni będzie bardzo mały, bo herpolodia którą kreśli będzie kołem bardzo małego promienia PI. Tak że oś chwilowa OI opisze w ciele stożek bardzo rozwarty i prawie płaski, a w przestrzeni stożek o podstawie bardzo małej, i będzie się zdawała samoiście nieruchoma.

Uważając że ziemia jest figurą prawie obrotową około małej osi, pojmujemy łatwo dlaczego jej ruch wirowy, który się odbywa około tej osi, jest stały, i tylko ulega bardzo małym oscyllacyom z przyczyny działań zewnętrznych słońca, planet, i. t. p.

Nakoniec, gdy trzy momenta główne bezwładności ciała są równe $A = B = C$, to jest jeśli ellipsoida bezwładności jest sferą, wtedy wszystkie osie są zarówno stałe, i jakoby obojętne na wszelkie przemieszczenia któreby się przypadkowo zdarzyć mogły. Albowiem, jeśli oś chwilowa jest przeniesiona z jednego miejsca na drugie, to w niem pozostaje, jako pierwej,

nieruchoma i w ciele i w przestrzeni; dlatego że polodia i herpolodia są tu tylko jednym punktem.

246. Po tem co poprzedza dobrze będzie wiedzieć pod jakiemi warunkami składowe p, q, r prędkości kątowej ω są stateczne, i kiedy oś chwilowa wirowania zostaje niezmienna w ciele które się obraca około punktu stałego.

Równania *Eulera* dają łatwą odpowiedź na pierwszą część pytania. Jakoż, czyniąc $dp = 0$, $dq = 0$, $dr = 0$, mamy

$$(C - B)qr = L, \qquad (A - C)pr = M, \qquad (B - A)pq = N.$$

Pomnóżmy te równania odpowiednio przez p, q, r, i dodajmy, będzie

$$0 = Lp + Mq + Nr;$$

zkąd, nazywając G dwojan wynikowy sił poruszających, otrzymujemy

$$G\omega \operatorname{dos}(G, OI) = 0.$$

Co wymaga

$$G = 0, \qquad \text{czyli} \qquad L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0.$$

Więc, żeby składowe p, q, r były stateczne, trzeba żeby wynikowa sił poruszających przechodziła przez punkt O obrotu ciała, albo żeby nie było żadnej siły.

Co do drugiej części pytania, żeby oś chwilowa zajmowała miejsce stałe w ciele, oczywiście dostawy $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$, $\frac{r}{\omega}$ powinny być stateczne. W tem założeniu, na mocy równania (5) ω i następnie p, q, r są stateczne; więc, przypuszczając

$L=0, M=0, N=0$, widzimy że równania *Eulera* przywodzą się do

$$(B-C)qr=0,\quad (C-A)pr=0,\quad (A-B)pq=0.$$

Jeśli momenta główne bezwładności A, B, C są nierówne, napisane równania wymagają żeby dwie z trzech ilości p, q, r były zero.

Więc, żeby oś chwilowa zostawała niezmienna w ciele którego momenta główne bezwładności są nierówne, trzeba i dość jest żeby była jedną z osi głównych bezwładności tego ciała.

Ale, jeśli dwa momenta główne bezwładności ciała są równe, na przykład $A=B$, wtedy trzeba tylko żeby było $qr=0$ i $pr=0$; co wymaga $r=0$, albo $p=0$ i $q=0$. W pierwszym przypadku oś chwilowa jest na płaszczyźnie równika którego wszystkie średnice są osiami głównemi; w drugim ta oś miesza się z osią $O\zeta$ figury ciała. Więc w obydwóch przypadkach oś chwilowa jest osią główną bezwładności,

Jeśli $A=B=C$ wtedy, jakośmy już okazali, oś chwilowa jest stała i w ciele i w przestrzeni.

W tych wszystkich przypadkach, zbliżając równania osi chwilowej i osi dwojanu wynikowego

$$\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}=\frac{\zeta}{r}\quad \text{i}\quad \frac{\xi}{Ap}=\frac{\eta}{Bq}=\frac{\zeta}{Cr},$$

widzimy łatwo że obie osie są tylko jedną linią. Co sprawdza twierdzenie dowiedzione w Cynematyce : *Oś chwilowa wirowania stała w ciele jest także stała w przestrzeni.*]

247. *Miejscem położeń osi dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, w ciele, jest stożek drugiego rzędu.*

Jakoż, oś tego dwojanu ma równania

$$\frac{\xi}{Ap} = \frac{\eta}{Bq} = \frac{\zeta}{Cr},$$

a równania (4) i (5) dają

$$\frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{h} = \frac{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}{k^2},$$

Ale p, q, r są proporcyonalne do $\frac{\xi}{A}$, $\frac{\eta}{B}$, $\frac{\zeta}{C}$; więc, rugując p, q, r otrzymujemy równanie

$$(18) \quad \frac{k^2 - Ah}{A}\xi^2 + \frac{k^2 - Bh}{B}\eta^2 + \frac{k^2 - Ch}{C}\zeta^2 = 0,$$

które dowodzi wysłowionego twierdzenia.

Przypadek osobliwy ruchu poprzedzania jednostajnego.

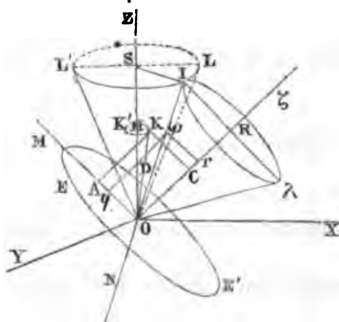
248. Przez podobieństwo do ruchów wirowych ziemi i księżyca, nazywają *wirowaniem właściwem* ciała, jego ruch około osi głównej Oζ; POPRZEDZANIEM (*precessio*), ruch około osi stałej OZ, który sprawia przemieszczenie linii ON zwanej *linią węzłów;* nakoniec KOŁYSANIEM (*nutatio*), ruch około linii węzłów ON, który sprawia zmienność kąta θ dwóch osi OZ i Oζ.

Gdy jeden stożek toczy się na drugim wirowanie właściwe i poprzedzanie mają te same znaki albo znaki przeciwne, według jak stożek ruchomy jest zewnątrz albo wewnątrz stożka stałego.

Widzieliśmy że, gdy niema sił poruszających a ellipsoida bezwładności jest powierzchnią obrotową około osi Oζ, polodia i herpolodia są okręgami kół, i obie podstawami dwóch stożków prostych; wtedy ciało obracające się około punktu stałego ma ruch *jednostajny poprzedzania* bez kołysania. Ten ruch jest

jakoby toczeniem się jednostajnem stożka ruchomego prostego, związanego z ciałem, na stożku także prostym, stałym w przestrzeni.

Istnieje przypadek osobliwy w którym ciało *obrotowe* pod działaniem dwojanu porusza się wedle ustaw naturalnego wirowania bryły zostawionej samej sobie. Aby wiedzieć kiedy ten przypadek zdarzyć się może, dość jest znaleźć jaki powinien być dwojan poruszający G, żeby ruch ciała był taki sam jak gdyby stożek prosty ruchomy toczył się jednostajnie, bez ślizgania, na stożku stałym.



Niech będzie $O\zeta$ oś figury, EOE' równik ellipsoidy bezwładności w punkcie O, i OX, OY, OZ trzy osie stałe spółrzędnych prostokątnych. Ponieważ z założenia ruch ciała około punktu stałego O jest toczeniem się stożka prostego ORI, związanego z ellipsoidą, na stożku prostym OSI stałym w przestrzeni, linia węzłów ON, przecięcie się równika z płaszczyzną XY prostopadłą do osi OZ stożka stałego, będzie miała ruch wirowy jednostajny około punktu O. Linia ON jest oczywiście prostopadła do płaszczyzny trzech osi $O\zeta$, OZ, OI. To ustaliwszy, szukajmy osi dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu. W tym celu rozłóżmy prędkość chwilową wirowania na trzy składowe wedle trzech osi głównych ellipsoidy bezwładności

w punkcie O. Ta ellipsoida jest powierzchnią obrotową; możemy więc wziąć dowolnie za osie główne dwie jakiekolwiek średnice prostokątne jej równika EE'. Obieramy linię węzłów ON i drugą średnicę OM do niej prostopadłą, oznaczamy przez A moment główny bezwładności ciała około ON albo OM, i przez C moment główny bezwładności około Oζ. Składowe q i r, wedle OM i Oζ, prędkości kątowej ω wyrażają się przez linie Oq i Or; trzecia składowa p wedle ON jest zero, bo kąt NOI jest prosty. Zatem, jeśli weźmiemy na OM długość OA $=$ Aq i na Oζ długość OC $=$ Cr, wynikowa OK tych dwóch linij będzie przedstawiała wielkość i kierunek osi dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu. Wykreślenie pokazuje że OK leży na płaszczyznie ZOζ; co naprzód było wiadome (238). Nadto, z założenia wirowanie ω jest stateczne i tworzy ciągle te same kąty z osiami Oζ i OZ dwóch stożków, ruchomego i stałego. Ztąd wynika że długość OK jest stateczna i czyni kąt stateczny z osią stałą OZ. Więc oś OK dwojanu wynikowego opisuje około osi stałej OZ stożek prosty, z prędkością kątową poprzedzania jednostajnego.

Owoż, ta prędkość kątowa poprzedzania, wyrażona przez $\frac{d\psi}{dt}$, jest składową prędkości kątowej ω względem osi stałej OZ, i przedstawia się przez OD; mamy zatem

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{q}{\operatorname{dos}\mathrm{DOM}}=\frac{\omega\operatorname{wst}\alpha}{\operatorname{wst}\theta},$$

gdzie kąt IO $=\alpha$ i kąt ZOζ $=\theta$.

Formuła dowodzi że poprzedzanie jest zawsze tego samego znaku co wirowanie chwilowe.

Wyznaczy się teraz łatwo wielkość i kierunek szukanego dwojanu, wiedząc tylko że prędkość skrajności K osi dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu jest równa osi dwojanu

wynikowego G sił zewnętrznych i do niej równoległa (*). Jakoż, dwojan wynikowy K powinien mieć oś OK stateczną co do wielkości i kierunku, a prędkość skrajności K w ruchu około osi stałej OZ jest normalna do płasczyzny ZOζ, i wyraża się przez KH $\frac{d\psi}{dt}$; trzeba więc, dla ruchu poprzedzania jednostajnego, żeby oś dwojanu poruszającego G była skierowana wedle linii węzłów ON i miała za miarę prędkość linijną KH $\frac{d\psi}{dt}$ punktu K. Zatem

$$G = K \frac{d\psi}{dt} \text{wst} KOZ. \tag{19}$$

Ta formuła może wziąć inną postać. Dość uważać że kąt KOZ = KOM — ZOM; co daje

$$K \text{wst} KOZ = Cr \text{wst}\theta - Aq \text{dos}\theta = \omega(C \text{dos}\alpha \text{wst}\theta - A \text{wst}\alpha \text{dos}\theta);$$

(*) Równania które dają pochodne momentów ilości ruchu mają ważne znaczenie w Dynamice. W samej rzeczy, uważając pierwsze z tych równań użytych w n^rze 233, widzimy łatwo że summa $\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$ jest, na osi stałej OX, rzutem dwojanu K wynikowego momentów ilości ruchu, i wyraża odciętę skrajności K osi OK tego dwojanu. Zatem pochodna $\frac{d}{dt}\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)$ przedstawia składowę prędkości punktu K, równoległą do osi OX. Tak samo dwie inne pochodne przedstawiają dwie składowe prędkości tego punktu, równoległe do osi stałych OY i OZ. Owoż drugie strony równań w mowie będących, wyrażone przez L_1, M_1, N_1, są, na odpowiedających osiach spółrzędnych stałych OX, OY, OZ, rzutami dwojanu G wynikowego sił zewnętrznych:

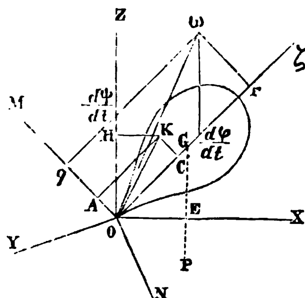
ztąd TWIERDZENIE: *Prędkość skrajności osi dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu jest równa osi dwojanu wynikowego sił zewnętrznych i do niej równoległa.*

więc, podstawiając tę wartość i rugując $d\psi$, będzie

$$G = \omega^2 \text{wst}^2\alpha(C\text{dot}\alpha - A\text{dot}\theta).$$

Wskażemy wkrótce ogólny sposób otrzymania tych samych wyników; ale najpierwej damy zastosowanie.

249. Ruch Frygi. Fryga jest ciałem bryłowem obrotowem które, opierając się na płasczyznie poziomej swoją częścią kończatą, bierze ruch stożkowy około punktu oparcia.



Niech będzie $O\zeta$ oś frygi, O jej punkt oparcia na płasczyznie poziomej XY, i OZ oś pionowa stała. Oś symetryi $O\zeta$ zawiera środek ciężkości G frygi i jest jej osią główną bezwładności; a ponieważ fryga jest bryłą obrotową około $O\zeta$, ellipsoida bezwładności w punkcie O jest powierzchnią obrotową około tej samej osi $O\zeta$, i każde dwie średnice prostokątne jej równika są osiami głównemi bezwładności frygi. Nachylając oś $O\zeta$, wprowadza się w ruch frygę dając jej popęd poziomy, leżący na jednej płasczyznie ze środkiem ciężkości G, ale nie przechodzący przez ten punkt. Środek ciężkości frygi weźmie ruch jako punkt materyalny, któryby miał całą jej massę i do któregoby popęd był przyłożony; będzie więc miał prędkość jednostajną, i fryga zacznie się obracać około swego środka ciężkości jak gdyby on był punktem stałym; a że oś frygi jest osią główną

bezwładności, wirowanie jednostajne zacznie się około tej osi i będzie się ciągle około niej odbywało.

Ruch stożkowy jednostajny frygi, pod warunkiem który zaraz zobaczymy, potwierdza wyłożoną wyżej teoryę. W samej rzeczy, fryga ma ruch właściwy około osi figury $O\zeta$, z prędkością kątową $\frac{d\varphi}{dt}$, i ruch poprzedzania około osi pionowej stałej OZ, z prędkością kątową $\frac{d\psi}{dt}$. Aby znaleźć oś chwilową wirowania, trzeba składać wirowanie $\frac{d\varphi}{dt}$ około osi $O\zeta$ z wirowaniem $\frac{d\psi}{dt}$ około osi OZ. Wynikowa ω będzie, co do wielkości i kierunku, osią wirowania chwilowego; a zaś kierunek $O\omega$ będzie krawędzią zetknięcia dwóch stożków kołowych prostych, z których jeden ruchomy, związany z frygą, toczy się na drugim, stałym w przestrzeni.

W chwili gdy fryga przechodzi płasczyznę ZOX, wyprowadźmy z punktu O normalnę ON do tej płasczyzny, i prostopadłę OM do płasczyzny $NO\zeta$. Wszystkie trzy osie prostokątne ON, OM, $O\zeta$ będą oczywiście osiami głównemi bezwładności frygi. Rozłóżmy teraz wirowanie chwilowe ω wedle dwóch kierunków prostokątnych OM i $O\zeta$; będziemy mieli wirowania składowe $q = Oq$ około osi OM, i $r = Or$ około osi $O\zeta$; jeśli potem utworzymy wieloczyny Aq, Cr, i weźmiemy długości $OA = Aq$, $OC = Cr$, wynikowa OK tych dwóch długości będzie osią dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu. To ustaliwszy, widzimy łatwo że prędkość linijna punktu K wyraża się przez $\frac{d\psi}{dt}$ OK wstKOZ. Owoż, nie zważając na tarcie w punkcie O, jedyną siłą która działa na frygę w ruch wprowadzoną jest jej ciężar P, przyłożony do środka ciężkości G; zatem płasczyzną dwojanu poruszającego G jest płasczyzna $ZO\zeta$, i jego oś jest skierowana wedle linii węzłów ON; a jeśli uczynimy

odległość GO $= a$ i kąt Z0ζ $= \theta$, moment tego dwojanu będzie P$a$wstθ. Więc warunek konieczny i dostateczny poprzedzania jednostajnego w ruchu frygi jest

$$Pa \,\mathrm{wst}\,\theta = \frac{d\psi}{dt} K \,\mathrm{wst}\, KOZ.$$

W rzeczywistości ruch frygi jest cokolwiek odmienny od tego któryśmy okazali; bo część kończata frygi nie jest punktem, i sprawia tarcie na płaszczyźnie poziomej, której oddziaływanie wpływa na ruch zmniejszając jego prędkość; nadto, fryga porusza się w powietrzu, którego opór i tarcie zmieniają ciągle jej ruch, i nakoniec go niszczą.

RUCH BRYŁY OBROTOWEJ OKOŁO PUNKTU STAŁEGO WZIĘTEGO NA JEJ OSI FIGURY.

250. Niech będzie O punkt stały, OX, OY, OZ trzy osie stałe spółrzędnych prostokątnych, i OC oś figury bryły obrotowej. Jakikolwiek jest kształt bryły, jeśli ona ma dwa momenta główne bezwładności równe, A = B, nazwiemy ją ogólnie bryłą obrotową; ale przez to skrócone wyrażenie będziemy rozumieli zawsze taką bryłę w której ellipsoida bezwładności, względna do punktu O, jest powierzchnią obrotową, mającą oś figury OC. Około tej osi moment bezwładności ciała będzie się nazywał C, zaś momenta bezwładności około wszystkich osi poprowadzonych przez punkt O, prostopadle do osi figury, będą miały spólną wartość A; miejscem tych ostatnich osi będzie równik ellipsoidy nazwany *równikiem* ciała. Ślad ON płaszczyzny równika na płaszczyznie XOY jest *linią węzłów*.

Gdybyśmy, za pomocą równań *Eulera*, chcieli rozwiązać obecne zagadnienie ruchu, wprowadzając założenie A = B, niewątpliwie uprościlibyśmy zadanie; ale nie otrzymalibyśmy

łatwego rozwiązania; bo niewiadome które wchodzą do tych równań, nie są naturalnemi niewiadomemi zagadnienia. I w samej rzeczy, nie widać odrazu do czego może służyć znajomość dwóch składowych wirowań chwilowych p i q, około dwóch średnic stałych równika; gdy tymczasem pojmuje się zaraz że niewiadomemi zagadnienia, wynikającemi z samej jego natury, są oczywiście: położenie osi figury w przestrzeni i właściwe wirowanie około tej osi. Położenie osi figury OC jest wyznaczone przez kąt θ tej osi z osią stałą OZ, i przez kąt jaki czyni z osią OX rzut OC′ osi OC na płaszczyznie xy. Wartością kąta XOC′ będzie $\psi - \frac{1}{2}\pi$, jeśli, jako zwykle, nazwiemy ψ kąt XON osi OX z linią węzłów ON.

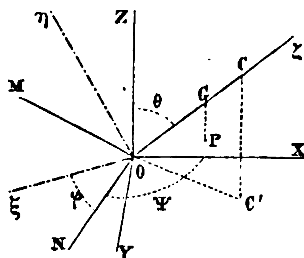
W ruchu ciała bryłowego około punktu stałego O braliśmy za osie ruchome, związane z ciałem, trzy osie główne bezwładności względne do punktu O, a wyznaczone przez kąty θ, φ i ψ któreśmy na swojem miejscu określili. Owoż, ciało którego ruchem teraz się zajmujemy jest obrotowe, jego oś figury OC i dwie jakiekolwiek średnice prostokątne równika są osiami głównemi bezwładności; więc ogólne formuły stosują się do takiego układu trzech osi prostokątnych. Coby nie miało miejsca w ciele nieobrotowem. Korzystając z tej wyłącznej własności ciała obrotowego, w znaczeniu ogólnem tego wyrazu, można wziąć szczególny układ trzech osi prostokątnych, ruchomych zarazem w ciele i w przestrzeni, ale które będą w każdej chwili osiami głównemi bezwładności. Co właśnie uczynił P. Résal (*), i wprowadzeniem tego układu osi ruchomych uprościł przypadek ruchu ciała obrotowego.

Bierzemy więc oś figury OC za oś Oζ, linię węzłów ON za oś Oξ, i nakoniec za oś Oη linię OM, prostopadłą do ON i OC,

---

(*) *Traité de Mécanique générale*, par H. Résal. Paris, 1873 i 1874.

która jest rzutem osi OZ na płaszczyznie równika. Ogólnie linia



węzłów ON jest wyznaczona przez kąt NOX$=\psi$, oś Oξ przez kąt ξON$=\varphi$, oś Oζ przez kąty θ i $\psi-\frac{\pi}{2}$.

Równania ruchu. Można różnemi drogami, mniej więcej ubocznemi, dojść do tych równań ruchu; ale najpiękniej jest wprost je otrzymać następującym sposobem, który znajdujemy w znamienitem dziele Bour'a (*).

Ruch uniesienia osi ON, OM, OC składa się z poprzedzania $\frac{d\psi}{dt}$ którego osią jest OZ, i z kołysania $\frac{d\theta}{dt}$ którego osią jest ON. Ale, ponieważ te osie nie są z ciałem związane, ruch ciała zawiera, prócz dwóch wirowań wymienionych, wirowanie względne około osi figury OC. Oznaczamy to ostatnie wirowanie przez $\frac{d\varphi}{dt}$, nazywając $d\varphi$ kąt jakim się ciało obraca w czasie dt około osi OC.

Aby mieć składowe prostokątne wirowania chwilowego ω,

(*) *Traité de Mécanique et Machines; Dynamique des corps solides* par Edm. Bour. Paris, 1874.

dość jest rozłożyć poprzedzanie $\frac{d\psi}{dt}$ wedle osi OM i OC. Więc składowe wirowanie ω są

$$\text{na} \quad \text{ON}, \quad \frac{d\theta}{dt},$$

$$\text{na} \quad \text{OM}, \quad \frac{d\psi}{dt}\,\text{wst}\theta,$$

$$\text{na} \quad \text{OC} \quad \frac{d\psi}{dt}\,\text{dos}\theta + \frac{d\varphi}{dt}.$$

Trzy proste ON, OM, OC są osiami głównemi bezwładności w punkcie O; będziemy więc mieli na tych trzech liniach rzuty osi OK dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, mnożąc rzuty prędkości kątowej ω przez odpowiedające momenta bezwładności; co daje

$$K_\xi = A\,\frac{d\theta}{dt},$$

$$K_\eta = A\,\frac{d\psi}{dt}\,\text{wst}\theta,$$

$$K_\zeta = C\left(\frac{d\psi}{dt}\,\text{dos}\theta + \frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Te rzuty są spółrzędnemi skrajności K osi OK dwojanu.

Teraz, aby otrzymać równania ruchu sposobem *eleganckim* i *dogodnym*, jako mówi Bour, zrzutujemy na trzech osiach ON, OM, OC prędkość samoistą punktu K mającego spółrzędne K_ξ, K_η, K_ζ, i zrównamy te trzy rzuty ze składowemi $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, N dwojanu wynikowego sił zewnętrznych, wziętemi wedle tych samych osi.

Owoż, składowe prędkości względnej punktu K są

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad A\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta\right),\quad C\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta+\frac{d\varphi}{dt}\right).$$

Z drugiej strony, uważając za ilości stałe spółrzędne K_ξ, K_η, K_ζ punktu K jakoby związanego z osiami ruchomemi, na mocy wirowania w uniesieniu tych osi, którego składowe są

$$\frac{d\theta}{dt},\qquad \frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta,\qquad \frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta,$$

mamy prędkości uniesienia

$$v_\xi=\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta.K_\zeta-\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta.K_\eta,$$

$$v_\eta=\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta.K_\xi-\frac{d\theta}{dt}.K_\zeta,$$

$$v_\zeta=\frac{d\theta}{dt}K_\eta-\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta.K_\xi,$$

w których za K_ξ, K_η, K_ζ trzeba podstawić ich wartości.

Więc, stosując twierdzenie : *prędkość samoista jest równa summie prędkości względnej i prędkości uniesienia,* otrzymujemy szukane równania ruchu

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}+(C-A)\frac{d\psi^2}{dt^2}\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta+C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta=\mathcal{L}$$

$$(20)\qquad A\frac{d^2\psi}{dt^2}\operatorname{wst}\theta+\left\{(2A-C)\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta-C\frac{d\varphi}{dt}\right\}\frac{d\theta}{dt}=\mathfrak{M}$$

$$C\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta+\frac{d\varphi}{dt}\right)=N,$$

gdzie $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, N oznaczają summy momentów sił zewnętrznych około osi ruchomych ON, OM, OC.

251. Przypadek osobliwy ruchu poprzedzania jednostajnego. W tym osobliwym przypadku, oś figury ciała ma ruch poprzedzania jednostajny, bez kołysania, około linii prostej stałej z którą tworzy kąt stateczny θ, podczas gdy samo ciało obraca się jednostajnie na swojej osi figury. Szukajmy więc jaka powinna być wielkość i jaki kierunek dwojanu poruszającego G żeby, biorąc linię prostą stałą za oś OZ, było

$$\frac{d\theta}{dt}=0, \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2}=0, \qquad \frac{d\varphi}{dt}=stat.$$

Z przyczyny tych założeń, równania (20) stają się

$$(C-A)\frac{d\psi^2}{dt^2}\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta+C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta=\mathfrak{L}$$

$$0=\mathfrak{M},$$

$$0=N.$$

Dwa ostatnie równania pokazują że oś dwojanu poruszającego G powinna mieć kierunek linii węzłów ON, co już wiemy; a pierwsze wyznacza wielkość tego dwojanu.

Wartość $\mathfrak{L}$ jest ta sama, chociaż pod różnym kształtem, co wartość G dana przez formułę (19). Jakoż, możemy pisać

$$\mathfrak{L}=C\left(\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta+\frac{d\varphi}{dt}\right)\operatorname{wst}\theta.\frac{d\psi}{dt}-A\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta\operatorname{dos}\theta.\frac{d\psi}{dt};$$

a ponieważ $\frac{d\psi}{dt}\operatorname{dos}\theta+\frac{d\varphi}{dt}=r$ i $\frac{d\psi}{dt}\operatorname{wst}\theta=q$, będzie

$$\mathfrak{L}=(Cr\operatorname{wst}\theta-Aq\operatorname{dos}\theta)\frac{d\psi}{dt};$$

więc

$$\mathcal{L} = K \frac{d\psi}{dt} \text{wst} KOZ = G.$$

252. Jako zastosowanie równań (20), uważajmy RUCH BRYŁY OBROTOWEJ CIĘŻKIEJ; i niech będzie (*ostatnia fig.*) P ciężar tej bryły, G środek ciężkości leżący na osi figury OC, w odległości $GO = a$ od punktu stałego O.

Moment ciężaru P względem linii węzłów ON jest oczywiście $Pa \text{wst}\theta$; mamy więc

$$\mathcal{L} = Pa \text{wst}\theta, \qquad \mathfrak{M} = 0, \qquad N = 0.$$

Zatem równania (20) stają się

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left\{ (C - A) \frac{d\psi}{dt} \text{dos}\theta + C \frac{d\varphi}{dt} \right\} \frac{d\psi}{dt} \text{wst}\theta = Pa \text{wst}\theta,$$

$$(21) \quad A \frac{d^2\psi}{dt^2} \text{wst}\theta + \left\{ (2A - C) \frac{d\psi}{dt} \text{dos}\theta - C \frac{d\varphi}{dt^2} \right\} \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

$$\frac{d.}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt} \text{dos}\theta + \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0.$$

Ostatnie równanie (21) daje

$$(a) \qquad \frac{d\psi}{dt} \text{dos}\theta + \frac{d\varphi}{dt} = \textit{stał.} = n.$$

Owoż, ciężar P, przyłożony do środka ciężkości G, nie modyfikuje w niczem wirowania właściwego $\frac{d\varphi}{dt}$ bryły, na jej osi figury OC która przez punkt G przechodzi; to więc wirowanie,

niepoddane żadnej sile, zostaje stateczne. Ale ciężar P wpływa na kąt θ; i temsamem na kołysanie $\frac{d\theta}{dt}$; a ponieważ na mocy równania (*a*) wieloczyn $\frac{d\psi}{dt}$ dos θ jest stateczny, ztąd wnosimy że kąt θ zbliża się do kąta prostego w miarę jak rośnie prędkość kątowa $\frac{d\psi}{dt}$ ruchu poprzedzania. Jeśli przeciwnie, prędkość poprzedzania $\frac{d\psi}{dt}$ maleje, z przyczyny różnych oporów wpływających na ruch ciała, to kąt θ maleje także i oś figury OC podnosi się aż do położenia pionowego. Co się właśnie spostrzega w ruchu frygi która, rzucona pochyło na ziemię z wielką prędkością wirowania właściwego $\frac{d\varphi}{dt}$, niebawem staje pionowo w położeniu równowagi stałej.

Przypuszczając że wirowanie właściwe $\frac{d\varphi}{dt}$ jest stateczne, wtenczas na mocy drugiego równania (21), gdy prędkość poprzedzania $\frac{d\psi}{dt}$ może być stateczna, będzie $\frac{d\theta}{dt} = 0$; i nawzajem, gdy niema kołysania, ruch poprzedzania może być jednostajny; ale, w obydwóch przypadkach, pod niezbędnym warunkiem żeby pierwszemu równaniu (21) stało się zadość, to jest trzeba koniecznie żeby było

$$(b) \qquad \left(Cn - A\frac{d\psi}{dt}\,\text{dos}\,\theta\right)\frac{d\psi}{dt}\,\text{wst}\,\theta = Pa\,\text{wst}\,\theta,$$

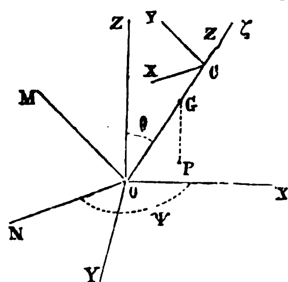
albo, wedle tego co w poprzedzającym numerze powiedziano,

$$G = Pa\,\text{wst}\,\theta.$$

Znajdujemy więc, już wiadomy innym sposobem, warunek konieczny i dostateczny ruchu jednostajnego frygi. Równania (*a*) i (*b*) ten ruch określają.

RUCH BRYŁY OBROTOWEJ CIĘŻKIEJ POD DZIAŁANIEM SIŁY PRZYŁOŻONEJ DO JEDNEGO Z PUNKTÓW OSI FIGURY.

253. Biorąc, jako wyżej, trzy osie prostokątne ON, OM, OC za osie ruchome spółrzędnych, przypuśćmy że, oprócz ciężaru P



bryły, działa na oś figury, w jej punkcie C mającym odległość $CO = l$, siła zewnętrzna której składowe, równoległe do osi ruchomych, są X, Y, Z. Składowa Z nie wpływa na ruch bryły, i wywiera tylko parcie na punkt stały O osi obrotu OC; zostawimy ją na boku, i zajmiemy się samemi składowemi X, Y, które z ciężarem P będą figurowały w równaniach ruchu. Owoż, momenta trzech sił zewnętrznych X, Y, P, około osi ruchomych, są

około osi ON $\quad \mathfrak{L} = Pa \sin\theta - Yl,$

około osi OM $\quad \mathfrak{M} = Xl,$

około osi OC $\quad N = 0;$

więc, podstawiając te wartości w ogólnych formułach (20),

mamy równania

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2}-(A-C)\frac{d\psi^2}{dt^2}\,\mathrm{wst}\,\theta\,\mathrm{dos}\,\theta+C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt}\,\mathrm{wst}\,\theta=Pa\,\mathrm{wst}\,\theta-Yl,$$

$$(22)\quad A\frac{d^2\psi}{dt^2}\,\mathrm{wst}\,\theta+\left\{(2A-C)\frac{d\psi}{dt}\,\mathrm{dos}\,\theta-C\frac{d\varphi}{dt}\right\}\frac{d\theta}{dt}=Xl,$$

$$\frac{d\psi}{dt}\,\mathrm{dos}\,\theta+\frac{d\varphi}{dt}=n,$$

za pomocą których można wiedzieć jakie siły normalne X i Y trzeba przyłożyć do osi figury w punkcie C, aby nadać tej osi ruch stożkowy wyznaczony. Można więc, zmuszając oś figury do pewnego ruchu, wyrachować ztąd wynikające oddziaływania — X, i — Y na ciała które ten ruch sprawiają.

Dwa pierwsze równania (22) pokazują że oddziaływania, wywarte w punkcie C osi obrotu, są tem większe im wirowanie właściwe $\frac{d\varphi}{dt}$ jest bystrzejsze. W doświadczeniach dają zwykle wielką wartość wirowaniu $\frac{d\varphi}{dt}$; dlatego też wyrazy zawierające to wirowanie grają przeważną rolę w równaniach ruchu, i one właśnie wyznaczają główną część zjawiska ruchu które doświadczeniem sprawdzić chcemy.

254. Rozbierzemy teraz dwa szczególniej ważne przypadki ruchu którym się zajmujemy.

1° Ruch poprzedzania bez kołysania. Jeśli zmusimy oś figury OC do opisywania stożka kołowego pod kątem θ około osi OZ, z prędkością stateczną $\frac{d\psi}{dt}$, czyli innemi słowy, jeśli w formułach (22) uczynimy

$$\frac{d\theta}{dt}=0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=0,$$

otrzymamy dwa równania

$$Yl = -C\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\,wst\,\theta + (A - C)\,\frac{d\psi^2}{dt^2}\,wst\theta\,\mathrm{dos}\theta + Pa\,\mathrm{wst}\theta,$$

$$Xl = A\,\frac{d^2\psi}{dt^2}\,\mathrm{wst}\theta,$$

które wyznaczą składowe X i Y.

Przypuszczając że dano ciału wielką prędkość $\frac{d\varphi}{dt}$ wirowania na jego osi figury OC, podczas gdy mu udzielono powolny ruch poprzedzania $\frac{d\psi}{dt}$ około osi OZ, widzimy łatwo że wyraz $-C\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt}\,wst\theta$, proporcyonalny do $\frac{d\varphi}{dt}$, będzie miał wartość samoistą o wiele większą od summy dwóch po nim idących wyrazów. Zatem, w ruchu poprzedzania osi figury OC, siła Y, leżąca na płaszczyznie COZ i normalna do drogi przebieżonej przez punkt C, jest bardzo wielka, bo prawie proporcyonalna do prędkości kątowej $\frac{d\varphi}{dt}$; a ponieważ, w założeniu $\frac{d\psi}{dt}\,\frac{d\varphi}{dt} > 0$, siła Y jest odjemna, oddziaływanie —Y jest dodatne i usiłuje z wielką mocą podnieść punkt oparcia C. Co do oddziaływania —X; ono jest wprost przeciwne ruchowi poprzedzania, ale względnie bardzo słabe i bynajmniej niezależne od wirowania $\frac{d\varphi}{dt}$.

Więc, żeby zmusić oś figury OC do opisywania stożka obrotowego około osi OZ, trzeba wywrzeć na tę oś OC parcie prawie normalne do drogi którą punkt C ma przebiegać; to jest jednem słowem, trzeba ciężyć na oś obrotu OC zamiast ją ciągnąć w stronę przemieszczenia jakie sprawić chcemy.

2° Ruch kołysania bez poprzedzania. Jeśli w formułach (22) uczynimy

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0,$$

otrzymamy, do wyznaczenia sił X i Y, dwa równania

$$Yl = -A\frac{d^2\theta}{dt^2} + Pa\sin\theta$$

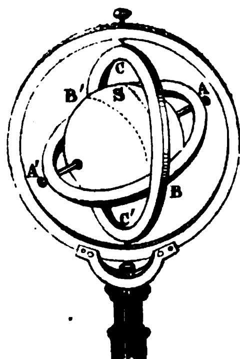
$$Xl = -C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}.$$

Siła X, normalna do przemieszczenia osi OC, ma wartość liczebną bardzo wielką, proporcyonalną do $\frac{d\varphi}{dt}$; gdy tymczasem siła Y, działająca w stronę ruchu osi OC, ma wartość zupełnie taką samą jak gdyby wirowanie właściwe $\frac{d\varphi}{dt}$ nie istniało. Więc, w tym przypadku jako w poprzedzającym, wysilenie potrzebne do przemieszczenia osi OC na płaszczyźnie COZ jest *prawie* normalne do tej płaszczyzny. Oddziaływanie $-X$ jest dodatne albo odjemne, to jest skierowane w stronę ON albo w stronę przeciwną, według jak prędkości kątowe $\frac{d\varphi}{dt}$ i $\frac{d\theta}{dt}$ są obie tych samych znaków albo znaków przeciwnych.

3° Jeśli jest zarazem $\frac{d\psi}{dt} = 0$ i $\frac{d\theta}{dt} = 0$, wtedy oś figury OC zachowuje położenie stateczne w przestrzeni. Co być powinno; wirowanie właściwe nie zmienia punktów oparcia tej linii, bo ona jest osią główną bezwładności, i ciężar P rozdziela się między dwa czopy O i C wedle prawideł Statyki.

255. Chociaż na pierwsze spojrzenie te zadziwiające ustawy ruchu mogą się zdawać paradoksalne, doświadczenie sprawdza je z niezaprzeczalną pewnością. Ku temu służy najlepiej przy-

rząd *Bohnenberger'a*. Jest to sfera massowa S której oś AA',



zawieszona sposobem *Kardana* (*), używanym do zawieszania chronometrów i bussoli na okrętach, może brać wszystkie orientacye w przestrzeni. Stykając sferę S z kołem wprowadzonem w ruch przez pociąg kół zębatych, nadaje się jej wielką prędkość $\frac{d\varphi}{dt}$ wirowania właściwego na osi AA'; po odsunięciu koła poruszającego, sfera zachowuje prędkość nabytą. Wtedy, chcąc zmienić orientacyę osi AA', zdawałoby się że dość będzie obrócić osadę kołową BCB' około średnicy pionowej CC', w jedną albo w drugą stronę, aby sprawić ruch osi AA' w tym kierunku. Jednakże ta osada, mimo silnego parcia, zostaje na miejscu jak gdyby do niego była stale przytwierdzona; i doznajemy od niej oporu który naturalnie za przeciwny probowa-

(*) Dwa okręgi spółśrodkowe massowe BCB'C', ABA'B', z których jeden jest ruchomy około swojej średnicy pionowej CC', a drugi ruchomy około średnicy poziomej BB' pierwszego, stanowią tak zwany układ Kardana. Tym sposobem zawieszone narzędzie, na przykład barometr, mając wolność oscyllowania na wszystkie strony, może zostawać w położeniu pionowem mimo różnych oscyllacyj okrętu.

nemu ruchowi uważamy. A jedynym wynikiem naszego wysilenia jest zmiana kąta θ jaki oś AA′ czyni z pionową CC′. W istocie mniemany opór jest prawie żaden; ale istnieje rzeczywisty bardzo silny opór który, rzecz ciekawa, jest prawie normalny do kierunku ruchu jaki uskutecznić zamierzaliśmy. Wywierając parcie pionowe na oś AA′, w jednej z dwóch jej skrajności, przezwyciężamy ten opór; albowiem oś AA′ bierze właśnie ruch w kierunku prostopadłym do przyłożonego parcia. Owoż, jeśli za pomocą kołeczka, wsadzonego w dwie zarazem dziurki wydrążone w osadach kołowych ABA′ i BCB′, zniszczymy ruch kołysania osi AA′, natychmiast znika opór o którym mowa, i lekki popęd nadany osadzie ABA′ sprawia jej obrót z osią AA′ około pionowej CC′. Przyprowadziwszy tym sposobem osadę BCB′ na pewne położenie, jeśli wyjmiemy kołeczek, przyrząd zostaje nieruchomy, i osada BCB′ zdaje się ustalona w nowem położeniu tak silnie jak była w pierwszem. To doświadczenie jest niewątpliwym dowodem prawdziwości wyłożonej teoryi ruchu poprzedzania i kołysania.

256. Możemy teraz uzupełnić to cośmy o działaniu dwojanu powiedzieli w n^rze 215.

Giroskop. Niech będzie krąg massowy K wirujący na swojej osi symetryi Oζ, którą przypuszczamy prawie poziomą. Jedna skrajność tej osi opiera się w punkcie stałym O, z tarciem najmniéjszem możebnem; a druga jest w panwi C, zawieszonej

na nici CD w punkcie niezmiennym D. Tężność nici która można zmierzyć za pomocą szali, zostaje zupełnie taka sama jak gdyby wirowanie $\frac{d\varphi}{dt}$ nie istniało; a podczas wirowania nić nie ma żadnego zboczenia poziomego. Ten przyrząd nazywa się *giroskopem*.

Gdy kręgowi K nadano ruch wirowy z prędkością przyzwoitą, niszczy się raptem punkt oparcia C paląc nić CD, albo puszczając nagle skrajność osi $O\zeta$ jeśli była trzymana w ręku. Wtedy, w pierwszej chwili ta skrajność, nie będąc podtrzymywana, spada naturalnie; ale tak mało że oś $O\zeta$ zniża się ilością prawie niedostrzegalną; poczem natychmiast giroskop bierze ruch poprzedzania, na mocy którego oś $O\zeta$ przebiega płaszczyznę pionową, z prędkością kątową stateczną $\frac{d\psi}{dt}$ około punktu O.

Aby się o tem wszystkiem przekonać, dość jest w równaniach (22) uczynić

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad \frac{d\psi}{dt} = 0, \qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0;$$

co daje

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} = Pa \operatorname{wst} \theta,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = n.$$

Pierwsze równanie dowodzi że, w samej chwili zniszczenia punktu oparcia C, oś $O\zeta$ nie bierze przyspieszenia poziomego tylko małe przyspieszenie pionowe. Ale zaraz, z przyczyny ciężaru P i punktu stałego O, powstaje dwojan mający moment $Pa \operatorname{wst} \theta$; i on sprawia, w czasie dt, nieskończenie małe wiro-

wanie około osi głównej ON, która jest średnicą sprzężoną jego płaszczyzny w ellipsoidzie bezwładności względnej do punktu O. To wirowanie składa się z wirowaniem właściwem $\frac{d\varphi}{dt}$ w jedno wirowanie wynikowe, skutkiem którego, w założeniu $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, oś $O\zeta$ bierze położenié nieskończenie sąsiednie na końcu czasu dt, idąc w stronę wskazaną przez strzałę. Tym sposobem zaczyna się i kontynuje ruch poprzedzania osi $O\zeta$, który będzie jednostajny jeśli, jako już wiadomo, staje się zadość równaniu

$$(C - A)\frac{d\psi^2}{dt^2}\cos\theta + C\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\psi}{dt} = Pa.$$

Ale, przy zaczęciu ruchu poprzedzania jednostajnego, będzie zawsze-małe kołysanie, które powróci po pewnym przeciągu czasu, gdy różne tarcia i opór powietrza zmniejszą prędkość $\frac{d\varphi}{dt}$ wirowania właściwego. Wtedy prędkość $\frac{d\psi}{dt}$ poprzedzania zwiększy się, na mocy trzeciego równania (22).

257. Przypuśćmy że w chwili zniszczenia punktu C, zamiast opuszczać oś $O\zeta$ dano jej pewną prędkość kątową poziomą $\frac{d\psi}{dt}$; i szukajmy jaka powinna być ta prędkość żeby ruch poprzedzenia zostawał jednostajny, z temsamem nachyleniem osi $O\zeta$ na pionowę OZ, i z wirowaniem właściwem statecznem m.

W równaniach (22) uczyńmy

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = m;$$

otrzymamy równanie

$$(A - C)\frac{d\psi^2}{dt^2}\cos\theta - Cm\frac{d\psi}{dt} + Pa = 0,$$

z którego wynikają dla $\frac{d\psi}{dt}$ dwie wartości

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{Cm\pm\sqrt{C^2m^2-4(A-C)Pa\cos\theta}}{2(A-C)\cos\theta}.$$

Otóż, dlatego że m jest bardzo wielkie, wartości dla $\frac{d\psi}{dt}$ są zawsze rzeczywiste, i można, wyprowadzając czynnik C^2m^2 za pierwiastnik, rozwinąć wartość $\left(1-\frac{4(A-C)Pa\cos\theta}{C^2m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ wedle ustawy dwumianu *Newtona*. Jeśli więc zaniedbamy wyrazy zawierające $\frac{1}{m^4}$, będzie

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{Cm}{2(A-C)\cos\theta}\left\{1\pm\left(1-\frac{2(A-C)Pa\cos\theta}{C^2m^2}-\frac{2(A-C)P^2a^2\cos^2\theta}{C^4m^4}-\ldots\right)\right\}.$$

Zatem, oznaczając przez $\frac{d\psi_1}{dt}$ i $\frac{d\psi_2}{dt}$ szukane wartości, mamy

$$\frac{d\psi_1}{dt}=\frac{Pa}{Cm}+\frac{(A-C)P^2a^2\cos\theta}{C^3m^3}+\ldots$$

$$\frac{d\psi_2}{dt}=\frac{Cm}{(A-C)\cos\theta}-\frac{Pa}{Cm}-\ldots$$

Pierwsza wartość $\frac{d\psi_1}{dt}$ jest bardzo mała, i prawie niezależna od kąta θ, dlatego że mianownik Cm jest bardzo wielki w porównaniu z licznikiem Pa, a drugi wyraz $\frac{(A-C)P^2a^2\cos\theta}{C^3m^3}$ może być zaniedbany z przyczyny wielkości mianownika C^3m^3. Ta wartość jest nawet ściśle równa ułamkowi $\frac{Pa}{Cm}$ gdy $\theta=\frac{\pi}{2}$. Wtédy oś $O\zeta$ opisuje płaszczyznę poziomą.

Druga wartość $\frac{d\psi_2}{dt}$, zmienna z kątem θ, jest bardzo wielka bo prawie proporcyonalna do m. Ta wartość staje się nieskończenie wielką gdy $\theta = \frac{\pi}{2}$. Więc, jeśli osi $O\zeta$ dano prędkość kątową poziomą, wyrażoną przez $\frac{d\psi_2}{dt}$, giroskop będzie miał ruch poprzedzania jednostajny, ale jego oś nie będzie nigdy mogła opisywać płasczyzny poziomej.

W doświadczeniach otrzymuje się zwykle pierwszą wartość $\frac{d\psi_1}{dt}$ prędkości poprzedzania; ta wartość jest prawie proporcyonalna do wieloczynu Pa, i to tłumaczy dlaczego można ją powiększyć cięższąc na skrajność C osi $O\zeta$. Wtedy albowiem do momentu Pa dodaje się moment parcia wywartego normalnie na oś $O\zeta$; co jakoby powiększa ciężar P.

Nakoniec, widzimy dobrze dlaczego prędkość $\frac{d\psi}{dt}$ poprzedzania rośnie bardzo szybko, gdy prędkość m wirowania właściwego maleje.

Uwaga. Foucault, wynalazca giroskopu którego ruch treściwie tylko wyłożyliśmy, wymyślił drugi, znakomity giroskop, i za jego pomocą wydatnie udowodnił ruch wirowy ziemi. Jest jeszcze ciekawy przyrząd zwany *szalą giroskopową*. Są i inne. Wszystkie opierają się na własnościach ruchu któregośmy rozwinęli ogólne zasady. W szczegóły wchodzić nie możemy, bo one przechodzą zakres naszego dzieła.

258. Poprzedzanie punktów równonocnych (*) przemieszcza o blisko 50″ rocznie, w stronę przeciwną pozornego ruchu słońca, linię przecięcia równika ziemskiego z ekliptyką. Ten

(*) Zwane także *cofaniem się* tych punktów.

ruch, kombinując się z wirowaniem właściwem ziemi, daje oś wirowania chwilowego. Co dowodzi że oś chwilowa wirowania globu ziemskiego nie ma w nim stałego położenia. Rzeczywisty ruch ziemi, jako już wiemy, jest toczeniem się stożka obrotowego, ściśle z nią związanego, wewnątrz stożka obrotowego stałego w przestrzeni którego oś jest prostopadła do ekliptyki. Stożek ruchomy jest bardzo mało rozwarty, a połowa kąta stożka stałego równa się nachyleniu ekliptyki na równik. Stosując wyłożoną teoryę, łatwo pojmujemy że poprzedzanie jednostajne ziemi pochodzi z działania dwojanu mającego oś w kierunku linii węzłów. Ciężenie powszechne usprawiedliwia istnienie takiego dwojanu. Gdyby ziemia była doskonałą sferą, wynikowa działań słońca na wszystkie jej punkta materyalne przechodziłaby ciągle przez jej środek ciężkości; i ta siła nie sprawiałaby ruchu wirowego ziemi około osi przez ten punkt poprowadzonej. Ale ziemia ma kształt ellipsoidy obrotowej, cokolwiek spłasczonej przy biegunach i trochę wzdętej przy równiku. Ztąd małe zboczenie wynikowej działań słońca. Ta więc wynikowa, przeniesiona do środka ciężkości ziemi, daje dwojan który sprawia poprzedzanie. Ale moment tego dwojanu jest bardzo mały, i dlatego poprzedzanie zaledwie 50″ rocznie wynosi.

Ciążenie powszechne tłumaczy także *kołysanie* osi ziemskiej przypisując je działaniu księżyca. Ale to wszystko należy już do Mechaniki niebieskiej.

ROZDZIAŁ VI.

RUCH CIAŁA BRYŁOWEGO WOLNEGO W PRZESTRZENI.

259. Za pomocą zasady *d'Alemberta* można zaraz otrzymać równania różniczkowe ruchu ciała bryłowego niezmiennego, wolnego w przestrzeni; dość tylko wyrazić że siły zewnętrzne, wprost przyłożone do różnych punktów ciała, i siły bezwładności wszystkich punktów materyalnych, zadość czynią sześciu równaniom równowagi ciał bryłowych niezmiennych. Owoż, odnosząc ruch ciała do trzech osi spółrzędnych prostokątnych OX, OY, OZ, stałych w przestrzeni, nazwijmy X, Y, Z składowe wynikowej sił zewnętrznych, przyłożonych do jednego z punktów materyalnych ciała; a jeśli oznaczymy massę tego punktu przez m i spółrzędne przez x, y, z, składowe jego siły bezwładności będą

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad -m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Więc, wyrażając że wszystkie siły, tak rzeczywiste jak siły bezwładności, zadość czynią równaniom równowagi ciał bryłowych niezmiennych, znajdziemy sześć następująceych równań

$$\sum m\frac{d^2x}{dt^2}=\sum X,$$

$$\sum m\frac{d^2y}{dt^2}=\sum Y,$$

$$\sum m\frac{d^2z}{dt^2}=\sum Y,$$

$$\sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=\sum(Zy-Yz),$$

$$\sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=\sum(Xz-Zx),$$

$$\sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=\sum(Yx-Xy),$$

które są równaniami różniczkowemi ruchu ciała bryłowego niezmiennego, zupełnie wolnego w przestrzeni.

Znaki $\sum$ w pierwszych stronach wskazują summy rozciągające się do wszystkich punktów materyalnych z których ciało jest utworzone, a te same znaki w drugich stronach wyrażają summy rozciągające się do wszystkich sił zewnętrznych, wprost przyłożonych do różnych punktów materyalnych tego ciała.

Powyższe równania pokazują ważną własność. Gdy ciało bryłowe niezmienne jest w równowadze pod działaniem sił jakichkolwiek, można, jako wiemy, zastąpić układ sił przyłożonych przez *układ równoważny*. Otóż, z kształtu tych równań, i z warunków równowartości (*Tom* I, 329), wnosimy że układ sił, przyłożonych do ciała bryłowego niezmiennego w ruchu, może być zastąpiony przez inny układ sił równowarty pierwszemu, bez najmniejszej zmiany istniejącego ruchu. Zatem, dwa układy równowarte sił działających w równowadze ciała bryłowego niezmiennego, są także układami równowartemi sił działających w jego ruchu.

260. Równania różniczkowe w liczbie sześć, któreśmy dopiero co otrzymali, są dostateczne do zupełnego wyznaczenia ruchu ciała bryłowego, ale niedogodne z przyczyny wielości niewiadomych. I w samej rzeczy, te równania zawierają spółrzędne x, y, z wszystkich punktów materyalnych ciała bryłowego; żeby

więc można było wyznaczyć wszystkie niewiadome zadanego zagadnienia, trzebaby, do sześciu powyższych równań różniczkowych, dołączyć równania wyrażające że odległości punktów materyalnych są między sobą niezmienne i wiadome. Te zaś równania bryłowości ciała, w liczbie $3n - 6$ w której n znaczy ilość punktów materyalnych, wyznaczyłyby $3n - 6$ spółrzędnych w funkcyi sześciu spółrzędnych pozostałych, któreby były niewiadomemi zagadnienia. Wtedy równania różniczkowe zcałkowane dałyby wartości tych ostatnich w funkcyi czasu t. Ale możemy innym sposobem dojść wprost do równań różniczkowych które zawierają tylko sześć niewiadomych.

Jakoż, wiemy że w ruchu ciała bryłowego w przestrzeni środek ciężkości porusza się jako punkt materyalny, któryby miał massę równą całej massie ciała a do któregoby przyłożono wszystkie siły zewnętrzne działające na ciało, a przeniesione równolegle do siebie samych. Znając ruch środka ciężkości, zostaje nam do znalezienia ruch samego ciała około tego środka.

Aby rozwiązać zagadnienie ruchu względnego którego teraz szukamy, prowadzimy przez środek ciężkości G ciała trzy osie $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ ruchome z ciałem, ale ciągle równoległe do trzech osi spółrzędnych prostokątnych OX, OY, OZ stałych w przestrzeni. Ruch względny ciała będzie oczywiście wirowaniem około środka ciężkości G, uważanego za punkt stały, pod działaniem sił rzeczywiście przyłożonych i sił pozornych; ostatnie wprowadzone dlatego żeby można brać ruch względny za ruch samoisty. Owoż, osie zmienne mają, w naszem założeniu, ruch przeniesienia; więc siły odśrodkowe składane są zero, i siły pozorne (zmyślone) przywodzą się do samych sił bezwładności ruchu uniesienia (*Tom* I, 285); a ponieważ te ostatnie są wszystkie równoległe i proporcyonalne do mass punktów, ich wynikowa, równa ich summie, przechodzi przez środek ciężkości ciała bryłowego. Ztąd wynika że summa momentów sił pozornych, względem wszelkiej osi poprowadzonej przez środek cięż-

kości G, jest zero; zatem ruch względny ciała bryłowego około jego środka ciężkości pochodzi jedynie z działania sił rzeczywistych, i nie różni się od ruchu jakiby wzięło ciało pod działaniem tych samych sił, gdyby środek ciężkości był istotnie punktem stałym.

Więc *ciało bryłowe, wolne w przestrzeni, obraca się około swojego środka ciężkości tak jak gdyby ten punkt był stały.*

To pokazuje że ogólne zagadnienie ruchu ciała bryłowego w przestrzeni rozdziela się na dwa już wiadome zagadnienia: ruch środka ciężkości, i ruch ciała około tego środka uważanego za punkt stały. Ale nie zawsze można rozwiązać niezależnie jedno od drugiego te dwa zagadnienia. Ruch początkowy ciała jest całkiem wiadomy, to prawda; czem się on stanie potem? to właśnie pytanie. Owoż, siły zewnętrzne, działające na różne punkta materyalne ciała, zależą ogólnie od ich położenia a temsamem od ruchu wirowego; nie można więc wyrachować osobno ruchu środka ciężkości ciała pod działaniem sił zewnętrznych, tylko wtedy kiedy te siły poruszające mają kierunki i natężenia stateczne; albo ogólniej, kiedy siły zewnętrzne mają wynikowę jedyną, przechodzącą przez środek ciężkości ciała i działającą wedle wiadomej ustawy.

Gdy ciało bryłowe, poruszające się w przestrzeni, nie jest poddane żadnej sile zewnętrznej, jego środek ciężkości ma ruch prostolinijny i jednostajny, a samo ciało obraca się około tego punktu wedle twierdzenia *Poinsot'a,* to jest tak że ellipsoida środkowa bezwładności toczy się na płaszczyznie stałej w przestrzeni.

Jeśli siły zewnętrzne przywodzą się do samej ciężkości, to mają wynikowę jedyną, która jest równa ciężarowi ciała i przechodzi przez środek ciężkości. Moment tej wynikowej względem każdej osi, poprowadzonej przez środek ciężkości, jest zero; więc wtedy także twierdzenie *Poinsot'a* ma miejsce.

261. Znamy już równania ruchu ciała bryłowego około punktu stałego, wziętego za początek trzech osi spółrzędnych prostokątnych, ruchomych z ciałem i ściśle z niem połączonych, albo tylko ruchomych z tem ciałem ale do niego stale nieprzywiązanych. Moglibyśmy więc na tem poprzestać, i zastosować rzeczone równania do ruchu wirowego jaki ciało bierze około swojego środka ciężkości, uważanego za punkt stały. Wolimy jednak szukać wprost równań tego ruchu, odniesionego do trzech osi ruchomych ze środkiem ciężkości ale ciągle równoległych do trzech osi prostokątnych stałych w przestrzeni.

Prowadzimy tedy przez środek ciężkości G ciała trzy osie prostokątne $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, ruchome z ciałem i ciągle równoległe do trzech osi spółrzędnych prostokątnych OX, OY, OZ stałych. Przypuszczając że obrane osie spółrzędnych mają kierunki trzech osi głównych bezwładności ciała na początku ruchu, nazywamy A, B, C trzy momenta główne bezwładności względem tych osi, i oznaczamy przez p, q, r składowe prędkości wirowania równoległe do tych samych osi.

Teraz uważamy że składowe dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu, odniesione do osi ruchomych określonych jakośmy powiedzieli, wyrażają się przy zaczęciu ruchu przez

$$Ap, \qquad Bq, \qquad Cr.$$

Te więc składowe są, na początku czasu dt, spółrzędnemi skrajności K osi GK dwojanu wynikowego momentów ilości ruchu; zatem, wedle już użytej notacyi, mamy

$$K_\xi = Ap, \qquad K_\eta = Bq, \qquad K_\zeta = Cr.$$

Owoż, w tym przypadku osi ruchomych tak jako w poprzedzających, składowe prędkości punktu K w jego ruchu unie-

sienia wyrażają się przez

$$v_\xi = qK_\zeta - rK_\eta = (C - B)qr,$$

$$v_\eta = rK_\xi - pK_\zeta = (A - C)pr,$$

$$v_\zeta = pK_\eta - qK_\xi = (B - A)pq;$$

a zaś składowe prędkości względnej tego samego punktu K są

$$A\frac{dp}{dt}, \quad B\frac{dq}{dt}, \quad C\frac{dr}{dt}.$$

Więc, jeśli nazwiemy L, M, N składowe dwojanu wynikowego sił zewnętrznych, rozumując jako w n[ne] 250, i stosując twierdzenie momentów ilości ruchu umieszczone w odsyłaczu stronicy 498, otrzymamy

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = N.$$

Te równania dają przyrosty dp, dq, dr jakiemi się powiększają prędkości kątowe p, q, r ciała bryłowego, w jego wirowaniach około trzech osi głównych względnych do środka ciężkości, przez czas nieskończenie mały dt, upłyniony od chwili w której te osie schodziły się z trzema osiami $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$ równoległemi do osi stałych OX, OY, OZ. Ale można, na po-

cząstku każdej chwili czasu, brać za osie stałe spółrzędnych kierunki równoległe do osi głównych bezwładności ciała; więc otrzymane równania mogą i powinny być uważane jako prawdziwe w każdej chwili.

Trzy równania ruchu środka ciężkości G dają spółrzędne x_1, y_1, z_1 tego punktu w funkcyi czasu t, a trzy ostatnie równania wyznaczają p, q, r także w funkcyi czasu t. Tym sposobem jest wiadomy stożek, miejsce geometryczne położeń po sobie idących osi chwilowej wirowania wewnątrz ciała ruchomego. A ponieważ jest znana prędkość kątowa ω około osi chwilowej, będzie wiadomy drugi stożek, miejsce geometryczne położeń osi chwilowej względem osi $G\xi$, $G\eta$, $G\zeta$, kierunku statecznego, poprowadzonych przez środek ciężkości. Więc ruch ciała około środka ciężkości będzie zupełnie wyznaczony, ponieważ ten ruch zależy na toczeniu się pierwszego stożka na drugim, z prędkością kątową wiadomą ω.

RUCH NADANY PRZEZ UDERZENIE CIAŁU BRYŁOWEMU WOLNEMU W PRZESTRZENI.

262. Przypuśćmy że ciało bryłowe zupełnie wolne, pierwotnie w spoczynku, zostało uderzone, na przykład młotem, szukajmy jaki ztąd ruch wyniknie. Uderzenie odbywa się w czasie niezmiernie krótkim, ale siła uderzenia działająca przez ten czas na ciało jest zwykle bardzo wielka, i może sprawić ruch bardzo szybki. Jakąkolwiek prędkość punkt materyalny m ciała otrzymuje po uderzeniu, jego przemieszczenie w chwili gdy siła uderzenia działać przestaje, jest zawsze bardzo małe. I w samej rzeczy, choćby nawet ten punkt miał, przez czas działania sił uderzenia, prędkość którą posiada dopiero na końcu, jego całe przemieszczenie byłoby jeszcze małe; bo, nazywając s przemieszczenie punktu m, a v jego prędkość na końcu niezmiernie krótkiego czasu θ przez który działa siła uderzenia, i przy-

puszczając że jej kierunek zostaje stateczny przez cały czas θ, byłoby

$$s = \int_0^\theta v dt = v\theta.$$

Tem bardziej więc musi być małe przemieszczenie, skoro punkt m stopniowo nabywa prędkości jaką zostaje ożywiony po uderzeniu. Pojmujemy teraz dobrze dlaczego można, prawie bez błędu, przypuszczać że ciało bryłowe zachowuje to samo położenie przez czas θ działania siły uderzenia; to przypuszczenie będzie tem bliżej prawdy im w krótszym czasie uderzenie się wykonywa, a będzie zupełnie prawdziwe jeśli uderzenie jest istotnie *siłą chwilową*, działającą przez jedną tylko chwilę.

Niech będzie M massa ciała bryłowego wprowadzonego w ruch przez siłę uderzenia P, przyłożoną do jednego z jego punktów materyalnych. Aby znaleźć ruch jaki ciało weźmie, będziemy najpierwej szukali ruchu jego środka ciężkości, a potem ruchu samego ciała około tego środka, uważanego za punkt stały.

Wyobraźmy sobie że siła P wynikająca z uderzenia została przeniesiona, równolegle do siebie samej, do środka ciężkości G ciała; z tego przeniesienia powstaje dwojan (P, — P). Owoż, siła P, przyłożona do środka ciężkości G, nadaje mu ruch postępowy; jeśli więc nazwiemy V prędkość środka ciężkości, stosując do niego twierdzenie ilości ruchu i popędów rzutowanych na osi równoległej do kierunku siły P, przypuszczając że jest stateczny, będziemy mieli

$$(1) \qquad MV = \int_0^\theta P dt.$$

Dwojan (P, — P) nadaje ciału ruch wirowy około osi chwilowej GI, która jest średnicą sprzężoną jego płaszczyzny w el-

lipsoidzie środkowej bezwładności (215). Co do prędkości kątowej ω z jaką się odbywa wirowanie ciała, otrzyma się ją wyrażając że moment całego popędu $\int_0^t \mathrm{P}dt$, względem osi wirowania GI, jest równy summie momentów ilości ruchu wszystkich punktów materyalnych ciała względem tej samej osi. Oznaczmy przez γ kąt kierunku siły P z osią GI, i przez p najmniejszą odległość tych dwóch kierunków; będzie

$$\omega \sum mr^2 = p \,\mathrm{wsl}\,\gamma \int_0^t \mathrm{P}dt,$$

zkąd, nazywając k promień wirowy ciała względem osi GI, otrzymujemy

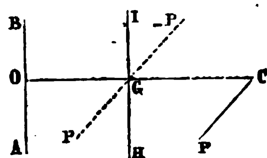
$$(2) \qquad \omega = \frac{p \,\mathrm{wsl}\,\gamma}{\mathrm{M}k^2} \int_0^t \mathrm{P}dt.$$

Jeśli ciało bryłowe, w ruch wprowadzone przez uderzenie, nie jest poddane żadnej sile, to się porusza wedle ustawy wyrażonej twierdzeniem *Poinsot'a;* a środek ciężkości tego ciała opisuje linię prostą z prędkością stateczną V, w kierunku w którym się wykonało uderzenie.

Nie trudno teraz wiedzieć jaki ruch weźmie ciało bryłowe, wolne i w spoczynku, gdy do niego będzie przyłożony dwojan sił uderzenia (sił chwilowych). Środek ciężkości ciała zostanie nieruchomy; bo siły dwojanu chwilowego, przeniesione równolegle do siebie samych do tego środka, w nim się niszczą. A ponieważ można, bez naruszenia w niczem dwojanu, uważać go jako przeniesiony równolegle tak żeby jedna z jego sił przechodziła przez środek ciężkości G ciała, w tem położeniu widzimy oczywiście że druga siła sama jedna sprawia ruch ciała około punktu G, jak gdyby on był stały. Ciało zacznie się więc obracać około osi chwilowej GI, która jest średnicą sprzężoną

płasczyzny dwojanu w ellipsoidzie środkowej bezwładności. Ale ruch wirowy nie będzie się kontynował około GI, tylko jedynie wtedy kiedy ta średnica będzie jedną z osi głównych ellipsoidy (215).

263. Jakiem uderzeniem można nadać ruch, ciału bryłowemu wolnemu w spoczynku, nie wstrząsając osi chwilowej wirowania? Oczywiście trzeba i dość jest żeby ruch, jaki ciało weźmie w skutek uderzenia, był samem tylko wirowaniem. Owoż, siłę uderzenia P przyłożoną do ciała w punkcie C, możemy przenieść do środka ciężkości G, wprowadzając tylko do rachunku



dwojan (P, -- P). Siła P, przyłożona do środka ciężkości G, nada mu ruch przeniesienia; a dwojan (P, — P) sprawi ruch wirowy ciała około osi chwilowej GI która, jakośmy powiedzieli, jest średnicą sprzężoną płasczyzny GCP w ellipsoidzie bezwładności względnej do G. Żeby więc te dwa ruchy, przeniesienie i wirowanie, mogły się złożyć w jedno wirowanie, około osi AB, trzeba żeby osie AB i GI były równoległe, i żeby kierunek ruchu przeniesienia środka ciężkości, to jest kierunek CP siły uderzenia, był prostopadły do płasczyzny ABGI (96); a do tego jeszcze punkt C, w którym siła P spotyka płasczyznę ABGI, powinien się znajdować na linii przecięcia GO tej płasczyzny z płasczyzną GCP dwojanu. Nakoniec, dwie wyżej otrzymane formuły (1) i (2), w których trzeba teraz uczynić $\gamma = \frac{\pi}{2}$, dają

$$\frac{V}{\omega} = \frac{k^2}{p}.$$

Ztąd, nazywając a odległość GO środka ciężkości G od osi wirowania AB, i uważając że $V = a\omega$, wywodzimy

$$p = \frac{k^2}{a}.$$

Więc odległość CO punktu C od osi AB powinna być równa długości wahadła pojedynczego, spółczesnego z wahadłem składanem jakiemby było uważane ciało, gdyby oscyllowało około osi AB wziętej za oś poziomą. Tak wyznaczony punkt C jest *środkiem uderzenia* (227).

Gdyby punkt O był jedynym punktem stałym ciała, wprowadzonego w ruch przez siłę uderzenia P, wtedy, aby to ciało obracało się ciągle około osi AB bez żadnego parcia na punkt O, trzebaby : 1° żeby ta oś wirowania AB była jedną z osi głównych ellipsoidy bezwładności względnej do punktu O; 2° żeby siła uderzenia P była prostopadła do płasczyzny ABG; i 3° żeby punkt C, w którym siła P spotyka tę płasczyznę, był środkiem uderzenia. Te trzy już wiadome warunki są dostateczne.

264. Zastosowanie do ellipsoidy ciężkiej. Weźmy za przykład ellipsoidę jednorodną ciężką; i, nazywając G jej środek, GA, GB, GC trzy pół-osie, przypuśćmy że odebrała popęd przez siłę uderzenia skierowaną na płasczyznie przecięcia głównego BGC, a potem została pod działaniem samej ciężkości. Siłami poruszającemi są tu same tylko ciężary cząstek materyalnych składających ellipsoidę; te ciężary, przeniesione do środka ciężkości G, dają wynikowę która stanowi siłę poruszającą tego punktu. Co pokazuje że środek ciężkości G ellipsoidy porusza się jako punkt ciężki w próżni, i opisuje parabolę w przestrzeni.

Prędkość początkowa V tego środka jest wprost równoległa do kierunku siły chwilowej, a jej wielkość, jeśli oznaczymy przez μv ilość ruchu która mierzy tę siłę, i przez M massę

ellipsoidy, wyrazi się przez

$$MV = \mu v, \qquad \text{zkąd} \qquad V = \frac{\mu v}{M}.$$

Aby wyznaczyć ruch wirowy ciała około jego środka ciężkości, trzeba uważać że ciężary cząstek materyalnych składowych mają wynikowę która, przechodząc przez środek ciężkości, nie wpływa na ruch wirowy około tego punktu. Zatem ruch wirowy naszej ellipsoidy zależy jedynie od siły chwilowej μv. A ponieważ ta siła chwilowa działa na płasczyznie BGC, prostopadłej do osi GA która jest jedną z osi głównych bezwładności względem punktu G, ellipsoida będzie się ciągle obracała około osi GA jak gdyby ta linia była osią stałą. Jeśli więc oznaczymy przez ω prędkość wirowania około osi GA, i przez f odległość siły chwilowej μv od tej osi, będzie

$$\omega = \frac{\mu v f}{\Sigma m r^2}.$$

Owoż $\sum m r^2$, moment bezwładności ellipsoidy względem osi GA, wyraża się przez $\frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$; mamy przeto

$$\omega = \frac{5\mu v f}{M(b^2 + c^2)},$$

albo, wprowadzając prędkość początkową V środka ciężkości,

$$\omega = \frac{5Vf}{b^2 + c^2}.$$

To wszystko pokazuje że oś wirowania przenosi się równolegle do siebie samej, a ellipsoida ciężka obraca się około niej jednostajnie.

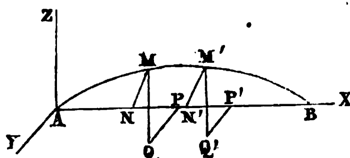
Gdy ellipsoida ciężka jest sferą pełną albo wydrążoną, jednorodną albo złożoną z warstew jednorodnych, wszelka jej średnica jest osią główną; wtedy ruch wirowy sfery będzie się odbywał około tej średnicy która jest prostopadła do płasczyzny poprowadzonej przez środek figury i przez kierunek siły popędu.

Ruch wirowy tej sfery ciężkiej nie byłby w niczem zmieniony, gdyby wszystkie jej punkta były przyciągane ku innym punktom przez siły proporcyonalne do mass i do funkcyj odległości; bo wynikowa działań punktu materyalnego na całą massę sfery przechodzi przez jej środek.

Ale, jeśli ciało różni się choćby najmniej od sfery, jako ziemia, wtenczas wirowanie i jego oś będą ciągle zmienne; jakośmy to już pokazali (258)

DRGANIE STRUNY GIĘTKIEJ (*).

265. Niech będzie ANB struna doskonale giętka, bardzo mało rozciągalna, jednorodna i wszędzie tej samej grubości, wytę-



żona wedle swej długości przez siłę równowartą ciężarowi ϖ, i przywiązana w swoich dwóch skrajnościach do dwóch pun-

(*) Zobacz *Mécanique* par S. D. Poisson, 2e édition, Paris, 1833. — Daniel Bernoully, d'Alembert, Taylor, Lagrange zajmowali się zagadnieniem struny drgającej. Poisson i Sturm wyłożyli w swoich dziełach rozwiązanie d'Alemberta, i my poszliśmy za ich śladem.

ków stałych A i B. Nie zważając na ciężar p struny, który jest bardzo mały względnie do ciężaru ϖ, można uważać tę strunę za prostolinijną w stanie równowagi. To ustaliwszy, przypuśćmy że oddalono cokolwiek strunę od położenia ANB równowagi, i dano wszystkim jej punktom małe prędkości. Struna będzie drgała z obydwóch stron linii prostej ANB; a chodzi teraz o wyznaczenie, w każdej chwili, położenia i prędkości wszystkich jej punktów.

Dajmy na to że, na końcu czasu t, struna ANB tworzy krzywę AMB, płaską albo o podwójnej krzywiznie, na której punkta nieskończenie sąsiednie N i N′ wzięły położenia M i M′. Oznaczmy przez P rzut punktu M na prostej ANB którą obieramy za oś $x^{ów}$, i uczyńmy

$$AN = x, \qquad AP = x + u,$$

a nazwijmy y, z dwie inne spółrzędne PQ, MQ punktu M prostopadłe między sobą i do osi ANB. Ponieważ przemieszczenia struny mają małe rozmiary, u, y, z będą zawsze bardzo małe względem x; ich wartości będą funkcyami dwóch zmiennych niezależnych x i t.

Połóżmy

$$NN' = dx \quad \text{i} \quad MM' = ds;$$

między temi cząstkami składowemi struny jest związek wyrażający że ich massy są te same.

Nazywając ε wieloczyn z przecięcia normalnego struny przez jej gęstość w położeniu AMB, εds będzie massa cząstki MM′; nadto, jeśli oznaczymy przez l długość struny i przez p jej ciężar, massa cząstki NN′ wyrazi się przez $\frac{pdx}{gl}$; mamy więc

$$\varepsilon ds = \frac{pdx}{gl}.$$

Aby otrzymać równania ruchu, uważajmy najpierwej że $\frac{d^2(x+u)}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2}$, albowiem x jest niezależne od czasu t; zatem składowe przyspieszenia w ruchu punktu M są

$$\frac{d^2u}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

A jeśli nazwiemy X, Y, Z składowe siły przyspieszającej, to jest składowe siły wprost przyłożonej odniesione do jedności massy punktu M, składowe siły straconej wyrażą się przez

$$\left(X - \frac{d^2u}{dt^2}\right)\epsilon ds, \quad \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\epsilon ds, \quad \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\epsilon ds.$$

Więc, podstawiając te siły za składowe X, Y, Z w równaniu równowagi nici giętkiej (*Tom* I, 145), otrzymujemy równania różniczkowe ruchu struny

$$d\left\{T\frac{d(x+u)}{ds}\right\} + \left(X - \frac{d^2u}{dt^2}\right)\epsilon ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + \left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right)\epsilon ds = 0,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + \left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right)\epsilon ds = 0;$$

w których T oznacza tężność struny w punkcie M, to jest działanie wzajemne dwóch jej części MA i MB. Ciężkość jest tu jedyną siłą poruszającą, którą możemy zaniedbać. W tem założeniu, znosząc X, Y, Z i zastępując ϵds przez $\frac{pdx}{gl}$, otrzymujemy równania różniczkowe ruchu prostsze ale jeszcze

niecałkowalne,

$$d\left\{T\frac{d(x+u)}{ds}\right\}=\frac{p}{gl}\frac{d^2u}{dt^2}dx,$$

$$(1)\qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right)=\frac{p}{gl}\frac{d^2y}{dt^2}dx,$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right)=\frac{p}{gl}\frac{d^2z}{dt^2}dx.$$

Te równania przywiodą się do kształtu linijnego całkowalnego, jeśli przypuścimy że drgania struny są bardzo małe. Jakoż, nieskończenie mała długość NN' $= dx$, struny w równowadze, ma tężność ϖ; ta długość staje się MM' $= ds$ w ruchu, i wtedy jej tężność jest T; a doświadczenie dowodzi że wydłużenie nici jednorodnej, mającej gęstość stateczną, jest proporcyonalne do długości pierwotnej i do przyrostu tężności. Zatem, nazywając q spółczynnik stateczny dla tej samej struny, będzie

$$T-\varpi=q\,\frac{ds-dx}{dx}.$$

Przypuszczając $ds=2dx$, byłoby $q=T-\varpi$; co pokazuje że q jest powiększeniem tężności jakieby trzeba nadać strunie żeby podwoić jej długość.

Stosunek $\frac{ds-dx}{ds}$ równa się, z wielkiem przybliżeniem, stosunkowi $\frac{du}{dx}$. Albowiem

$$1=\left(\frac{dx+du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(\frac{dz}{ds}\right)^2;$$

a ponieważ wedle założenia struna wykonywa tylko bardzo małe

drgania, dostawy $\frac{dy}{ds}$ i $\frac{dz}{ds}$ kątów jakie styczna do struny w punkcie M czyni z osiami AY i AZ, prostopadłemi do AB, są niezmiernie małe i mogą być uważane za zero; więc

$$ds = dx + du \quad \text{albo} \quad ds - dx = du.$$

Ztąd wynika że można wziąć

$$T - \varpi = q\frac{du}{dx}. \tag{2}$$

Trzeba jeszcze uważać że wydłużenie $ds - dx$ jakiego doznaje cząstka dx struny jest bardzo małym ułamkiem tej cząstki, i temsamem stosunek $\frac{du}{dx}$ jest zawsze bardzo mały. To wszystko dowodzi że stosunek $\frac{dx}{ds}$ i $\frac{d(x+u)}{ds}$ różni się bardzo mało od jedności; dlatego możemy w pierwszem równaniu (1) zastąpić $d\left\{T\frac{d(x+u)}{ds}\right\}$ przez dT, a to ostatnie przez $qd\frac{du}{dx}$ na mocy (2).

Tym sposobem pierwsze równanie (1) staje się

$$q\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{p}{gl}\frac{d^2u}{dt^2}.$$

Więc, czyniąc $\frac{glq}{p} = \alpha^2$, mamy poprostu

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha^2\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Tak samo przekształca się dwa drugie równania (1); dość tylko uważać że jest ze znacznem przybliżeniem

$$\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{ds} = \frac{dy}{dx};$$

można więc zamiast $T\frac{dy}{ds}$ wziąć $T\frac{dy}{dx}$ albo $\left(\varpi + q\,\frac{du}{dx}\right)\frac{dy}{dx}$, i nakoniec $\varpi\frac{dy}{dx}$, zaniedbując $q\,\frac{du}{dx}$ przy ϖ. Zatem, jeśli uczynimy $\frac{gl\varpi}{p} = a^2$, drugie równanie (1) stanie się

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Trzecie równanie (1) przekształci się podobnie. Mamy więc ostatecznie trzy równania linijne ruchu struny

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = a^2\frac{d^2z}{dx^2},$$

które wyznaczają u, y, z w funkcyi dwóch zmiennych niezależnych x i t.

W tych równaniach zmienne u, y, z są rozdzielone; ztąd wnosimy że ruchy punktów struny, równolegle do osi $x$ów, $y$ów, $z$ów są niezależne jeden od drugiego i istnieją nie wpływając wzajemnie na siebie. Jeśli damy, na przykład, wartość dowolną dla x, widzimy zaraz że pierwsze równanie (3) wyznacza wartość u w funkcyi czasu t, a dwom drugim równaniom staje się zadość przez wartości y i z obie zero. To dowodzi że w tym przypadku każdy punkt struny ma ruch oddzielny na osi AB i nie opuszcza tej linii.

Drgania odbywające się wzdłuż kierunku AB struny nazywają

się *podłużnemi*, a te które się wykonywają równolegle do osi AY i AZ zostały mianowane *poprzecznemi*. Ostatnie są te same równolegle do AY albo do AZ, jeśli wartości początkowe dla z i $\frac{dz}{dt}$ są te same co dla y i $\frac{dy}{dt}$.

266. Ponieważ równania (3) mają ten sam kształt, dość jest zcałkować jedno z nich. Bierzemy

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

To równanie o pochodnych częściowych, drugiego rzędu, jest pierwsze z tego rzędu zcałkowane przez d'*Alemberta*, bardzo prostym sposobem który umieszczamy w notach.

Dla zcałkowania równania (4) trzeba przemienić zmienne niezależne. Weźmy dwie nowe zmienne α i β takie żeby było

$$\alpha = x + at,$$

$$\beta = x - at.$$

Gdybyśmy ztąd wyciągnięte wartości dla x i t podstawili w równaniu (4) niewiadoma y stałaby się funkcyą wywikłaną, $y = \chi(\alpha, \beta)$, zmiennych α i β; można więc różniczkować niewiadomę y, uważając ją jako funkcyę zmiennych α, i β, a te ostatnie jako funkcye zmiennych x i t wyznaczone przez dwa powyższe równania.

Mamy tym sposobem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dy}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}.$$

Ale

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 \quad \text{i} \quad \frac{d\beta}{dx} = 1;$$

więc

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\alpha}+\frac{dy}{d\beta}.$$

Różniczkując podobnie tę pochodnę, znajdujemy

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{d\alpha^2}+\frac{2d^2y}{d\alpha d\beta}+\frac{d^2y}{d\beta^2}.$$

Szukajmy teraz pochodnej względem t. Będziemy mieli najpierwej

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt}+\frac{dy}{d\beta}\frac{d\beta}{dt}=a\left(\frac{dy}{d\alpha}-\frac{dy}{d\beta}\right);$$

a potem

$$\frac{d^2y}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2y}{d\alpha^2}-2\frac{d^2y}{d\alpha d\beta}+\frac{d^2y}{d\beta^2}\right).$$

Podstawiając wartości dla $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ w równaniu (4), będzie

$$\frac{d^2y}{d\alpha d\beta}=0.$$

To równanie można pisać

$$\frac{d\frac{dy}{d\alpha}}{d\beta}=0,$$

zkąd wynika

$$\frac{dy}{d\alpha}=\varphi'(\alpha);$$

więc

$$y=\varphi(\alpha)+\psi(\beta).$$

φ i ψ są dwie funkcye całkiem dowolne.

Nakoniec, podstawiając za α i β ich wartości, otrzymujemy

$$(5) \qquad y = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

Taka jest całka ogólna równania (4).

Jakiekolwiek są funkcye φ i ψ, znaleziona całka (5) sprawdza równanie (4) o pochodnych częściowych. Jakoż, oznaczając przez φ'' pochodnę wtórą funkcyi φ względem α, i przez ψ'' pochodnę wtórą funkcyi ψ względem β, mamy

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi'' + \psi'', \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = a^2(\varphi'' + \psi''),$$

zkąd wynika oczywiście

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Aby wyznaczyć funkcye dowolne φ i ψ, trzeba wiedzieć jaki jest stan początkowy struny, to jest znać figurę tej struny na początku ruchu, i składową prędkości każdego jej punktu równoległą do osi AY. Niech będzie więc

$$\text{dla } t = 0, \qquad y = f(x) \quad \text{i} \quad \frac{dy}{dt} = f_1(x).$$

Wprowadźmy te założenia do równania całkowego (5) i do jego pochodnej względem czasu t; będzie

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

$$f_1(x) = a\{\varphi'(x) - \psi'(x)\}.$$

Ostatnie równanie daje

$$\varphi'(x) - \psi'(x) = \frac{f_1(x)}{a};$$

zkąd całkując otrzymujemy

$$\varphi(x) - \psi(x) = \frac{1}{a}\int f_1(x)dx + C.$$

Połóżmy dla skrócenia

$$\frac{1}{a}\int f_1(x)dx = F(x);$$

będziemy mieli dwa równania

$$\varphi(x) + \psi(x) = f(x),$$

$$\varphi(x) - \psi(x) = F(x) + C,$$

które dają

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x) + F(x) + C\right\},$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x) - F(x) - C\right\}.$$

Zatem, jeśli za x podstawimy $x + at$ w funkcyi $\varphi(x)$, i $x - at$ w funkcyi $\psi(x)$, równanie (5) stanie się

$$(6) \qquad y = \frac{1}{2}\left\{f(x+at) + f(x-at) + F(x+at) - F(x-at)\right\}.$$

Widzimy tu że stateczna C, wprowadzona przez całkowanie, znika sama przez się; co widoczne a priori. Ale równanie (6) nie może jeszcze być uważane jako ogólne równanie ruchu struny; bo zostało otrzymane przez funkcye $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ wyznaczone w przypuszczeniu że wartości dla x są zawarte między granicami 0 i l; gdy tymczasem wartości $x + at$ i $x - at$, zastępujące x, mogą przechodzić te granice dlatego że czas t rośnie nieokreślony. Aby wyznaczyć funkcye φ i ψ odpowie-

dające wartościom dla x poza obecnemi granicami, użyjemy warunku niezmienności punktów A i B istniejącej przez cały czas ruchu struny.

Owoż, jakikolwiek jest czas t, będzie zawsze :

dla punktu A, $\varphi(at)+\psi(-at)=0,$

dla punktu B, $\varphi(l+at)+\psi(l-at)=0.$

Połóżmy $at=\zeta$; te dwa równania staną się

$$\varphi(\zeta)+\psi(-\zeta)=0, \tag{7}$$

$$\varphi(l+\zeta)+\psi(l-\zeta)=0, \tag{8}$$

gdzie φ i ψ są wiadome dla wszystkich wartości ζ zawartych między 0 i l.

Równanie (8) daje

$$\varphi(l+\zeta)=-\psi(l-\zeta).$$

Funkcya $\psi(l-\zeta)$ jest wiadoma dla wartości ζ zawartych między 0 i l, ponieważ zmienna $l-\zeta$ pozostaje między temi dwiema granicami; więc funkcya $\varphi(l+\zeta)$ będzie wiadoma dla tych samych wartości ζ. A jeśli położymy $l+\zeta=\zeta'$, to funkcya $\varphi(\zeta')$ będzie wiadoma dla wartości ζ' zawartych między l i $2l$. Zatem funkcya $\varphi(\zeta)$ jest wiadoma dla wszystkich wartości ζ od 0 do $2l$.

Teraz w równaniu (8) zastąpmy ζ przez $l+\zeta$, będzie

$$\varphi(2l+\zeta)+\psi(-\zeta)=0;$$

ale mamy równanie (7)

$$\varphi(\zeta)+\psi(-\zeta)=0.$$

Ztąd rugując $\psi(-\zeta)$ wynika

$$\varphi(2l+\zeta)=\varphi(\zeta).$$

Co dowodzi że funkcya $\varphi(\zeta)$ jest okresowa i ma okres $2l$. Dość więc znać tę funkcyę dla wszystkich wartości ζ od 0 do $2l$, aby ją mieć wiadomą od 0 aż do ∞.

Druga funkcya dowolna ψ, będąc dana przez równanie

$$\psi(-\zeta) = -\varphi(\zeta),$$

jest także okresowa i ma ten sam okres $2l$ co pierwsza φ. Oczywiście pochodne $\varphi'(\zeta)$ i $\psi'(\zeta)$ są obie funkcyami okresowemi.

To wszystko pokazuje że równanie (6) jest ogólne, i wartości y, $\frac{dy}{dt}$ są wiadome w chwili jakiejkolwiek. Otrzyma się tak samo wartości z i $\frac{dz}{dt}$. Będzie więc znana figura struny i prędkości poprzeczne wszystkich jej punktów w każdej chwili ruchu. Co jest zupełnem rozwiązaniem zagadnienia ruchu drgań struny prostopadłych do jej naturalnego kierunku.

267. Drgania poprzeczne. Wynika z tego co poprzedza że, gdy at powiększa się okresem $2l$, czyli gdy czas rośnie ilością $\frac{2l}{a}$, rzędna y bierze napowrót tę samą wartość; i tak samo pochodna $\frac{dy}{dt}$. Więc struna wykonywa ciąg *drgań poprzecznych równych i równoczesnych*, których trwanie jest

$$T = \frac{2l}{a}.$$

Oznaczmy przez n liczbę drgań poprzecznych wykonanych w jedności czasu; będzie

$$n = \frac{1}{T} = \frac{a}{2l};$$

a ponieważ

$$a = \sqrt{\frac{gl\varpi}{p}},$$

otrzymujemy

(9) $$n = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\varpi}{pl}}.$$

Z tej formuły wypływają ważne następstwa.

Struna udziela swoje drgania powietrzu, które wykonywa tę samą ich liczbę i w tym samym czasie. *Ton* struny dźwiecznej jest tem wyższy im jest większa liczba drgań odbytych w jedności czasu. Owoż, formuła (9) pokazuje że liczba n jest niezależna od obszerności drgań i od stanu początkowego struny, ponieważ żadna ilość zależna od funkcyj $f(x)$ i $f_1(x)$ nie wchodzi do tej formuły. Więc, w jednej strunie liczba drgań poprzecznych jest proporcyonalna do pierwiastku kwadratowego ciężaru ϖ; a w dwóch strunach równo wytężonych, z tej samej materyi i mających tę samą grubość, dlatego że ciężar p struny jest proporcyonalny do jej długości l, liczba n drgań jest w stosunku odwrotnym długości l. Jeśli dwie struny mają tę samą długość i są równo wytężone, liczby drgań są w stosunku odwrotnym pierwiastków kwadratowych ich ciężarów.

268. Może się zdarzyć że struna została wprowadzona w ruch taki iż się rozdziela sama z siebie na pewną liczbę części równych, drgających razem i zgodnie. Wtedy dźwięk podwyższa się proporcyonalnie do liczby tych części. Formuła za pomocą której Lagrange rozwiązuje ogólne zagadnienie ruchu struny drgającej czyni wydatnym ten przypadek szczególny. Ale dość będzie dać tylko przykład.

Weźmy równanie

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2},$$

i, mając dane rozmiary i tężność struny, szukajmy pod jakiemi warunkami ruch drgań poprzecznych może się przedstawić przez równanie kształtu

$$y = \theta X;$$

w którym θ jest funkcyą czasu t, zaś X funkcyą zmiennej x tylko. Oczywiście trzeba najpierwej żeby założone równanie sprawdzało równanie różniczkowe; co wymaga

$$X\frac{d^2\theta}{dt^2} = a^2\theta\frac{d^2X}{dx^2},$$

albo, rozdzielając zmienne,

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\theta}\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Żeby temu warunkowi stało się zadość jakiekolwiek są zmienne x i t, trzeba koniecznie żeby obie strony równania przywodziły się do tej samej ilości statecznej, którą oznaczymy przez $-k^2$. Powinno więc być

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2X = 0, \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + a^2k^2\theta = 0.$$

Całki tych dwóch równań linijnych są

$$X = A\operatorname{dos}kx + B\operatorname{wst}kx,$$

$$\theta = C\operatorname{dos}kat + D\operatorname{wst}kat.$$

Zatem

$$y = (A\operatorname{dos}kx + B\operatorname{wst}kx)(C\operatorname{dos}kat + D\operatorname{wst}kat).$$

A, B, C, D są cztery stateczne dowolne; aby je wyznaczyć,

uważajmy że rzędna y powinna być zero dla $x=0$; co daje

$$0 = A(C \operatorname{dos} kat + D \operatorname{wst} kat).$$

Więc

$$A = 0,$$

i temsamem

$$y = \operatorname{wst} kx (C \operatorname{dos} kat + D \operatorname{wst} kat).$$

Nadto, y jest także zero gdy $x = l$; co daje

$$0 = \operatorname{wst} kl (C \operatorname{dos} kat + D \operatorname{wst} kat).$$

To równanie powinno istnieć jakikolwiek jest czas t; musi więc być

$$kl = m\pi, \qquad \text{zkąd} \qquad k = \frac{m\pi}{l};$$

gdzie m znaczy liczbę całkowitą.

Zatem

$$y = \operatorname{wst} \frac{m\pi x}{l} \left(C \operatorname{dos} \frac{m\pi at}{l} + D \operatorname{wst} \frac{m\pi at}{l} \right).$$

Trzeba jeszcze wyrazić że prędkość początkowa struny jest zero. Owoż,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{m\pi a}{l} \operatorname{wst} \frac{m\pi x}{l} \left(- C \operatorname{wst} \frac{m\pi at}{l} + D \operatorname{dos} \frac{m\pi at}{l} \right);$$

więc

$$0 = \operatorname{wst} \frac{m\pi x}{l} . D$$

co wymaga

$$D = 0.$$

Tym sposobem równanie ruchu struny żądanego kształtu przedstawia się przez

$$(a) \qquad y = C \operatorname{wst} \frac{m\pi x}{l} \operatorname{dos} \frac{m\pi a t}{l},$$

a składowa prędkości drgań równoległa do osi AY wyraża się przez

$$(b) \qquad \frac{dy}{dt} = -\frac{m\pi a}{l} C \operatorname{wst} \frac{m\pi x}{l} \operatorname{wst} \frac{m\pi a t}{l}.$$

Czyniąc $t = 0$, otrzymujemy dla początkowej figury struny równanie

$$(c) \qquad y = C \operatorname{wst} \frac{m\pi x}{l},$$

w którem stateczna dowolna C wyznaczy się przez wartości początkowe spółrzędnych x i y.

Wiemy już z poprzedzającej analizy że y jest funkcyą okresową czasu. Owoż, w równaniu (a) y bierze napowrót tę samą wartość gdy t rośnie ilością $\frac{2l}{ma}$; więc y i $\frac{dy}{dt}$ powracają do swoich wartości kiedy t powiększa się okresem $\frac{1}{m} . \frac{2l}{a}$; a liczba drgań wyraża się przez $m . \frac{a}{2l}$, to jest staje się m razy liczbą drgań która odpowieda najgrubszemu dźwiękowi struny, czyli jako się mówi *dźwiękowi fundamentalnemu,* danemu przez ogólne równanie jej ruchu.

Pokażemy teraz że struna, biorąca figurę przedstawioną przez równanie (c), rozdziela się sama z siebie na m części równych które drgają jednozgodnie, i tak jak gdyby były osobne; co

się wyraża mówiąc że w ruchu struny tworzy się $m-1$ węzłów. Jakoż, otrzymamy wszystkie punkta nieruchome podczas drgań struny, jeśli uczynimy

$$\text{wst}\frac{m\pi x}{l}=0, \qquad \text{zkąd} \qquad x=\frac{il}{m},$$

i znaczy liczbę całkowitą mniejszą od m. Ztąd wynika że rzędna y jest zero dla wszystkich wartości x stanowiących postępnię arytmetyczną

$$0, \ \frac{l}{m}, \ \frac{2l}{m}, \ \frac{3l}{m}, \ldots \frac{m-1}{m}l, \ l;$$

co właśnie czyni m części równych struny i $m-1$ węzłów, zawartych między jej punktami skrajnemi A i B. Części wypukłe zawarte między węzłami nazywają się brzuchami.

269. **Drgania podłużne.** Równanie różniczkowe częściowe

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\alpha^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

ze wszystkiem podobne do tego któreśmy dopiero zcałkowali, daje drgania podłużne struny. Ztąd wynika że, jeśli nazwiemy n' liczbę drgań podłużnych wykonanych w jedności czasu, będzie

$$n'=\frac{\alpha}{2l};$$

a ponieważ

$$\alpha^2=\frac{gql}{p},$$

mamy

$$n'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{gq}{pl}}.$$

Więc, z porównania n i n', otrzymujemy

$$\frac{n}{n'}=\sqrt{\frac{\varpi}{q}}.$$

Stosunek $\frac{n}{n'}$ jest ilością bardzo małą, bo, jako wiemy, stateczna q jest daleko większa niż ϖ. Aby to jeszcze jaśniej pokazać, nazwijmy λ wydłużenie struny gdy tężność T jest równa 2ϖ; podstawiając tę wartość w formule

$$T-\varpi=q\frac{ds-dx}{dx},$$

znajdujemy

$$\varpi=q\frac{\lambda}{l}, \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{\varpi}{q}=\frac{\lambda}{l},$$

i następnie

$$\frac{n}{n'}=\sqrt{\frac{\lambda}{l}};$$

a ponieważ wydłużenie λ jest małe w porównaniu do długości l, stosunek $\frac{n}{n'}$ jest ilością bardzo małą. Więc, przypuszczając wszystkie rzeczy te same, widzimy że ton struny dźwięcznej, pochodzący z drgań podłużnych, jest o wiele cieńszy od tonu odpowiedającego drganiom poprzecznym.

ROZDZIAŁ VII.

USTAWY TARCIA DANE PRZEZ DOŚWIADCZENIE.

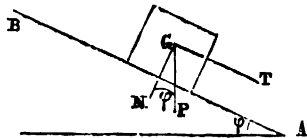
TARCIE ŚLIZGANIA.

270. Gdy jedno ciało opiera się na drugiem a chcemy mu nadać ruch ślizgania, doznajemy pewnego oporu. Między temi dwoma ciałami, w częściach stykających się powierzchni istnieje przylgnienie, i zapewne niejakie zahaczenie się cząstek jedne o drugie, które się sprzeciwia ślizganiu pierwszego ciała na drugiem, a jest tem większe im są mniej gładkie powierzchnie w zetknięciu. Trzeba rozwinąć dostatecznie wielką siłę, aby przezwyciężyć to przylgnienie i sprawić ruch ślizgania. Ten opór przeciw ślizganiu, uważany w chwili gdy ciało ślizgać zaczyna, stanowi to co nazwano *tarciem*.

Gdy jedno ciało zaczęło już ślizgać na powierzchni drugiego, trzeba jeszcze, dla utrzymania jego ruchu z tą samą prędkością, przykładać nieustannie pewną siłę ciągnącą, aby niszczyć opór podobny do tego który przeszkadzał ciału wejść w ruch ślizgania. Ten nowy opór mianowano także tarciem. Ale dwa wymienione tarcia nie są te same, i w ogóle pierwsze ma natężenie większe niż drugie; dlatego odróżnia się je, nazywając pierwsze *tarciem przy zaczęciu* a drugie *tarciem podczas ruchu*.

Ustawy tarcia zostały odkryte przez doświadczenie. Wskażemy tu jedno z najdawniejszych doświadczeń, które nam posłuży do usprawiedliwienia wyrazów technicznych. Niech ciało

ciężkie G opiera się na płaszczyznie poziomej AB, niech dają tej



płaszczyznie małe nachylenie na poziom, i niech je powiększają aż do chwili w której ciało zacznie ślizgać. W tej chwili siła ciężkości rozkłada się na dwie siły, z których jedna jest równoległa do płaszczyzny pochyłej w kierunku linii największej spadzistości, a druga jest prostopadła do tej płaszczyzny. Jeśli oznaczymy przez P ciężar ciała trącącego G, i przez φ kąt płaszczyzny pochyłej z poziomem, te dwie składowe ciężkości czyli ciężaru P, wyrażą się przez Pwstφ i Pdosφ. Pierwsza sprawia ślizganie ciała G na płaszczyznie AB, niszcząc opór pochodzący z tarcia; więc ona jest równa temu tarciu; nazwijmy ją F, będzie $F = P \text{wst} \varphi$. Druga przedstawia parcie normalne ciała G na płaszczyznę AB; oznaczmy ją przez N, będzie $N = P \text{dos} \varphi$.

Mamy zatem

$$\frac{F}{N} = \frac{P \text{wst} \varphi}{P \text{dos} \varphi} = \text{sty} \varphi, \qquad \text{zkąd} \qquad F = N \text{sty} \varphi.$$

Więc stosunek tarcia ciała do parcia jakie ono wywiera na płaszczyznę pochyłą jest równy stycznej nachylenia tej płaszczyzny na poziom.

Kąt tarcia, spółczynnik tarcia. Kąt φ, którego styczna wyraża stosunek tarcia ciała do parcia, nazywa się *kątem tarcia*, a styφ *spółczynnikiem tarcia* który się zwykle oznacza literą *f*. Wartość spółczynnika *f*, zawsze *mniejsza od jedności*, zależy tylko od natury powierzchni ślizgających.

Dla każdego ciała ślizgającego na jednej powierzchni trzeba

odróżnić dwa spółczynniki tarcia ślizgania, według jak się uważa tarcie przy zaczęciu ruchu albo podczas ruchu. Ogólnie pierwszy spółczynnik jest większy od drugiego. Ale w obydwóch przypadkach tarcie ślizgania przedstawia się jedną formułą

$$F = fN.$$

Ładując skrzynię ciężarami w coraz innej ilości, spostrzeżono że siła F, potrzebna do sprawienia ruchu ślizgania tej skrzyni na danej powierzchni poziomej, jest proporcyonalna do całego ciężaru, to jest proporcyonalna do parcia jakie ciężar napełnionej skrzyni wywiera na powierzchnię poziomą. Nadto, zmieniając rozciągłość ściany przez którą skrzynia opiera się na powierzchni poziomej i po niej ślizga, a nie zmieniając w niczem natury tej ściany ani ciężaru skrzyni, widziano że siła ciągnąca F zostawała stateczna.

Ta sama skrzynia posłużyła jeszcze do odkrycia ustawy tarcia podczas ruchu ślizgania. Albowiem, gdy się ślizganie zaczęło, ruch skrzyni był zaraz jednostajnie przyspieszony; co już dowodem że tarcie podczas ruchu ślizgania jest mniejsze niż przy jego zaczęciu. Przyspieszenie było stateczne jakąkolwiek ściana ślizgająca miała rozciągłość, i jakakolwiek była prędkość ślizgania. Z tego wszystkiego Kulomb (*Coulomb*) wywiódł trzy następujące ustawy tarcia, sprawdzone przez innych uczonych, dzisiejszemi dokładniejszemi sposobami, jakich użył Pan *Morin*.

Tarcie ślizgania, przy zaczęciu albo podczas ruchu, jest: 1° proporcyonalne do parcia jakie się rozwija między dwoma ciałami ślizgającemi jedno na drugiem, i 2° jest niezależne od rozciągłości stykających się powierzchni.

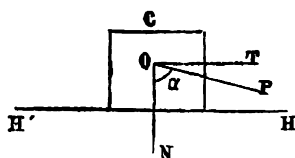
3° Tarcie podczas ruchu ślizgania jest niezależne od prędkości ciała ślizgającego.

W dziełach Mechaniki praktycznej znajdują się tablice obejmujące wartości obydwóch spółczynników f tarcia, wyracho-

wane dla różnych powierzchni drewnianych i metallicznych, ślizgających na sucho, mokro, albo smarowanych.

Weźmiemy teraz kilka przykładów równowagi i ruchu ciał z tarciem ślizgania.

271. **Warunki stałości ciała ciężkiego, postawionego na płasczyznie poziomej i poddanego różnym siłom.** Niech będzie ciało ciężkie C postawione na płasczyznie poziomej HH', i pod-



dane siłom które, razem z ciężkością, mają wynikowę P przechodzącą przez środek ciężkości O tego ciała. Chcemy wiedzieć jaka powinna być wielkość i jaki kierunek tej wynikowej żeby ciało C, z tarciem które się opiera jego przemieszczeniu, zostawało niewzruszone na płasczyznie poziomej HH'. Nazwijmy α kąt PON jaki czyni wynikowa P z normalną ON do płasczyzny. Wynikowa P rozkłada się na dwie siły, na normalną $N = P \operatorname{dos} \alpha$ i na styczenną $T = P \operatorname{wst} \alpha$. Pierwsza wywiera na płasczyznę HH' parcie z którego pochodzi opór przeciw ślizganiu, co daje tarcie $fN = fP \operatorname{dos} \alpha$; druga rozwija dążność do ruchu ślizgania, ale jej działanie jest zmniejszone siłą tarcia. Więc ciało C jest pod działaniem dwóch sił $P \operatorname{wst} \alpha$ i $fP \operatorname{dos} \alpha$, to jest ulega sile $P \operatorname{wst} \alpha - fP \operatorname{dos} \alpha$, od której zależy jego stałość na płasczyznie poziomej HH'.

Jeśli jest

$$P \operatorname{wst} \alpha - fP \operatorname{dos} \alpha < 0 \qquad \text{czyli} \qquad \operatorname{sty} \alpha < f,$$

siła dająca ciału dążność do ślizgania, to jest siła ciągnąca T będzie mniejsza od oporu przeciw temu ślizganiu; wtedy ciało nie poruszy się, i jego stałość na płasczyznie będzie zapewniona.

Ale, jeśli

$$P \operatorname{wst}\alpha - fP \operatorname{dos}\alpha > 0 \qquad \text{czyli} \qquad \operatorname{sty}\alpha > f,$$

siła ciągnąca T przewyższa siłę tarcia; wtedy ciało nie ma żadnej stałości, i będzie przemieszczone.

Nakoniec, jeśli

$$P \operatorname{wst}\alpha - fP \operatorname{dos}\alpha = 0,$$

siła ciągnąca jest równa sile tarcia; wtedy ciało znajduje się w równowadze niestałej, i każda siła, jakkolwiek mała, będzie dostateczna do zerwania tej równowagi.

Widzieliśmy że $f = \operatorname{sty}\varphi$; więc, gdy siły działające na ciało postawione na płasczyznie poziomej mają wynikowę, żeby nie sprawiły żadnego przemieszczenia, trzeba i dość jest żeby ta wynikowa czyniła z normalną do tej płasczyzny kąt mniejszy od kąta tarcia.

Mając wzgląd na wielkość siły P pokażemy jeszcze że, gdy kąt $\alpha < \varphi$, stałość ciała leżącego na płasczyznie poziomej HH′ jest tem większa im siła P jest większa.

Jakoż, różnica

$$fP \operatorname{dos}\alpha - P \operatorname{wst}\alpha = P(\operatorname{sty}\varphi \operatorname{dos}\alpha - \operatorname{wst}\alpha) = \frac{P \operatorname{wst}(\varphi - \alpha)}{\operatorname{dos}\varphi}$$

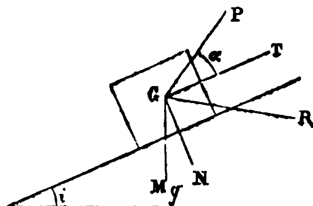
wyraża siłę z jaką trzeba ciągnąć ciało C, równolegle do płasczyzny, aby sprawić ruch ślizgania, a ta siła ciągnąca, która mierzy stałość ciała, jest tem większa im czynnik P jest większy.

Dobrze jest uważać że, w stanie stałości ciała leżącego na płasczyznie, jeśli jaka siła P′ ciągnie to ciało ku płasczyznie, w kierunku który czyni z jej normalną ON kąt równy kątowi tarcia φ, działanie tej siły nie nadweręży w niczem zapewnionej

stałości. Bo siła P′ rozkłada się na styczennną P′wstφ i na normalną P′dosφ; ostatnia daje siłę tarcia fP dosφ która jest wprost przeciwna sile styczennej P′wstφ. Ale $f=$ styφ; więc te dwie siły są równe, a będąc wprost przeciwne niszczą się i nie wpływają na stałość ciała leżącego na płaszczyźnie.

To wszystko stosuje się oczywiście do ciała postawionego na powierzchni jakiejkolwiek; można albowiem zamiast tej powierzchni uważać jej płaszczyznę styczną w punkcie zetknięcia z ciałem, a ciało zostające w równowadze stałej na tej płaszczyźnie zachowa równowagę na powierzchni.

272. Ślizganie ciała ciężkiego na płaszczyźnie pochyłej. Gdy ciało ciężkie, postawione na płaszczyźnie pochyłej, i poddane samej tylko ciężkości, zaczyna ślizgać równolegle do linii największej spadzistości, to doznaje od tej płaszczyzny tarcia które działa w stronę przeciwną ruchu. Nazywając M massę ciała, i oznaczając przez i kąt nachylenia płaszczyzny na poziom, rozłóżmy ciężar Mg ciała na dwie siły, na normalną M$g$dos$i$ i na styczenną M$g$wst$i$. Składowa normalna przedstawia parcie ciała na płaszczyznę podczas ruchu; zkąd powstaje tarcie, jakiego ciało doznaje od płaszczyzny, i wyraża się przez



$$f\mathrm{M}g\,\mathrm{dos}\,i.$$

To tarcie działa w stronę przeciwną składowej styczennej M$g$wst$i$. Więc ciało porusza się w linii prostej, pod działaniem

siły mającej natężenie

$$Mg \operatorname{wst} i - fMg \operatorname{dos} i$$

która, jeśli uczynimy $f = \operatorname{sty} \varphi$, weźmie kształt

$$\frac{Mg \operatorname{wst}(i - \varphi)}{\operatorname{dos} \varphi},$$

i równanie różniczkowe ruchu ciała, a raczej jego środka ciężkości, będzie

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g \operatorname{wst}(i - \varphi)}{\operatorname{dos} \varphi}.$$

To dowodzi że ruch ciała ciężkiego na płasczyznie pochyłej jest jednostajnie przyspieszony albo opóźniony, według jak kąt nachylenia tej płasczyzny jest większy albo mniejszy od kąta tarcia. Ten ruch będzie jednostajny jeśli $i = \varphi$, nazywając φ kąt tarcia, podczas ruchu.

273. Nietrudno teraz odpowiedzieć na pytanie: Siła P przyłożona do ciała ciężkiego, postawionego na płasczyznie pochyłej, sprawia jego ruch ślizgania jednostajny, z dołu do góry wzdłuż linii największej spadzistości. Jaka jest ta siła?

Ciało jest jeszcze pod działaniem siły ciężkości równowartej jego ciężarowi Mg. Przypuśćmy siłę P przyłożoną do środka ciężkości ciała, i nazwijmy α jej kąt z linią największej spadzistości. Rzuty ciężaru Mg i siły P na normalnej GN do płasczyzny pochyłej, są

$$Mg \operatorname{dos} i, \qquad P \operatorname{wst} \alpha,$$

ich różnica

$$Mg \operatorname{dos} i - P \operatorname{wst} \alpha,$$

koniecznie dodatnia jeśli ciało zostaje w zetknięciu z płasczyzną,

będzie parciem ciała na tę płasczyznę; zatem natężenie tarcia wyrazi się przez

$$f(Mg \operatorname{dos} i - P \operatorname{wst} \alpha).$$

Składowe sił Mg i P, równoległe do linii największej spadzistości, są

$$Mg \operatorname{wst} i \quad \text{i} \quad P \operatorname{dos} \alpha;$$

więc równanie różniczkowe ruchu ciała jest

$$M \frac{dV}{dt} = P \operatorname{dos} \alpha - Mg \operatorname{wst} i - f(Mg \operatorname{dos} i - P \operatorname{wst} \alpha).$$

Ruch prostolinijny ciała będzie jednostajnie opóźniony, jeśli siła P jest stateczna; a będzie jednostajny, jeśli jest

$$P \operatorname{dos} \alpha - Mg \operatorname{wst} i - f(Mg \operatorname{dos} i - P \operatorname{wst} \alpha) = 0.$$

Ztąd wynika

$$P = Mg \frac{\operatorname{wst} i + f \operatorname{dos} i}{\operatorname{dos} \alpha + f \operatorname{wst} \alpha} = Mg \frac{\operatorname{wst}(i + \varphi)}{\operatorname{dos}(\alpha - \varphi)};$$

gdzie φ znaczy kąt tarcia podczas ruchu.

Otrzymany wynik dowodzi że wielkość siły P, mogącej posuwać ciało ruchem jednostajnym, z dołu do góry na płasczyznie pochyłej, zależy od kąta jaki jej kierunek czyni z linią największej spadzistości. Siła P jest *minimum* gdy $\alpha = \varphi$.

Nazywając R wynikowę ciężaru Mg i siły P, rozłóżmy ją na dwie siły, na normalną $R \operatorname{dos} NGR$ i na styczenną $T = R \operatorname{wst} NGR$. Z pierwszej pochodzi tarcie ślizgania mające wartość $fR \operatorname{dos} NGR$; druga jest równa temu tarciu, ponieważ według zadania ruch powinien być jednostajny.

Mamy zatem

$$\mathrm{R\,wst\,NGR} = f\mathrm{R\,dos\,NGR},$$

zkąd

$$\mathrm{sty\,NGR} = f = \mathrm{sty}\,\varphi.$$

Więc, gdy siła wprost przyłożona P posuwa ciało, ślizgające na płasczyznie pochyłej, ruchem jednostajnym z dołu do góry, wynikowa tej siły i ciężkości czyni z normalną do płasczyzny kąt równy kątowi tarcia.

Jeśli ruch ślizgania jednostajnego odbywa się z góry na dół, wtedy wielkość siły P jest

$$\mathrm{P} = \mathrm{M}g\,\frac{\mathrm{wst}(i-\varphi)}{\mathrm{dos}(\alpha+\varphi)}.$$

274. Rozwiążemy jeszcze następujące zagadnienie. Punkt materyalny m wychodzi bez prędkości początkowej z położenia A, i przebiega prostę pochyłą AC pod działaniem ciężkości i tarcia. Znaleźć na płasczyznie pionowej CAB linię krzywą ACC′ taką żeby punkt m przebiegał cięciwy AC, AC′,... w tym samym czasie t.

Niech będzie AB pionowa, i kąt CAB $= \alpha$. Ciężar mg punktu

ruchomego m rozkłada się na dwie siły, z których jedna $mg \operatorname{dos} \alpha$ ma kierunek wzdłuż cięciwy AC, a druga $mg \operatorname{wst} \alpha$ jest normalną do tej cięciwy. Ostatnia składowa przedstawia parcie punktu m na cięciwę AC, i ona sprawia tarcie $fmg \operatorname{wst} \alpha$ które działa w stronę przeciwną ruchu. Więc równanie różniczkowe ruchu punktu materyalnego m na cięciwie AC jest

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \operatorname{dos} \alpha - fg \operatorname{wst} \alpha.$$

Ztąd, całkując i uważając że w punkcie wyjścia A droga s i prędkość $\frac{ds}{dt}$ są obie zero, otrzymujemy

$$s = \frac{1}{2} gt^2(\operatorname{dos} \alpha - f \operatorname{wst} \alpha)$$

albo, czyniąc $f = \operatorname{sty} \varphi$,

$$s = \frac{gt^2}{2 \operatorname{dos} \varphi} \operatorname{dos}(\alpha + \varphi).$$

Ilość $\frac{gt^2}{2}$ wyraża wysokość z jakiej punkt ciężki spada w czasie t; nazwijmy a tę wysokość, i weźmy na pionowej długość AB $= a$, będziemy mieli równanie

$$s = \frac{a}{\operatorname{dos} \varphi} \operatorname{dos}(\alpha + \varphi)$$

które określa okrąg koła przez promień wodzący AC $= s$ i przez kąt biegunowy CAB $= \alpha$. Średnicą tego okręgu jest $\frac{a}{\operatorname{dos} \varphi}$. Jakoż, nakreślmy kąt BAD $= \varphi$; jeśli na cięciwie AB $= a$ opiszemy odcinek koła obejmujący kąt $90° + \varphi$, średnicą będzie oczywiście

$AD = \frac{a}{\text{dos}\varphi}$, i wszystkie punkta C, C', C"... będą rzutami punktu D na odpowiedających cięciwach AC, AC', AC",..., bo jest

$$AC = AD \,\text{dos}\, CAD \qquad \text{czyli} \qquad s = \frac{a}{\text{dos}\varphi}\,\text{dos}(\alpha + \varphi).$$

Więc łuk ACB koła jest szukanem miejscem punktów C, C', C"...

Połączmy CB. Punkt materyalny ślizgający z tarciem na cięciwie CB, wychodząc z położenia C bez prędkości początkowej, przebiegnie tę cięciwę w tym samym czasie t, jakakolwiek jest jej długość. Jakoż, kąt jaki cięciwa CB czyni z pionową punktu C jest równy kątowi CBA; a jeśli weźmiemy łuk AE = BC, będzie cięciwa AE = CB i kąt BAE = CBA; więc czas przebieżenia cięciwy CB jest ten sam co cięciwy AE, zaś ostatni jest ten sam co czas spadku z wysokości AB. Co dowodzi zapowiedzianego twierdzenia. Ztąd wynika że punkt materyalny ślizgający przebiega drogę łamanę AC + CB w czasie dwa razy dłuższym niż gdyby spadał z wysokości AB.

Równanie różniczkowe ruchu punktu materyalnego m wymaga żeby było

$$\text{dos}\alpha - f\,\text{wst}\alpha > 0 \qquad \text{albo} \qquad \text{sty}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > \text{sty}\varphi,$$

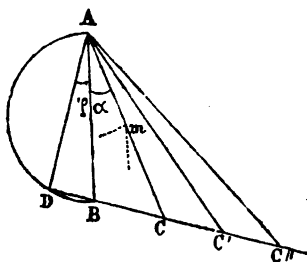
zkąd

$$\alpha + \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Figura pokazuje że temu warunkowi każda cięciwa AC czyni zadość; albowiem kąt $CAD < \frac{\pi}{2}$ czyli $\alpha + \varphi < \frac{\pi}{2}$. Ale, punkt materyalny m nie mógłby wejść w ruch, bez prędkości początkowej, gdyby miał opisywać styczną AT w punkcie A łuku koła ACB; bo wtedy byłoby $\alpha + \varphi = \frac{\pi}{2}$, a więc $\frac{ds}{dt} = 0$.

Nakoniec, jeśli damy całkowity obrót płasczyznie CBA około pionowej AB, łuk ACB koła opisze powierzchnię obrotową, która będzie posiadała w przestrzeni te same własności względne do cięciw co ten łuk sam.

275. Niech będzie $AB = a$ pionowa jakakolwiek, przez któej wierzch ołek A poprowadzono różne pochyłe AC, AC′, AC″,...



leżące na jednej płasczyznie pionowej. Na jakiej linii powinny się znajdować spodki C, C′, C″... tych pochyłych, żeby punkt materyalny m, wychodząc z wierzchołka A bez prędkości początkowej, i przebiegając pod działaniem ciężkości i tarcia każdą z pochyłych, dochodził do jej spodka zawsze z tą samą prędkością?

Równanie różniczkowe ruchu punktu m na pochyłej AC jest

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g(\operatorname{dos}\alpha - f\operatorname{wsl}\alpha).$$

Pomnóżmy obie strony przez $2ds$ i zcałkujmy od $s = 0$ do s będzie

$$\frac{ds^2}{dt^2} = 2gs(\operatorname{dos}\alpha - f\operatorname{wsl}\alpha),$$

albo

$$v^2 = \frac{2gs}{\operatorname{dos}\varphi}\operatorname{dos}(\alpha + \varphi).$$

Wedle zagadnienia prędkość v powinna być ta sama w każdym spodku C, C′, C″,...; trzeba więc i dość jest żeby wieloczyn $s\cos(\alpha+\varphi)$ był niezależny od kąta α. Owoż, jeśli nakreślimy kąt $BAD=\varphi$, i na AB jako średnicy opiszemy półokrąg przecinający AD w punkcie D, prosta DBC rozwiąże zagadnienie. Albowiem, jakikolwiek jest kąt α, mamy zawsze

$$s\cos(\alpha+\varphi)=AC\cos CAD=AD=a\cos\varphi.$$

Więc

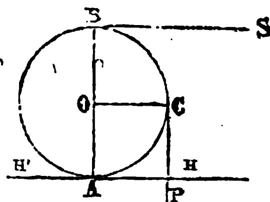
$$v=\sqrt{2ga},$$

ilość stateczna, niezależna od kąta α i temsamem od s.

Te ciekawe własności ruchu ślizgania punktu materyalnego na liniach pochyłych stosują się do ciał bryłowych, ślizgających na płaszczyznach pochyłych których te linie są śladami pionowemi.

TARCIE TOCZENIA SIĘ.

276. Niech będzie walec kołowy ciężki O, leżący na płaszczyznie materyalnej poziomej HH′, poddany sile stycznej do okręgu przecięcia prostego, której działanie powinnoby sprawić



jego ruch toczenia się. Jeśli ta siła styczenna, pozioma BS albo pionowa CP, nie ma dostatecznego natężenia, walec się nie potoczy; a jednak wynikowa jego ciężaru i siły styczennej nie przechodzi przez żaden punkt krawędzi A zetknięcia z płas-

czyzną. Muszą więc istnieć siły zewnętrzne które stawią opór toczeniu się walca. Niewątpliwie chropowatość powierzchni walca i płaszczyzny materyalnej zawadza ruchowi, ale główna przyczyna oporu przeciw toczeniu się leży we wzajemnem odkształceniu się obydwóch ciał. W całej rozciągłości krawędzi A, zetknięcia walca z płaszczyzną, jest pewne zapadnięcie się tej płaszczyzny, które z niej robi płaszczyznę pochyłą; walec musi wstępować na tę płaszczyznę pochyłą. Ztąd powstaje opór przeciw toczeniu się, który nazywają także *tarciem toczenia się*.

Zogólniając powyższe wyobrażenia, jakie sobie zrobić można o tarciu toczenia się, pojmujemy dlaczego, gdy jedno ciało toczy się na drugiem, albo ma się toczyć, oddziaływanie normalne drugiego ciała na pierwsze nie przechodzi przez punkt linii zetknięcia dwóch ciał, ale przez punkt leżący w małej odległości, i ze strony ruchu istniejącego albo mającego się zacząć.

Kulomb znalazł że siła styczenna pozioma BS, potrzebna do wprowadzenia walca w ruch toczenia się na płaszczyznie poziomej, jest proporcyonalna do jego ciężaru Q a w stosunku odwrotnym średnicy, i wyraża się przez

$$S = \frac{kQ}{2R};$$

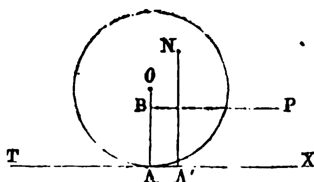
k znaczy spółczynnik zależący tylko od natury dwóch powierzchni w zetknięciu.

Kulomb znalazł jeszcze że siła styczenna pionowa CP, przyłożona do walca, sprawia ten sam ruch toczenia się, i jest także proporcyonalna do jego ciężaru a odwrotnie proporcyonalna do średnicy, ale powinna być dwa razy większa od styczennej poziomej S. Ostatni warunek tak wytłumaczono. Ruch jaki każda z dwóch sił styczennych S i P ma nadać walcowi jest wirowaniem chwilowem około krawędzi zetknięcia A. Owoż, jakiekolwiek są siły S i P, ponieważ one, działając osobno,

powinny sprawić ten sam ruch toczenia się, każda musi przezwyciężyć ten sam opór przeciw toczeniu się; więc momenta tych dwóch sił względem krawędzi A, jako osi chwilowej wirowania, są równe; co daje

$$S.2R = PR, \qquad \text{zatem} \qquad P = 2S.$$

277. Toczenie się walca ciężkiego na płasczyźnie poziomej. Niech będzie walec kołowy O, jednorodny, albo złożony z war-



stew jednorodnych, toczący się na płasczyźnie poziomej AX pod działaniem swojego ciężaru Q i siły P : ostatnia leży na płasczyźnie przecięcia prostego, poprowadzonego przez środek ciężkości O walca, i przechodzi przez punkt B równolegle do płasczyzny AX. Według sposobu przyłożenia siły P, walec będzie się toczył albo ślizgał na płasczyźnie AX. Przypuśćmy że się toczy jednostajnie; zobaczymy zaraz pod jakiem warunkiem. A najpierwej, żeby ten ruch zostawał jednostajny, trzeba oczywiście żeby siły P, Q, i oddziaływania płasczyzny, styczenne T a normalne N, czyniły sobie równowagę.

Nazwijmy R promień walca, A punkt zetknięcia geometrycznego płasczyzny z walcem, p odległość siły P od punktu A; nakoniec, oznaczmy przez A′ punkt w którym wynikowa sił P. i Q spotyka płasczyznę AX, i przez δ odległość AA′.

Ponieważ środek ciężkości O walca ma się poruszać jednostajnie, trzeba żeby wszystkie siły przeniesione do tego punktu niszczyły się nawzajem; co wymaga żeby siły równoległe N i Q

były równe i przeciwne, $N = Q$; i tak samo żeby siły równoległe T i P były także równe i równoległe, $T = P$. Ale trzeba jeszcze, dla równowagi tych czterech sił, żeby summa ich momentów względem jakiegokolwiek punktu, A na przykład, była zero; co daje

$$Pp = Q\delta.$$

Ten wynik dowodzi że oddziaływanie płaszczyzny poziomej AX przechodzi przez punkt A', różny od punktu zetknięcia geometrycznego A; co się nie może wytłumaczyć inaczej jak przez odkształcenie się dwóch powierzchni materyalnych w zetknięciu, o którem już poprzednio mówiliśmy.

To ustaliwszy, jeżeli f jest spółczynnikiem ślizgania walca na powierzchni AX, żeby ruch toczenia się bez ślizgania mógł się zacząć i dalej ciągnąć, powinnoby być

$$P < fQ: \quad \text{więc} \quad p > \frac{\delta}{f}.$$

Co wyznacza punkt B przyłożenia siły P.

Odległość δ, którą nazwano *spółczynnikiem toczenia się*, jest niezależna od ciężaru Q, i zawisła tylko od natury dwóch powierzchni stykających się. Wielu utrzymuje że tarcie toczenia się, a temsamem δ, rośnie gdy krawędź zetknięcia maleje; co zdaje się prawdziwe. Ale nie ma jeszcze dość doświadczeń aby można było wyrzec stanowczo w tym względzie. Wielkość δ jest wogóle bardzo mała. W doświadczeniach na dwóch walcach, średnicy $0^m,162$, jeden z drzewa gajak a drugi z wiązu, które się toczyły na powierzchni dębowej, znaleziono dla pierwszego walca $\delta = 0^m,00048$ a dla drugiego $\delta = 0^m,0008$. Z przyczyny tak małej wartości δ, zaniedbuje się zwykle tarcie toczenia się obok tarcia ślizgania w ruchu ciał naturalnych.

Gdy siła poruszająca P, równoległa do płaszczyzny poziomej, jest styczna do walca, wtedy

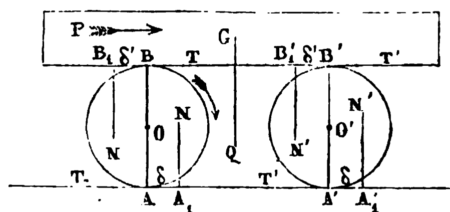
$$p = 2R \quad \text{i} \quad P = Q\frac{\delta}{2R}.$$

A jeśli siła P styczna do walca jest prostopadła do płaszczyzny poziomej, natenczas

$$T = 0, \quad N = P + Q, \quad P = Q\frac{\delta}{R-\delta}.$$

278. Przenoszenie ciężarów za pomocą toczących się wałków. Gdy chodzi o przeprowadzenie poziome wielkiego ciężaru jako belki, kamienia ciosowego, nie można go łatwo ciągnąć po gruncie, zwykle szorstkim, chropowatym, z przyczyny znacznego tarcia. W tym przypadku zastępuje się korzystnie ruch ślizgania ruchem toczenia się; a opór przeciw toczeniu się jest daleko mniejszy od tarcia ślizgania.

Niech będzie jakiekolwiek ciało G mające ciężar Q, położone na dwóch wałkach równego promienia R. Jaką trzebaby przyłożyć siłę poziomą P do ciała G, aby nadać ruch jednostajny całemu układowi?



Widzimy zaraz że, nie zważając na ciężary dwóch wałków, bardzo małe względnie do Q, siły działające na układ są: 1° siły zewnętrzne P i Q; 2° oddziaływania pionowe N, N' gruntu,

przyłożone do punktów A_1, A'_1, leżących w odległości δ od krawędzi A, A' zetknięć geometrycznych, ze strony ruchu; 3° oddziaływania poziome T, T' tegoż gruntu. Te sześć sił, z których cztery ostatnie nie są wiadome, dają najpierwej dwa równania równowagi, w chwili gdy układ ma wziąć ruch toczenia się.

$$T + T' = P, \qquad N + N' = Q.$$

Owoż, w chwili zerwania tej równowagi, wałki biorą ruch chwilowy wirowania około odpowiedających krawędzi zetknięć A, A'; zatem są pod wpływem pochyłego oddziaływania gruntu na którym się opierają, i także pod działaniem pochyłego parcia jakie na nich ciało G wywiera. Te dwa oddziaływania rozkładają się każde na styczenne i normalne. Nawzajem, ciało G ma, około krawędzi oparcia B i B' na każdym z wałków, ruch względny wirowania chwilowego, oczywiście taki sam jak gdyby wałek toczył się na tem ciele w stronę przeciwną jego ruchu. Co dowodzi że składowe parcia jakiego wałek O doznaje od ciała G, przechodzą, składowa styczenna T przez punkt krawędzi B, a składowa normalna N przez punkt B_1 leżący w odległości δ' od tej krawędzi i ze strony w którąby się toczył wałek O na ciele G. Odległości δ i δ' są różne, dlatego że wałki i ciało G nie są z tej samej materyi. To wszystko stosuje się do wałka O'. Więc, dla równowagi każdego z dwóch wałków uważanych osobno, trzeba żeby oddziaływania normalne na dole i na górze były równe między sobą, i tak samo oddziaływania styczenne także równe między sobą.

Ztąd wynika że, w pierwszym wałku, równowaga czterech składowych oddziaływań daje, dla momentów wziętych około B, równanie

$$T.2R = N(\delta + \delta').$$

Równowaga drugiego wałka daje podobnie

$$T'.2R = N'(\delta + \delta').$$

Dodając te dwa równania stronami, i bacząc na dwa poprzednie, otrzymujemy

$$P.2R = (\delta + \delta')Q,$$

zkąd

$$P = \frac{\delta + \delta'}{2R}.Q.$$

Na zastosowanie weźmy

$$R = 0^m,1, \quad \delta = 0^m,01, \quad \delta' = 0^m,001;$$

będzie

$$P = 0,055Q.$$

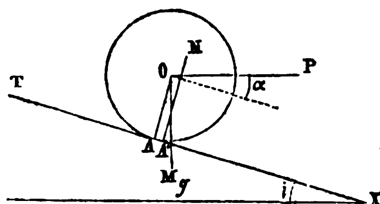
Opór znacznie zmniejszony. Gdyby ciało ciężkie G ślizgało na gruncie jako sanie, byłoby $P = fQ$.

Jest jeszcze inna korzyść. Prędkość ciała G jest dwa razy większa od prędkości osi wałków. Jakoż, dlatego że wałek O ma ruch chwilowy wirowania około krawędzi zetknięcia A, prędkości jego punktów są proporcyonalne do swych odległości od tej krawędzi; zatem prędkość punktów krawędzi B jest dwa razy większa od prędkości punktów osi O. Ale prędkość pierwszych jest ta sama co punktów ciała G które się z niemi schodzą; więc ciało G porusza się dwa razy prędzej niż osie wałków.

To pochodzi ztąd że każdy wałek ma tensam ruch podwójny, to jest ruch przeniesienia i ruch wirowania, a summa tych dwóch ruchów stanowi ruch przeniesienia ciała G.

Dla tej przyczyny trzeba podkładać trzeci wałek na przodzie ciała, aby je utrzymać gdy opuszcza wałek tylny.

279. Toczenie się walca ciężkiego na płaszczyźnie pochyłej. Uważajmy walec kołowy O, jednorodny albo złożony z warstew spółśrodkowych jednorodnych, który się toczy bez ślizga-



nia na płaszczyznie pochyłej, równolegle do linii największej spadzistości. Niech będzie i kąt jaki czyni płaszczyzna pochyła z poziomem; M massa walca, R jego promień i Mk^2 moment bezwładności względem osi O; ω prędkość kątowa i V prędkość przeniesienia; P wynikowa sił zewnętrznych mająca wielkość stateczną, przyłożona do środka ciężkości walca, prostopadle do jego osi i pod kątem α z płaszczyzną pochyłą.

Ruch przeniesienia walca, uważanego jako wolny pod działaniem ciężaru Mg, siły P wprost przyłożonej, i oddziaływań stycznego T i normalnego N płaszczyzny pochyłej AX, wyraża się przez dwa ów.. ınia

$$M\frac{dV}{dt} = Mg \,\mathrm{wst}\, i + P \,\mathrm{dos}\, \alpha - T,$$

$$Mg \,\mathrm{dos}\, i - P \,\mathrm{wst}\, \alpha = N.$$

Stosując zasadę sił żywych do ruchu wirowego około osi O, znajdujemy trzecie równanie

$$Mk^2 \frac{d\omega}{dt} = TR - N\delta.$$

Owoż, jeśli pomnożymy pierwsze z trzech równań przez R, drugie przez δ, i dodamy wszystkie trzy, wyrugujemy odrazu T i N, a zważając że z założenia $V = \omega R$ otrzymamy

$$(1) \quad M\frac{d\omega}{dt} = \frac{P(R\,\mathrm{dos}\,\alpha + \delta\,\mathrm{wst}\,\alpha) + Mg(R\,\mathrm{wst}\,i - \delta\,\mathrm{dos}\,i)}{k^2 + R^2}.$$

To dowodzi że ruch walca jest jednostajnie przyspieszony.

Poniesmy znalezioną wartość do pierwszego równania, będziemy mieli

$$(2) \quad T = \frac{P(k^2\mathrm{dos}\,\alpha - R\delta\,\mathrm{wst}\,\alpha) + Mg(k^2\mathrm{wst}\,i + R\delta\,\mathrm{dos}\,i)}{k^2 + R^2}.$$

Żeby walec toczył się bez ślizgania na płasczyznie AX, trzeba żeby jego krawędź A zetknięcia geometrycznego miała prędkość zero; co wymaga żeby wartość T była mniejsza od tarcia ślizgania fN, to jest żeby się zadość stało następującemu warunkowi

$$(3) \quad \frac{P(k^2\mathrm{dos}\,\alpha - R\delta\,\mathrm{wst}\,\alpha) + Mg(k^2\mathrm{wst}\,i + R\delta\,\mathrm{dos}\,i)}{k^2 + R^2} < f(Mg\,\mathrm{dos}\,i - P\,\mathrm{wst}\,\alpha).$$

Na zastosowanie przypuśćmy że walec ciężki jest jednorodny, i toczy się pod działaniem samej ciężkości. Wtedy $P = 0$, $k^2 = \frac{1}{2}R^2$, i związki (1), (2), (3) stają się

$$(4) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}g\left(\mathrm{wst}\,i - \frac{\delta}{R}\mathrm{dos}\,i\right),$$

$$(5) \quad T = \frac{1}{3}Mg\left(\mathrm{wst}\,i + \frac{2\delta}{R}\mathrm{dos}\,i\right)$$

$$(6) \quad \mathrm{sty}\,i < 3f - \frac{2\delta}{R}.$$

280. Figura pokazuje że walec toczy się w stronę AX; w tem właśnie przypuszczeniu równanie ruchu zostało otrzymane. Jeśli walec odebrał popęd toczenia się z dołu do góry, wtedy jeszcze oddziaływanie styczenne T płaszczyzny pochyłej jest skierowane w stronę XA tak jako poprzednio; dlatego że, chociaż ten walec obraca się teraz od prawej ręki ku lewej, to zawsze ma dążność do ślizgania w stronę AX. Ta okoliczność zasługuje na szczególną baczność.

Mając wzgląd na znak prędkości kątowej ω, z równania (1) wywodzimy, dla obecnego przypadku $P = 0$, równanie

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{2g}{3}\left(\text{wst}\,i - \frac{\delta}{R}\text{dos}\,i\right),$$

które dowodzi że ruch wznoszący się walca jest jednostajnie opóźniony.

Ztąd, całkując, otrzymujemy

$$V = V_0 - \frac{2gt}{3}\left(\text{wst}\,i - \frac{\delta}{R}\text{dos}\,i\right),$$

$$x = V_0 t - \frac{gt^2}{3}\left(\text{wst}\,i - \frac{\delta}{R}\text{dos}\,i\right).$$

Od początku ruchu w którym środek ciężkości walca odbiera prędkość V_0, aż do chwili w której prędkość tego środka staje się zero, walec toczący się na płaszczyznie pochyłej dochodzi do wysokości wyrażonej, po wyrugowaniu czasu t, przez

$$x\,\text{wst}\,i = \frac{3}{2}\cdot\frac{V_0^2}{2g\left(1 - \frac{\delta}{R}\text{dot}\,i\right)}.$$

Ta wysokość przewyższa $\frac{3}{2}\frac{V_0^2}{2g}$. Więc, gdy walec ciężki, po-

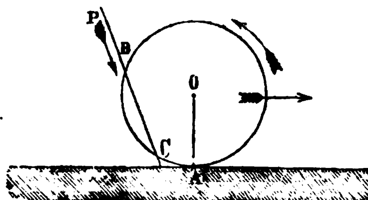
pchnięty na płasczyznie pochyłej, toczy się z dołu do góry w kierunku linii najmniejszej spadzistości, wysokość do jakiej się wznosi jest większa od tej którejby dosięgał gdyby się nie toczył ale tylko ślizgał bez tarcia. To pochodzi poprostu ztąd że walec toczący się ma siłę żywą początkową większą niż gdyby ślizgał bez tarcia. Jakoż, siła żywa walca na początku ruchu toczenia się składa się z siły żywej całej massy przeniesionej do środka ciężkości, to jest MV_0^2, i z siły żywej ruchu wirowego około tego środka, to jest $\omega^2\sum mr^2=\frac{1}{2}MV_0^2$ (148); więc siła żywa początkowa walca toczącego się z dołu do góry na płasczyznie pochyłej jest $\frac{3}{2}MV_0^2$, ilość większa od siły żywej MV_0^2 z którąby ten sam walec zaczynał ślizgać bez tarcia na tej samej płasczyznie.

To wszystko stosuje się do ruchu sfery ciężkiej położonej na płasczyznie pochyłej, bez prędkości początkowej. Ztąd możnaby nawet wyprowadzić ruch sfery ciężkiej na płasczyznie poziomej, czyniąc tylko $i=0$. Ale ten ostatni ruch będzie wprost wyłożony poniżej.

281. Tarcie mieszane toczenia się i ślizgania. Gdy dwa ciała toczą się i zarazem ślizgają jedno na drugiem, oba tarcia spółistnieją i wpływają na ruch każde według swojej ustawy. Ale, ponieważ tarcie toczenia się jest zwykle bardzo małe, można je zaniedbać w zwyczajnych zastosowaniach, w których prawie nieznaczną gra rolę obok tarcia ślizgania. Dlatego nie będziemy zważali na tarcie toczenia się w następującem zadaniu.

Ruch bili na billardzie. Niech będzie na billardzie bila O, wprowadzona w ruch przez popęd P (uderzenie kijem billardowym), którego kierunek BC jest na płasczyznie pionowej przechodzącej przez jej środek O. Ten popęd P nadaje bili ruch przeniesienia równoległy do płasczyzny billardu, i zarazem

ruch wirowy około osi mającej rzut O na płaszczyznie pionowej



wej BCO. Oś O jest, w sferze bezwładności bili względnie do środka ciężkości O, średnicą sprzężoną plasczyzny BCO, a nawet jej osią główną. Oczywiście, z przyczyny symetryi figury, środek bili nie wyjdzie z płasczyzny pionowej początkowej, i dlatego oś wirowania O, prostopadła do tej płasczyzny, zostanie ciągle równoległa do swojego kierunku pierwotnego.

Bila w ruchu jest tylko pod działaniem dwóch sił zewnętrznych, ciężkości i tarcia na suknie billardu. Owoż, łatwo się pojmuje że ciężkość, jako siła pionowa przechodząca przez środek O, nie zmienia w niczem prędkości poziomej tego punktu, ani ruchu wirowego bili około osi O; samo więc tarcie ślizgania, rozwinięte w punkcie A i skierowane w stronę przeciwną ruchu przeniesienia, którego wartość jest fMg (M massa bili), zwolnia zarazem ruch środka O, i ruch wirowania bili około tego środka a raczej około osi zrzutowanej w O. Zatem, nazywając V prędkość środka ciężkości O, ω prędkość kątową bili, R jej promień, i zważając na strony w które się odbywają oba ruchy, wskazane przez strzały, znajdujemy zaraz ich równania różniczkowe

$$\frac{dV}{dt} = -fg, \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{fMgR}{\Sigma mr^2};$$

gdzie $\sum mr^2$ znaczy moment bezwładności bili wzięty względem jednej z jej średnic. A że wartość tego momentu jest (200)

$\sum mr^2 = \frac{2}{5} MR^2$, będzie więc

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{5fg}{2R}.$$

Całkując, otrzymujemy

$$V = V_0 - fgt, \qquad \omega = \omega_0 - \frac{5fgt}{2R};$$

V_0 i ω_0 oznaczają wartości początkowe prędkości linijnej V i kątowej ω. Te obie prędkości V i ω zmniejszają się ciągle.

Prędkość samoista punktu A, którą nazwiemy u, jest summą $u = V + R\omega$ prędkości przeniesienia, spólnej wszystkim punktom bili, i prędkości wirowania około środka O; więc strona w którą działa tarcie zależy od znaku prędkości u. Jeśli $u > 0$, tarcie ma kierunek na lewo, co właśnie wskazuje powyższa figura; jeśli przeciwnie $u < 0$, wtedy tarcie jest skierowane na prawo.

Wartość prędkości punktu A w obecnym ruchu jest dana w każdej chwili przez formułę

$$V + R\omega = V_0 + R\omega_0 - \frac{7}{2} fgt.$$

Prędkość V środka ciężkości O staje się zero gdy $t = \frac{V_0}{fg}$, a prędkość kątowa ω jest zero gdy $t = \frac{2}{5} \frac{R\omega_0}{fg}$. Od chwili w której jedna z dwóch prędkości jest równa zeru, ponieważ wtedy ślizganie bili na billardzie istnieć jeszcze nie przestaje, ta prędkość staje się odjemna, i rośnie liczebnie coraz więcej podczas gdy druga prędkość maleje aż się z nią zrówna. To zrównanie się dwóch prędkości zdarza się na końcu czasu wyznaczonego przez

$$t = \frac{2}{7} \cdot \frac{V_0 + R\omega_0}{fg}, \qquad \text{co daje} \qquad V + R\omega = 0.$$

W chwili gdy ostatniemu równaniu staje się zadość; punkt A ożywiony zarazem dwiema prędkościami równemi i znaków przeciwnych, ma prędkość samoistą zero; ustaje zatem ślizganie bili na billardzie. Od tego czasu tarcie już nie działa, i bila toczy się na billardzie ruchem prawie jednostajnym. Mówimy *prawie*, bo w rzeczywistości istnieje zawsze opór przeciw toczeniu się, czyli tarcie toczenia się któregośmy nie wprowadzili do rachunku, a które zmniejsza pomału, i nareszcie niszczy, prędkość bili w tym ostatecznym jej ruchu.

Czas, w którym bila przestaje ślizgać i tylko się toczy, jest zawarty między dwiema wartościami

$$t=\frac{V_0}{fg} \quad \text{i} \quad t=\frac{2}{5}\frac{R\omega_0}{fg}.$$

Jeśli pierwsza wartość przewyższa drugą, to jest $V_0 > \frac{2}{5}R\omega_0$, wtedy ω staje się zerem przed V, i toczenie się następujące po ślizganiu odbywa się w stronę prędkości V_0. A jeśli przeciwnie, pierwsza wartość jest mniejsza od drugiej, to jest $V_0 < \frac{2}{5}R\omega_0$, wtenczas V stanie się zerem przed ω, i bila będzie się toczyła ku punktowi wyjścia. Nakoniec, jeśli $V_0 = \frac{2}{5}R\omega_0$, obie prędkości V i ω staną się zerami w tym samym czasie, i bila zostanie nieruchoma na billardzie.

282. Przypuśćmy siłę uderzenia P poziomą. Ta siła chwilowa nie dając składowej normalnej nie sprawia tarcia; mamy więc

$$MV_0 = P; \qquad \omega_0 \sum mr^2 = Ph;$$

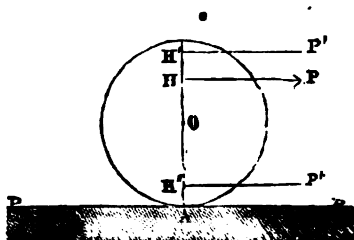
gdzie h znaczy odległość siły P od O, a $\sum mr^2 = \frac{2}{5}MR^2$.

Ztąd wynika

$$R\omega_0 = \frac{5hV_0}{2R},$$

i następ:ie prędkość początkowa punktu A wyraża się przez

$$u_0 = V_0 - R\omega_0 = V_0 - \frac{5hV_0}{2R}.$$



Owoż, jeśli punkt H, przez który przechodzi siła chwilowa P, jest środkiem uderzenia względnym do osi poprowadzonej przez punkt zetknięcia A osi O symetryi walca, będzie (227)

$$AH = R + \frac{k^2}{R}, \quad \text{zkąd} \quad h = \frac{k^2}{R} = \frac{2}{5}R;$$

więc

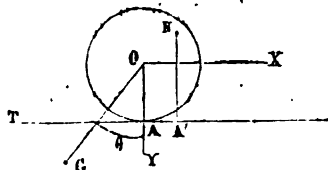
$$u_0 = V_0 - V_0 = 0.$$

Jeśli siła uderzenia P' przechodzi przez punkt H' ponad H, będzie $OH' > \frac{2}{5}R$; zatem $u_0 < 0$, i punkt A pójdzie na lewo. W tym przypadku siła uderzenia P' rozkłada się na dwie siły przeciwnie równoległe P i P_1 przyłożone do H i A; pierwsza P nie wpływa na prędkość punktu A, a druga P_1 daje mu popęd na lewo. Nakoniec, jeśli siła uderzenia P'' przechodzi przez

punkt H″ poniżej H, będzie $u_0 > 0$; wtenczas siła P″ rozkłada się na dwie siły wprost równoległe P i P_2, pierwsza nie wpływa na u_0, druga daje punktowi A popęd na prawo.

W przypadku ogólnym, gdy kierunek prędkości początkowej nie znajduje się na płasczyznie pionowej przechodzącej przez środek ciężkości, oś wirowania bili nie jest prostopadła do tej płasczyzny; wtedy tarcie zmienia w każdej chwili kierunek ruchu środka ciężkości, i bila opisuje linię krzywą.

283. Ruch wahadła składanego z czopem który się toczy na dwóch częściach płasczyzny poziomej. Za płasczyznę figury weźmy płasczyznę prostopadłą do czopu, która przechodzi przez środek ciężkości G wahadła składanego; i niech będzie O rzut osi czopu, R jego promień; l odległość GO; OX, OY osie spół-



rzędnych, pozioma i pionowa punktu O; θ kąt GOY; M massa wahadła i Mk^2 jego moment bezwładności względem równoległej w G do osi O czopu; N i T oddziaływania płasczyzny, normalne i styczenne.

Gdy czop O toczy się na prawo, wahadło oscylluje na lewo, i wznosząc się bierze, naprzykład, położenie OG. W tem położeniu wahadła oddziaływanie normalne N płasczyzny przechodzi przez punkt A′, leżący na prawo punktu zetknięcia geometrycznego A w odległości $AA' = \delta$.

Ponieważ prędkość punktu A jest zero, można uważać ruch wahadła składanego jako wynikający z wirowania $\frac{d\theta}{dt}$ około

punktu O, i z przeniesienia $R\frac{d\theta}{dt}$ równoległego do OX.

Owoż, rzuty prędkości punktu G na osiach OX, OY są

$$-l\frac{d\theta}{dt}\operatorname{dos}\theta+R\frac{d\theta}{dt},$$

$$-l\frac{d\theta}{dt}\operatorname{wst}\theta;$$

więc, na mocy zasady ruchu środka ciężkości, mamy

$$M(R-l\operatorname{dos}\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}+l\operatorname{wst}\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}=-T$$

$$-Ml\operatorname{wst}\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}-Ml\operatorname{dos}\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}=Mg-N.$$

Nadto, stosując zasadę sił żywych do ruchu około środka ciężkości, znajdujemy trzecie równanie

$$Mk^2\frac{d^2\theta}{dt^2}=-N(l\operatorname{wst}\theta+\delta)-T(l\operatorname{dos}\theta-R).$$

Jeśli między temi trzema równaniami wyrugujemy N i T, otrzymamy równanie różniczkowe ruchu wahadła składanego, do którego wchodzi tarcie toczenia się czopu,

$$(k^2+l^2+R^2)\frac{d^2\theta}{dt^2}+lR\left(\operatorname{wst}\theta\frac{d\theta^2}{dt^2}-2\operatorname{dos}\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)+gl\operatorname{wst}\theta$$
$$+\delta\left(g+l\frac{d}{dt}\operatorname{wst}\theta\frac{d\theta}{dt}\right)=0.$$

To równanie przywodzi się do znalezionego w n^{ru} 217, dość tylko uczynić $R=0$ i $\delta=0$.

Zaniedbując δ, można zcałkować powyższe równanie. Mnożymy je przez $d\theta$ i mamy zaraz różniczkę dokładną

$$(k^2+l^2+R^2)d\frac{d\theta^2}{dt^2}-2lRd.\frac{d\theta^2}{dt^2}\cos\theta-2gld.\cos\theta=0;$$

zkąd, całkując i nazywając θ_0 kąt θ na początku oscyllacyi, wynika

$$(k^2+l^2+R^2-2lR\cos\theta)\frac{d\theta^2}{dt^2}=2gl(\cos\theta-\cos\theta_0).$$

Czas jednej oscyllacyi przedstawia się przez całkę

$$T=\frac{1}{\sqrt{2gl}}\int_0^\theta\frac{(k^2+l^2+R^2-2lR\cos\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}.$$

Ale wartość tej całki wtedy się tylko otrzymuje, gdy obszerność oscyllacyj jest dostatecznie mała aby można było wyrazić $\cos\theta$ przez łuk θ, zaniedbując potęgi tego łuku wyższe od drugiej.

Jeśliby chciano zważać na tarcie toczenia się, to możnaby, z przyczyny małości δ, ograniczyć się na wyrazie $g\delta$ równania różniczkowego; ale zawsze tylko wtenczas kiedy obszerność oscyllacyj nie przechodzi pewnej granicy.

ROZDZIAŁ VIII

WIADOMOŚĆ O MACHINACH.

284. Machiny należą do Mechaniki zastosowanej której przeważną część stanowią. W Mechanice rozumowej możemy tylko dać o nich treściwą wiadomość, i, biorąc kilka prostych przykładów, wskazać główne zasady na których się opierają.

W ogólnem określeniu, machiną jest wszelki przyrząd który sprowadza na opór leżący w jednym punkcie działanie siły przyłożonej w innym punkcie; albo jeszcze, machiną jest przyrząd za pomocą którego przesyła się danemu ciału ruch udzielony innemu ciału. Ztąd naturalnie wynika że teorya machin przedstawia się pod dwoma oddzielnemi punktami widzenia; można albowiem uważać *machiny w stanie równowagi* i *machiny w stanie ruchu.* Ten konieczny podział machin wedle ich przeznaczenia, na machiny w równowadze czyli *statyczne* i na machiny w ruchu czyli *dynamiczne,* stanowi charakterystyczną różnicę w ich skutkach.

MACHINY W STANIE RÓWNOWAGI. Przedmiotem machin w stanie spoczynku, albo raczej w równowadze, jest wykonać, na pewnych ciałach, mniej więcej znaczne parcie za pomocą sił przyłożonych do innych ciał; jako naprzykład, parcie za pomocą dźwigni, śruby, klina, i t. p.; albo jeszcze uczynić równowagę pewnym oporom za pomocą danych sił, które nie są ani im

równe ani do nich wprost przyłożone. Teorya machin w stanie równowagi opiera się na samych zasadach Statyki. Znając tylko te zasady już wiemy że daną siłą, *jakkolwiek małą*, i za pośrednictwem przyzwoitej machiny, możemy wywierać wszelkie naprzód oznaczone parcie; a nawzajem, mając daną machinę, umiemy wyznaczyć parcie jakie ona jest zdolna wykonać za pomocą wiadomej siły, i znamy opór jaki można utrzymać w równowadze. W obliczaniu skutków sił i oporów które chcemy zrównoważyć, pomijamy najpierwej siły obce jako ciężkość, i opory podrzędne jako tarcie, sztywność sznurów, i t. p. Postępując tym wyłącznym sposobem, znajdujemy warunki równowagi ciał zmyślonych; mamy więc tylko przybliżone rozwiązanie zagadnienia. Ale potem, przechodząc do rzeczywistego stanu rzeczy, wyznaczamy siły mogące sprawić skutek oporów podrzędnych którcśmy zaniedbali, wprowadzamy je do rachunku w liczbę sił albo oporów, i dopiero otrzymujemy rozwiązanie zupełne. Ta więc pierwsza część teoryi machin należy cała do Statyki.

Machiny w stanie ruchu. Powszechnie potężne machiny przemysłu są w stanie ruchu. Jedne mają za cel przezwyciężać i zarazem przemieszczać opór, jako naprzykład, wznosić pewne ciężary do danej wysokości, tłuć kruszce, toczyć, wiercić drzewo i metale, i t. d.; drugie są przeznaczone do robót wymagających więcej zręczności niż siły, takiemi są te które przędą, tkają, haftują, i t. d. Ta więc druga najważniejsza część teoryi machin należy naturalnie do dziedziny Dynamiki. W ogóle, mówić o machinach jest to mówić o ruchu.

W machinach, siły przezwyciężające opór nazywają się *siłami poruszającemi*, a te które przeciwstają opór *siłami opierającemi się*.

Machiny są układami ze związkami zupełnemi, które mogą brać tylko dwa różne ruchy wprost sobie przeciwne; dlatego też jedno równanie wystarcza do wyznaczenia tego ruchu, skoro

jest wiadoma strona w którą się odbywa. Najdogodniejsze w zastosowaniu jest równanie sił żywych

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \int \sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz).$$

Znak $\sum$ pierwszej strony równania rozciąga się do wszystkich punktów układu, a ten znak $\sum$ w drugiej stronie odnosi się do wszystkich sił, tak dobrze do poruszających jak do opierających się. Całka drugiej strony jest wzięta w granicach jakichkolwiek, którym odpowiedają prędkości v_0 i v punktu mającego massę m.

Jeśli oznaczymy przez P jedną z sił poruszających, a przez dp rzut, na jej kierunku i w jej stronę, przemieszczenia punktu przyłożenia; tak samo, jeśli nazwiemy Q jedną z sił opierających się, dq rzut, na jej kierunku i w jej stronę, przemieszczenia punktu przyłożenia, części summy $\sum(\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz)$, odpowiedające tym dwom gatunkom sił przeciwnych, wyrażą się przez summy $\sum \mathrm{P}dp$ i $-\sum \mathrm{Q}dq$. Będzie więc

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = \int \sum \mathrm{P}dp - \int \sum \mathrm{Q}dq.$$

To równanie wyrażające że połowa przyrostu siły żywej w machinie, przez czas uważany, jest równa przewyżce pracy poruszającej nad pracą opierającą się, zawiera całą teoryę machin w stanie ruchu.

Jeśli dla skrócenia oznaczymy, jako zwykle czynią, przez T_p pracę poruszającą i przez T_0 pracę opierającą się, ostatnie

równanie weźmie kształt prosty i do dyskussyi dogodny

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\sum mv^2 - \frac{1}{2}\sum mv_0^2 = T_p - T_0.$$

285. PRZEPROWADZENIE PRACY W MACHINACH. Uważajmy pracę machiny od początku ruchu aż do chwili jakiejkolwiek; będzie $v_0 = 0$, zatem

$$\frac{1}{2}\sum mv^2 = T_p - T_0.$$

Pierwsza strona równania jest dodatna, zatem $T_p > T_0$; a jeśli ruch przestaje będzie $v = 0$, zatem $T_p = T_0$.

Więc, *w każdej machinie praca poruszająca, wyrachowana od początku ruchu aż do chwili jakiejkolwiek jego trwania, przewyższa zawsze pracę opierającą się; i te dwie prace wtedy dopiero są równe kiedy machina powraca do spoczynku.*

Jeśli ruch machiny jest jednostajny, to jest, jeśli prędkość każdego punktu jest stateczna, o co zwykle starać się należy aby zapewnić regularność i temsamem dokładność pracy, wtedy pierwsza strona równania (1) jest zero; co daje

$$(2) \qquad T_p - T_0 = 0 \qquad \text{albo} \qquad T_p = T_0.$$

Więc, *gdy machina wzięła ruch jednostajny, praca opierająca się, wyrachowana przez jakikolwiek przeciąg czasu, jest zawsze równa pracy poruszającej.*

W przypadku szczególnym, w którym machina jest poddana jednej tylko sile i jednemu oporowi, jednostajność ruchu pociąga za sobą równość między pracą siły i pracą oporu; albo innemi słowy, siła i opór są wtedy odwrotnie proporcyonalne do dróg przebieżonych, w tym samym czasie, przez ich punkta

przyłożenia. Ztąd wynika dobrze znana praktyczna prawda:

Co się zyskuje na sile traci się na prędkości.

Równość dwóch prac, poruszającej i opierającej się, dokonanych przez czas jakikolwiek, nie istnieje gdy machina nie ma ruchu jednostajnego. Ale, jeśli ruch jest okresowy, na przemian przyspieszający się i opóźniający tak że, na początku i na końcu każdego okresu, prędkości różnych punktów machiny są te same, wtedy dla tych okresów pierwsza strona równania (1) jest oczywiście zero, a temsamem i druga. Więc praca poruszająca T_p, rozwinięta w każdym okresie, jest równa odpowiedającej pracy opierającej się T_0. Ztąd wynika równość tych dwóch prac w całym ruchu okresowym.

Przez cały czas w którym machina pracuje, to jest od chwili w której wchodzi w ruch aż do chwili w której się zatrzymuje, pierwsza strona równania (1) jest zero, dlatego że każdy z dwóch wyrazów które ją składają jest osobno zero; co dowodzi że w całym przeciągu tego czasu jest równość $T_p = T_0$. Więc ogólnie, jakiekolwiek są zmiany w ruchu machiny, przez cały przeciąg tego ruchu, praca rozwinięta przez siły przyłożone jest zawsze równa pracy rozwiniętej przez siły opierające się.

Na równaniu

$$T_p = T_0,$$

które wyraża stan normalny machin, zależy *zasada przeprowadzenia pracy.*

Uważajmy nakoniec ruch machiny od chwili w której prędkości są v_0 aż do chwili w której ten ruch ustaje; będzie $v = 0$, zatem

$$-\frac{1}{2}\sum mv_0^2 = T_p - T_0.$$

Równanie pokazuje że w tym przypadku praca opierająca się

jest większa od pracy poruszającej, $T_0 > T_p$. Machina jednak nie przestaje pracować, dlatego że prędkości nabyte dostarczają połowę siły żywej która jest równowarta pracy opierającej się. Aby się o tem przekonać, dość jest przypuścić że, w pewnej chwili ruchu machiny, siły poruszające działać przestają; od tej chwili praca opierająca się zostaje stateczna, i jej wartość wyraża się przez równanie (1) w którem $v = 0$ i $T_p = 0$, co daje właśnie

$$\frac{1}{2}\sum mv_0^2 = T_0.$$

286. Równanie ogólne (1) dowodzi że, jeśli siła żywa $\sum mv^2$ machiny, na końcu pewnego czasu, przewyższa odpowiedającą siłę żywą $\sum mv_0^2$ na początku tego samego czasu, będzie $T_p > T_0$; a jeśli przeciwnie $\sum mv^2 < \sum mv_0^2$, to będzie także $T_p < T_0$; i nawzajem. Widzimy więc jakiej zmianie ulega ruch machiny, według jak praca poruszająca jest większa albo mniejsza od pracy opierającej się. Dopóki $T_p = T_0$ dopóty siła żywa $\sum mv^2$ machiny zostaje ta sama, i ruch jest jednostajny. Gdy $T_p > T_0$, siła żywa $\sum mv^2$ machiny powiększa się ilością $2(T_p - T_0)$, i ruch się przyspiesza; a gdy przeciwnie $T_p < T_0$, wtedy siła żywa $\sum mv^2$ zmniejsza się ilością $2(T_0 - T_p)$, i ruch się zwolnia.

Z tego wszystkiego łatwo wnosimy że machina przeprowadza całą pracę, rozwiniętą przez siły poruszające, na punkta w których działają siły opierające się. Ale, żeby ten wynik był prawdziwy w całej rozciągłości, trzeba wprowadzić do rachunku pracę rozwiniętą przez wszystkie siły, bez wyjątku, przyłożone

do machiny, tak dobrze siły zewnętrzne jak wewnętrzne. Owoż, do sił opierających się trzeba liczyć te które machina ma przezwyciężać, te właśnie które są przedmiotem jej pracy i które dlatego nazywają się *oporami użytecznemi*. Są zaś inne opory, powstające z ruchu machiny, jako tarcia, rozwinięte w różnych częściach bryłowych z których się składa ta machina. Takie opory zwykle przeszkadzające ruchowi, nazywają się *oporami biernemi* albo *podrzędnemi*. Ztąd nazwisko *pracy użytecznej* i *pracy biernej*. Oznaczając pierwszą przez T_u a drugą przez T_b, będzie

$$T_0 = T_u + T_b.$$

Więc, ponieważ w całym ruchu machin praca poruszająca T_p jest zawsze równa pracy opierającej się T_0, mamy ogólne równanie

$$(3) \qquad T_p = T_u + T_b,$$

które dowodzi że praca użyteczna machiny jest tylko częścią pracy poruszającej. A chociaż jest niezaprzeczalną prawdą że machina przeprowadza całą pracę poruszającą, bez żadnego jej uronienia, na punkta w których działają siły oporów, należy jednak, dla dobitności, dodać że część tej pracy, odpowiedająca pracy biernej, jest stracona bezużytecznie. Ta praca bierna, stracona dla ruchu, nietylko wpływa na zużycie machiny, ale co gorsze jeszcze, rozwija w różnych jej częściach drgania które się przenoszą do podpór i fatalnie szkodzą regularności pracy użytecznej.

W rzeczywistości więc machina oddaje mniej pracy niż jej odebrała, i tem mniej im są większe opory bierne które zawadzają jej ruchowi.

Ostatniemu równaniu można dać następującą postać

$$\frac{T_u}{T_p} = 1 - \frac{T_b}{T_p},$$

która wydatnie pokazuje że stosunek pracy użytecznej do pracy poruszającej jest zawsze mniejszy od jedności. Machina jest tem lepsza im ten stosunek jest bliższy jedności; ale najlepsze machiny, a przynajmniej uważane za takie, rzadko oddają więcej nad $\frac{3}{4}$ pracy poruszającej którą odebrały. Dotąd 0,9 jest maximum niezmiernie rzadkie.

Cała więc korzyść machin w ruchu, a jest bardzo wielka, polega *na przekształceniu pracy*, nie na jej powiększeniu. Ta uwaga jest nader ważna. Trzeba albowiem, bacząc na powyższe równanie, pamiętać że, jakąkolwiek wyobrażonoby kombinacyę sił i układów ciał, nie potrafionoby nigdy zbudować takiej machiny, bo ona istnieć nie może, któraby przeprowadzała bez straty pracę tych sił; a oczywiście byłoby niedorzecznością myśleć że machina mogłaby przeprowadzić więcej pracy niż odebrała.

287. Perpetuum mobile. Choćby nawet machina pracowała *bez niczego*, to jest, choćby nie miała do przezwyciężenia żadnego oporu użytecznego, to jeszcze potrzebowałaby pewnej siły poruszającej do utrzymania swojego ruchu; bo, praca T_u byłaby zero, ale zostawałoby w równaniu (3),

$$T_p = T_b;$$

to jest, trzebaby wykonać pracę poruszającą równą pracy oporów biernych, które można osłabić ale nigdy zniszczyć do szczętu!

Widzimy teraz dobrze jakiemu podpadają złudzeniu ci którzy szukają *ruchu nieustannego*, to jest ci którzy, nie posiadając dostatecznej wiedzy Mechaniki, wyobrażają sobie że można wynaleźć układ ciał taki żeby ruch raz mu nadany utrzymywał się sam przez się ustawicznie, bez pomocy żadnej siły.

288. Różnica między machinami w stanie równowagi i machinami w stanie ruchu. «Dajcie mi dźwignię i punkt stały

oparcia, mówił ARCHIMEDES, a ja świat podniosę. » To znaczy wyraźniej : Danym ciężarem będę mógł, za pomocą dźwigni której jedno ramie ma długość wyznaczoną a drugie jest długości dowolnej, uczynić równowagę takiemu ciężarowi jaki się spodoba. Prawda niezaprzeczalna. Idealna potęga machin w spoczynku!

Ale nie można powiedzieć, daną siłą poruszającą, naprzykład siłą 1000 kilogramów wody spadającej z *dwóch* metrów, będę mógł sprawić, za pomocą machin, taki skutek jaki się podoba, podniosę na przykład taki ciężar jaki zechcą do danej wysokości, albo dany ciężar do takiej wysokości do jakiej zechcą. Bo machiny w ruchu, jakośmy pokazali, przekształcają tylko daną ilość pracy pewnej natury na równą ilość pracy innej natury; i nietylko nie powiększają tej pracy, ale jeszcze część jej zużywają przez tarcia. Wprawdzie istnieje zawsze równość między pracą poruszającą i pracą opierającą się, ale ostatnia nie cała jest użyteczna. *Tysiącem* kilogrammów wody spadającej z 2 metrów wysokości, najwięcej coby można zrobić byłoby podnieść 1000 kilog. ciała jakiegokolwiek do 2 metrów wysokości, albo 2000 kilog. do 1.° metra; albo ogólnie p kilog. do h wysokości, biorąc wieloczyn $ph = 2000$.

« Pojmuje się łatwo, mówi P. CHASLES (*) że, gdyby za pomocą 2000 kilog. wody spadającej z 1.° metra wysokości, można było podnieść więcej niż 2000 kilog. wody do tej samej wysokości, tą nową objętością wody spadającej także z 1.° metra wysokości podniesionoby jeszcze większą jej objętość; i tak dalej, massy wody podniesione następnie jedna przez drugą szłyby w postępni geometrycznej rosnącej; tak że jedną szklanką wody spadającej z 1.° metra wysokości wyczerpanoby ocean, podnosząc go do tej samej wysokości. »

(*) *Cours de machines*, wykladany przez P. CHASLES w szkole politechnicznej 1843-1844. Dzieło autografowane.

Czem się więc dzieje że machiną w równowadze można przezwyciężyć takie parcie jakie się podoba? Tem że punkt oparcia mający, teorycznie przynajmniej, taką wytrzymałość jakiej chcemy, dostarcza oddziaływania które może zniszczyć wszelkie parcie. Gdy tymczasem machiny w ruchu przeprowadzają tylko daną im pracę, ale jej nie mnożą.

289. Jedność pracy, kilogrammetr, koń parowy. Z określenia, praca jest wieloczynem siły przez długość; a ponieważ, według miar dziesiętnych, bierze się kilogram za jedność siły i metr za jedność długości, praca, mając za miarę wieloczyn liczby kilogrammów przez liczbę metrów, będzie jednością gdy każdy dwóch czynników będzie równy swojej jedności. Ztąd wynika że *jednością pracy* jest praca potrzebna do wzniesienia 1^{go} kilogrammu na wysokość 1^{go} metra. Ta jedność pracy nazywa się *kilogrammetrem*.

I tak, jeśli koń, idący stępem, ciągnie wóz z wysileniem 70 kilog. i przebiega jeden kilometr czyli 1000 *m*, jego praca jest 70.1000 = 70000 kilogrammetrów.

Siła machin (*) mierzy się ilością pracy jaką one mogą wykonać w danym czasie. Jednością powszechnie przyjętą do oszacowania tej *siły* jest *siła konia* (*parowego*). A ten *koń* przedstawia pracę 75 kilogrammetrów w 1^{ej} sekundzie. Jako widzimy, do jedności pracy machin wchodzi czas.

Siła konia parowego jest daleko większa od siły konia rzeczywistego. Kiedy się mówi że machina parowa ma, na przykład, *siłę* 10 *koni*, nie trzeba myśleć że jej pracę możnaby zastąpić pracą 10^{ciu} koni zwyczajnych. Aby wiedzieć wielkość pracy konia parowego, mnożymy 75 kilogrammetrów przez liczbę 86400 sekund zawartych w 24 godzinach pracy dziennej

(*) Wyraz *siła* machiny albo konia, używany w przemyśle, znaczy po prostu ilość pracy tej machiny albo konia.

tego konia; co daje 6480000 kilogrammetrów. Owoż, koń zwyczajny, w najlepszych warunkach, nie może dostarczyć więcej niż 1166400 kilogrammetrów pracy dziennej, jeśli pracuje 8 godzin na dzień. Stosunek pierwszej pracy do drugiej jest 5,5...; to dowodzi że praca konia parowego jest równowarta pracy 5,5 koni zwyczajnych. Więc trzebaby 55 koni zwyczajnych, do wykonania pracy jaką daje machina parowa mająca *siłę* 10 *koni*.

290. Gdy w częściach bryłowych machiny w ruchu zdarzają się uderzenia, te części, opierając się zmianie swojego kształtu, rozwijają nowe siły które modyfikują nagle prędkości różnych punktów całego układu. A ponieważ działanie sił powstających z uderzeń (sił chwilowych) odbywa się w czasie tak krótkim że, w porównaniu z działaniem innych sił machiny, wolno zaniedbać ich pracę obok pracy tych ostatnich; dlątego można uważać drugą stronę równania (1) za niezmienną. Owoż, wiemy że siły uderzeń w ruchu układu bryłowego sprawiają stratę sił żywych, która jest równa summie sił żywych odpowiedających prędkościom straconym przez wszystkie punkta tego układu. Jeśli więc oznaczymy przez u prędkość straconą dla massy jakiejkolwiek m, i przez v prędkość tej massy po uderzeniu, będzie (161)

$$\sum mv^2 - \sum mv_0^2 + \sum mu^2 = 2\int \mathrm{P}dp - 2\int \mathrm{Q}dq.$$

Równanie pokazuje że, aby utrzymać prędkości v z wartościami jednostajnemi, trzeba, po każdem uderzeniu, powiększać summy sił żywych machiny summą $\sum mu^2$ odpowiedającą prędkościom straconym.

Oczywiście strata siły żywej w machinie odpowieda stracie części pracy użytecznej; a po każdem uderzeniu pewne części machiny biorą ruch drgania, który się udziela ciałom sąsiednim

za pośrednictwem jej podpór i powietrza otaczającego, i zostaje bezpowrotnie stracony. Strata ruchu machiny sprawia koniecznie stratę jej pracy. Uderzenia w machinach trafiają się wyjątkowo i nietrudno ich uniknąć zupełnie. Istnieją inne drgania pochodzące z tarcia w ruchu ślizgania i w ruchu względnym toczenia się różnych sztuk bryłowych machiny; te drgania w części przynajmniej są nieuchronne, bo tarć całkiem zniszczyć nie można. Ale, dając dostateczną gładkość i twardość powierzchniom ciał które mają ślizgać jedne na drugich, i smarując te powierzchnie, łagodzi się ich tarcie; a udzielając im prędkość ślizgania najmniejszą możebną, zmniejsza się pracę tarcia odpowiedającą danemu czasowi, i tym sposobem przysporza się pracy użytecznej.

291. Do sił poruszających albo opierających się trzeba liczyć ciężkość; ale, jako zaraz zobaczymy, praca tej siły jest bardzo mała, i może być zaniechana w rachunku skutków machin. Jakoż, oznaczmy przez p ciężar jednej z części składowych machiny, przez z odległość pionową którą jej środek ciężkości przebiega w pewnym czasie; praca pochodząca z ciężaru P tych wszystkich części będzie

$$Pz_1 = \sum pz.$$

Jeśli środek ciężkości układu wszystkich części machiny zniża się, praca wydana będzie pracą poruszającą; a jeśli się wznosi, to będzie pracą opierającą się.

Owoż, ruch tego punktu jest naprzemienny, i zawiera się w pewnych granicach; więc praca należna ciężkości jest zero między dwiema chwilami w których środek ciężkości zajmuje to samo położenie w przestrzeni. W każdym przypadku, ta praca nie rośnie z czasem, i mieści się w granicach dość ścieśnionych; można więc ją zaniedbać.

292. Koło szalone i Regulator. Prędkości różnych części machiny ulegają zwykle wielkim zmianom; powiększają się gdy siły poruszające rosną albo gdy siły opierające się maleją; a zmniejszają się w przypadkach przeciwnych. Ztąd dla ruchu machiny mogą wynikać szkodliwe skutki. Gdy się na przykład prędkości zmniejszają, siły żywe mogą nie być dostateczne do utrzymania ruchu machiny. w przejściach w których siły poruszające maleją. I tak, gdyby siły poruszające stały się zero w pewnej chwili, byłoby

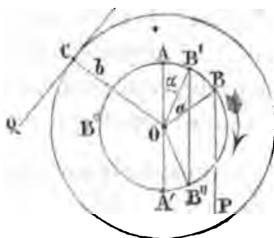
$$\sum m(v_0^2 - v^2) = 2T_0;$$

więc trzebaby wtedy żeby summa sił żywych, nabytych w chwili gdy siły poruszające są zero, dawała podwójną pracę równowartą podwójnej pracy opierającej się : co mogłoby nie istnieć. Ogólnie, w ruchu machiny ani siły poruszające ani siły opierające się nie są te same we wszystkich położeniach jej różnych części. Nie dość nawet utrzymać tę samą ilość pracy; trzeba jeszcze żeby ta praca była jednostajna, a przynajmniej okresowo jednostajna. Należy więc utrzymywać prędkość ruchu machiny i jej siły żywe w granicach wyznaczonych. Do tego służą tak zwane *koła szalone.*

Koło szalone jest to wielkie koło massowe, mające grube dzwona a sprychy cienkie, i które osadzone zazwyczaj na głównym wale machiny z nim się razem obraca. Koła szalone są różnej natury i rozmaitego kształtu, stosownie do machin których ruch miarkują. Dajemy wyrachowanie jednego z nich; o innych trzeba zasięgać wiadomości w dziełach specyalnych (*).

(*) Zobacz *Traité de Dynamique des systèmes matériels*, par J. B. Bélanger. Paris, 1866.

Niech będzie O wał poziomy machiny. Siła poruszająca P jest przyłożona do skrajności B korby mającej promie OB$=a$.



Ta siła działa w kierunku ciągle pionowym i z natężeniem stałecznem, ale tylko schodząc na dół; gdy tymczasem siły opierające się Q', Q''..., także stateczne, działają bez przerwy na kołowrot główny machiny, albo na kołowroty z nim połączone, i dlatego mogą być zastąpione przez wynikowę jedyną Q styczną do koła wziętego dowolnie z promieniem OC$=b$. To założenie siły opierającej się statecznej przypuszcza że różne części obracające się machiny mają środki ciężkości na swoich osiach obrotu; bo inaczej ciężkość dawałaby pracę raz poruszającą drugi raz opierającą się. Dla dopełnienia tego warunku, korba jest zrównoważona innem ciałem tak żeby jej środek ciężkości przypadał na osi wału. Z przerywanego działania siły poruszającej P wynika zmienność ruchu wirowego. Chodzi więc o znalezienie związku między siłami P i Q takiego żeby ruch całego układu raz nabyty zostawał okresowo jednostajny dla każdego obrotu korby.

Okresowość tego ruchu wymaga żeby, dla każdego obrotu korby, praca poruszająca równała się pracy opierającej się, to jest żeby było

$$P.2a = Q.2\pi b, \qquad \text{albo} \qquad Pa = \pi Qb.$$

Owoż, gdy skrajność B korby wznosi się od A' do A, układ będąc pod działaniem samych tylko sił opierających się ma przyspieszenie kątowe odjemne $\frac{d\omega}{dt} < 0$; zatem prędkość kątowa ω maleje. Gdy skrajność B przechodzi punkt najwyższy A, ta prędkość maleje dalej; bo przyspieszenie kątowe jest jeszcze odjemne jako summa algebryczna momentów sił P i Q względem osi O. Prędkość kątowa przestaje maleć i dosięga wartości minimum gdy $\frac{d\omega}{dt} = 0$, to jest gdy korba bierze położenie OB', w którem te momenta mające znaki przeciwne stają się równe liczebnie. Wtedy, nazywając α kąt AOB', mamy równanie momentów

$$(5) \qquad Pa \,\mathrm{wst}\,\alpha = Qb.$$

Ztąd, na mocy poprzedniego równania, wynika

$$\mathrm{wst}\,\alpha = \frac{1}{\pi},$$

co daje kąty α i $\pi - \alpha$. Kąt α zawiera 18° 33',4.

Punkt B'', odpowiedający kątowi $\pi - \alpha$, leży na tej samej pionowej co punkt B'. W tym punkcie B'' prędkość kątowa ω jest maximum, bo jej pochodna $\frac{d\omega}{dt}$ z dodatnej przechodzi na odjemną. Potem, gdy skrajność B przebiega cały łuk B''A'B''B', prędkość zmniejsza się ciągle.

Nazwijmy teraz ω' i ω'' wartości minimum i maximum prędkości kątowej w punktach B' i B''. Stosując zasadę sił żywych do całego układu wału z kołem szalonem, będziemy mieli

$$\frac{1}{2}\sum mr^2\omega''^2 - \frac{1}{2}\sum mr^2\omega'^2 = 2Pa \,\mathrm{dos}\,\alpha - Qb(\pi - 2\alpha),$$

albo, oznaczając przez D wartość drugiej strony,

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2)\sum mr^2 = D.$$

Ten wynik dowodzi że, im większy będzie moment bezwładności wału z kołem szalonem, tem mniejsza różnica między kwadratami prędkości kątowych, największej i najmniejszej możebnej.

Oznaczmy przez w prędkość kątową średnią tych dwóch prędkości skrajnych, to jest połóżmy

$$\frac{\omega'' + \omega'}{2} = w, \quad \text{i uczyńmy} \quad \omega'' - \omega' = \frac{w}{n};$$

otrzymamy

$$\frac{1}{2}(\omega''^2 - \omega'^2) = \frac{w^2}{n}.$$

Zatem

$$\frac{1}{n}\sum mr^2 = \frac{D}{w^2}.$$

Równanie daje moment bezwładności koła szalonego z wałem, i pokazuje że ten moment powinien być tem większy im jest mniejszy ułamek $\frac{1}{n}$ który wyznacza maximum zmienności prędkości kątowej. Zwykle urządzają rzeczy tak żeby zmienność tej prędkości nie przechodziła $\frac{1}{30}$ prędkości średniej, to jest biorą $n = 30$.

Ponieważ moment bezwładności samego koła szalonego mało się różni od całej summy $\sum mr^2$, nazywając M massę tego

koła i k promień wirowy, będzie z dostatecznem przybliżeniem,

$$Mk^2 = \frac{30D}{w^2}.$$

Według tej formuły, dając sobie massę M, wyznacza się promień wirowy k. Żeby nie obciążać zanadto wału, bierze się wieniec kołowy, to jest daje się kołu szalonemu gruby okrąg a promienie przyzwoicie cienkie; tym sposobem prawie cała massa znajduje się na okręgu. Ale trzeba żeby wieniec był mocny i miał promienie niebardzo długie, bo inaczej siła odśrodkowa mogłaby go roztrzaskać.

Miejsce koła szalonego nie jest obojętne. Ogólnie osadzają to koło na głównym wale machiny : ale może być kilka kół szalonych osadzonych na różnych kołowrotach układu. W każdym razie trzeba żeby najważniejsze koło szalone stanowiło jedno ciało z wałem korby; bo inaczej ten wał razby prowadził koło szalone a drugi raz byłby przez nie prowadzony; coby sprawiało szkodliwe uderzenia w zazębianiach kommunikacyjnych.

Koła szalone przedstawiają jednak dwie ważne niedogodności. 1° Swoim ciężarem, zawsze dość znacznym, koła szalone powiększają opory bierne machiny. 2° Pochłaniają wielką siłę żywą, i potem ją wracają machinie tak że trudno zatrzymać jej ruch odrazu; co wystawia na niebezpieczeństwo.

RÓWNOWAGA I PRACA SIŁ W NIEKTÓRYCH MACHINACH.

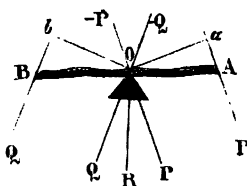
293. Nim wyłożymy teoryę równowagi między siłami wprost przyłożonemi i tarciem w niektórych machinach codziennie używanych, powiemy kilka słów niezbędnie potrzebnych o pracy tarcia, która wchodzi do równania sił żywych jako praca opierająca się.

Niech będą dwa ciała A i A′ których powierzchnie trą się nawzajem. Jeśli jedno z tych ciał zostaje nieruchome, nieskoń-

czenie mała praca pochodząca z tarcia fN, jakiego doznaje cząstka powierzchna ciała ruchomego w swojem przemieszczeniu stycznennem ds, jest odjemna jako opierająca się, i wyraża się przez $-fNds$.

Jeśli oba ciała A i A' są ruchome, dwie ich cząstki powierzchne, wywierające na siebie wzajemne parcie, doznają obie równego tarcia fN, każda w kierunku przeciwnym swojego ruchu względem drugiej; a gdy te cząstki najpierwej w zetknięciu są potem w odległości ds od siebie, summa prac pochodzących z dwóch tarć, zależąca tylko od samego ruchu względnego dwóch ciał, jest jeszcze odjemna i wyraża się przez $-fNds$; ale jedna z dwóch prac składających tę summę jest dodatna, gdy oba ciała poruszają się w tę samą stronę; to które idzie prędzej pomaga ruchowi drugiego. Nie zawsze więc tarcie jest oporem.

294. Dźwignia. Nazywa się dźwignią drążek, prosty albo krzywy AOB, opierający się na punkcie stałym O, a za pomocą którego można, siłą P działającą w jednej skrajności A przezwyciężyć opór Q przyłożony do drugiej skrajności B. Zwykle



oporem jest wielki ciężar któregoby nie można było podnieść siłą wprost przyłożoną, a który podnosimy za pośrednictwem dźwigni.

Dźwignia, która grała ważną rolę w historyi umiejętności, jest najprostszą z machin i najwięcej użyteczną. Idąc za starym zwyczajem, rozróżniają trzy rodzaje dźwigni; ale teorya równo-

wagi stosuje się do wszystkich trzech zarazem. 1° Jeśli punkt oparcia O znajduje się między punktami przyłożeń A i B siły poruszającej P i oporu Q, dźwignia jest *pierwszego rodzaju*. Szala do ważenia ciężarów, każda z dwóch części składających nożyczki, są dźwigniami pierwszego rodzaju. 2° Jeśli punkt przyłożenia B oporu leży między punktem oparcia O i punktem przyłożenia siły, dźwignia jest *drugiego rodzaju*. Kosa rznąca sieczkę, wiosło którem, opierając je na wodzie, popychamy się w czółnie, są dźwigniami drugiego rodzaju. 3° Jeśli punkt przyłożenia A siły leży między punktem oparcia O i punktem przyłożenia B oporu, dźwignia jest *trzeciego rodzaju*. Nożyce do strzyżenia owiec; palce, ręce, nogi, a w ogólności różne części ciała ludzi i zwierząt, poruszane siłą muskularną stanowią dźwignie trzeciego rodzaju.

Nie zważając na ciężar dźwigni, i przypuszczając punkt oparcia O dostatecznie wytrzymały; znajduje się łatwo warunki równowagi. Albowiem, oczywiście ta równowaga nie może istnieć tylko wtedy kiedy siły P i Q mają wynikowę równą i przeciwną oddziaływaniu jakiego doznaje dźwignia od punktu oparcia O; więc siły P i Q powinny być na jednej płaszczyznie przechodzącej przez punkt oparcia O, i summa ich momentów względem tego punktu powinna być zero. Owoż, jeśli z punktu O spuścimy na kierunki sił P i Q, prostopadłe $Oa = p$ i $Ob = q$, warunek równości momentów wyrazi się przez równania

$$Pp - Qq = 0 \qquad \text{albo} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p};$$

trzeba więc i dość jest dla równowagi dźwigni, 1° *żeby siły* P i Q *znajdowały się na jednej płaszczyznie z punktem oparcia* O; 2° *żeby były odwrotnie proporcyonalne do swoich odległości od tego punktu; i* 3° *żeby miały dążność do obracania dźwigni w strony przeciwne.*

Gdy tym warunkom staje się zadość, wynikowa sił P i Q przedstawia parcie jakie punkt stały O wytrzymuje.

Warunki równowagi dźwigni i parcie na punkt stały O wyznaczają się odrazu za pomocą dwojanów; dość tylko przenieść siły P i Q, równolegle do nich samych, do punktu oparcia O, i wyrazić że ten punkt niszczy ich wynikowę a (P,—P), (Q, — Q) czynią sobie równowagę.

W rzeczywistości dźwignia opiera się nie na jednym tylko punkcie O, ale na powierzchni materyalnej na której śliżga; zkąd wynika konieczne tarcie. Trzeba zatem dla równowagi dźwigni żeby, niezależnie od trzech wyżej wymienionych warunków, wynikowa sił P i Q czyniła z normalną do powierzchni oparcia w punkcie O kąt najwięcej równy kątowi tarcia, ze strony przeciwnej możebnego ruchu. Ale tak ścisły warunek równowagi nie ma użytku w praktyce, z przyczyny zaniedbanego ciężaru dźwigni.

W przypadku dość ogólnym gdy siły P, Q i punkt stały O są na płasczyznie pionowej, ciężar dźwigni wprowadza się łatwo do rachunku, i liczy się jako siła poruszająca albo opierająca się według położenia środka ciężkości. A jeśli jeszcze siły P i Q są pionowe, wtedy, nazywając ϖ ciężar dźwigni, parcie jakiego doznaje punkt stały O wyraża się przez summę

$$P + Q + \varpi.$$

295. Gdy dźwignia porusza się jednostajnie na płasczyznie pionowej około punktu oparcia O, pod działaniem sił P, Q i ciężkości, leżących na tej samej płasczyznie, te trzy siły czynią sobie równowagę; wtedy summa ich prac odpowiedających przemieszczeniu kątowemu $d\theta$ dźwigni, przez czas nieskończenie mały dt, jest zero. Więc, oznaczając przez Pp, Qq, ϖr momenta sił P, Q i ciężkości, względem osi rzutowanej w O, mamy

$$Ppd\theta - Qqd\theta \pm \varpi r d\theta + \iota = 0,$$

gdzie ι znaczy summę prac biernych.

Owoż, według położenia środka ciężkości dźwigni, jej ciężar może dawać pracę dodatnią albo odjemną, a nawet zero; jeśli więc nie będziemy zważali ani na ciężar dźwigni ani na prace bierne, i nazwiemy $d\alpha$, $d\beta$ łuki opisane przez punkta a, b w czasie dt, otrzymamy równanie przybliżone

$$Pd\alpha = Qd\beta, \quad \text{zkąd} \quad P\alpha = Q\beta.$$

Ostatnie pokazuje że ilości P i α zmieniają się w stosunku odwrotnym jedna drugiej. Wyrażają tę własność mówiąc: *co się zyskuje na sile traci się na czasie;* bo im dłuższa do przebieżenia droga tem dłuższego wymaga czasu.

296. Szala. Zwyczajna szala jest dźwignią pierwszego rodzaju, która ma punkt oparcia O w środku swojej długości, i na każdej skrajności A, B zawieszony talerzyk do trzymania ciężarów. Chcąc zważyć jakie ciało, kładzie się je na jednym z dwóch talerzyków, i czyni się mu równowagę kładąc na drugim ciężary znaczone, kilogram, dekagram,... w ilości takiej żeby linia łącząca punkta zawieszenia talerzyków u drążka szali mogła, po pewnej liczbie oscyllacyj, zostawać pozioma. Gdy się równowaga ustaliła, ciężar ciała powinien się równać summie ciężarów znaczonych. Na tej własności polega użycie szali do ważenia ciał. Zobaczmy teraz jakich warunków ma dopełniać szala, aby, ważąc ciało jakośmy powiedzieli, można było znaleźć dokładnie jego ciężar.

Niech będzie Q ciężar ciała położonego na jednym talerzyku szali, P summa ciężarów znaczonych, położonych na drugim, które mu czynią równowagę; P′ i Q′ ciężary tych talerzyków wraz z ich zawieszeniami; nakoniec ϖ ciężar drążka AB i G jego środek ciężkości. Oczywiście równowaga szali wtedy tylko istnieć może kiedy siły $P + P'$, $Q + Q'$ i ϖ, przyłożone do punktów A, B, G mają wynikowę przechodzącą przez punkt stały O który ją niszczy. Więc te trzy siły pionowe muszą być

z punktem oparcia O szali na jednej płasczyznie pionowej, i summa ich momentów względem tego punktu powinna być zero; co daje

$$(P+P')p-(Q+Q')q\pm\varpi r=0.$$

Przede wszystkiem trzeba żeby ciężar drążka szali nie wpływał na wagę ciała; dlatego wyrabiają ten drążek tak, żeby był symetryczny względem płasczyzny przechodzącej przez jego punkt oparcia O i prostopadłej do linnii AB łączącej punkta zawieszenia talerzyków. Ztąd wynika że, gdy ta linia jest pozioma, płasczyzna symetryi drążka jest pionowa; a ponieważ środek ciężkości drążka leży na tej płasczyznie, będzie $r=0$. Nadto mamy z założenia $Q=P$. Przez podstawienie tych wartości, równanie staje się

$$P(p-q)+P'p-Q'q=0.$$

Owoż, równanie powinno istnieć niezależnie od wartości P; co wymaga

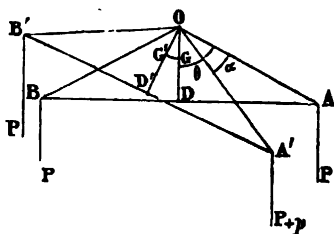
$$p=q \qquad \text{i} \qquad P'=Q'.$$

Więc żeby szala, użyta sposobem wyżej powiedzianym, wskazywała dokładnie ciężary ciał, trzeba: 1° żeby jej punkt oparcia znajdował się na jednej płasczyznie pionowej z punktami zawieszenia talerzyków, i był od nich równo oddalony; 2° żeby ciężary talerzyków wraz z ich zawieszeniami były równe. Gdy tych warunków dopełniono, szala jest *dokładna,* ma się rozumieć teorycznie dokładna.

W praktyce te warunki nie wystarczają, z przyczyny tarcia drążka na osi zawieszenia około której się obraca. Dlatego w budowie szali starają się o to żeby czopy drążka, spoczywające na

panwiach, doznawały od nich najmniejszego możebnego tarcia; bo to tarcie, jako siła zewnętrzna, czyniłoby równowagę możebną między ciałami nierównych ciężarów. W szalach przeznaczonych do ważeń delikatnych, czopy drążka są graniastonami trójkątnemi zwykle ze stali, których krawędź opiera się na płaszczyznie z agatu. Ta krawędź stanowi oś O zawieszenia drążka. Tak samo talerzyki są zawieszone na podobnie urządzonych graniastonach ostrych, których krawędzie stanowią osie zawieszenia A i B. Tym sposobem wpływ tarcia, jeśli nie całkiem to w bardzo przeważnej części zostaje zniszczony.

Ale jest jeszcze inny, niezbędnie potrzebny warunek dobrej szali. Trzeba żeby szala była *czuła*, to jest żeby nawet bardzo mały ciężar p, przydany do jednego z dwóch równych ciężarów, które sobie czynią równowagę na szali, zrywał tę równowagę. Niech będzie AOB położenie drążka, gdy talerzyki są równo obciążone;



w tem położeniu linia AB jest pozioma. Oznaczmy przez P cały ciężar każdego z dwóch talerzyków obciążonych, to jest ciężar ciała z talerzykiem na którym leży; przez a długość ramion równych OA, OB; przez ϖ ciężar drążka, i przez b odległość jego środka ciężkości G od punktu O. Jeśli przydano ciężarek p do talerzyka zawieszonego w A, ramie OA obróci się około osi O kątem $AOA' = \alpha$, i drążek weźmie nowe położenie A'OB' równowagi. W tym ostatnim stanie równowagi drążek jest pod działaniem czterech sił pionowych przyłożonych w trzech punktach A', B', G'; to jest: dwie siły P i p są obie przyłożone

w A', siła P w B' a siła ϖ w środku ciężkości G'. Wynikowa tych czterech sił równoległych leżących na jednej płaszczyznie i skierowanych w jedną stronę, musi dla równowagi szali przechodzić przez jej punkt stały O; co wymaga żeby summa momentów tych sił względem punktu O była zero. Więc, nazywając θ połowę kąta AOB, i przypuszczając środek ciężkości G poniżej punktu O, będzie

$$(P+p)a\,\text{wst}(\theta-\alpha) - Pa\,\text{wst}(\theta+\alpha) - \varpi b\,\text{wst}\,\alpha = 0;$$

zkąd

$$\text{sty}\,\alpha = \frac{pa\,\text{wst}\,\theta}{(2P+p)a\,\text{dos}\,\theta + \varpi b}.$$

Ta formuła daje odległość kątową α drążka od położenia normalnego równowagi, gdy przydano ciężarek p do jednego z talerzyków. Szala jest tem *czulsza* im kąt α jest większy dla tychsamych wartości p i P. Jeśli chcemy żeby czułość szali była niezależna od ciężaru P a temsamem od ciężaru ciała który ważymy, trzeba żeby ilość P nie wchodziła do formuły, zatem żeby dos θ była zero; co daje

$$\text{sty}\,\alpha = \frac{pa}{\varpi b}.$$

Więc, żeby szala posiadała ten sam stopień czułości, jakiekolwiek ważonoby ciężary, trzeba żeby punkta A i B zawieszenia dwóch talerzyków i punkt oparcia O drążka były na jednej linii prostej, prostopadłej do osi O. Gdy temu warunkowi staje się zadość, wtedy czułość szali jest tem większa im jest mniejsza odległość b środka ciężkości drążka od punktu oparcia O. Ale ten środek ciężkości może się znajdować nad punktem O, pod nim albo w nim samym.

Jeśli w położeniu poziomem drążka AB jego środek ciężkości G znajduje się nad osią zawieszenia O, wtenczas równowaga

szali jest *niestała* (150), to jest ciężarek p, choćby nawet bardzo mały, położony na jednym z talerzyków w równowadze, przechyla zaraz drążek kątem $\alpha > 90°$, bo teraz $b < 0$ i sty$\alpha = -\frac{pa}{\varpi b}$; dlatego też drążek oddalony z pierwotnego położenia nie powraca już do niego. W tym przypadku mówi się że szala jest *szalona*. Jeśli środek ciężkości drążka przypada na osi zawieszenia, wtedy, ponieważ ciężar tego drążka wraz z dwoma ciężarami równemi może być uważany jako przyłożony do osi zawieszenia, szala zostawałaby w równowadze we wszystkich położeniach swojego drążka. Mianoby w tym przypadku *szalę obojętną*, której główna wada leży w tem że nawet bardzo mała różnica p między ciężarem ciała ważonego i ciężarem znaczonym którym je oszacować chcemy, przechyla drążek aż do położenia pionowego, dlatego że $b = 0$ daje sty$\alpha = \infty$. Nakoniec, gdy środek ciężkości G drążka AB, w położeniu poziomem, znajduje się poniżej osi zawieszenia O, równowaga jest *stała*, to jest drążek lekko strącony z położenia poziomego równowagi wraca do niego po kilku coraz mniejszych oscyllacyach. W tym przypadku, jeśli odległość b, środka ciężkości G od osi O, jest wielka, szala jest mało czuła; jej drążek zaledwie się porusza w skutek przydanego ciężarka p do jednego z talerzyków obciążonych w równowadze. Mówi się wtedy że szala jest *leniwa*. Żeby więc mieć szalę bardzo czułą, trzeba żeby środek ciężkości jej drążka był bardzo blisko osi zawieszenia.

297. Z przyczyny niemożebności otrzymania doskonale równych ramion drążka, używa się, w doświadczeniach wymagających wielkiej dokładności, tak zwanej *metody podwójnego ważenia*, wynalezionej przez *Borda*, która nie potrzebuje tej równości ramion. Aby tą metodą znaleźć ciężar ciała, kładzie się je na jednym talerzyku szali, i czyni się mu równowagę kładąc na drugim suchy piasek albo śrut. Po ustaleniu równowagi, odejmuje się ciało, i na jego miejsce kładzie się ciężary znaczone aż do ustalenia

nowej równowagi. Oczywiście summa ciężarów podstawionych za ciało, czyniąc równowagę tej samej ilości piasku albo śrutu, i w tychsamych okolicznościach, jest równa ciężarowi tego ciała. Aby zapewnić niezmienność stanu szali, zachowuje się ten sam ciężar znaczony w równowadze z ciałem jakiemkolwiek, i waży się *przez różnicę*, to jest: odejmuje się ciężary znaczone, ile trzeba, a na ich miejsce kładzie ciało szukanego ciężaru.

298. Można jeszcze użyć innej metody podwójnego ważenia, która daje ciężar ciała i stosunek długości ramion drążka szali.

Niech będą $OA = p$, $OB = q$ długości ramion drążka, i X niewiadomy ciężar ciała. Kładziemy najpierwej to ciało na talerzyku B, i równoważymy je ciężarem P położonym na talerzyku A; co daje

$$Xq = Pp.$$

Kładziemy potem to samo ciało na talerzyku A, i równoważymy je ciężarem położonym na talerzyku B; co daje także

$$Xp = Qq.$$

Znając P i Q, mnożymy dwa równania stronami, i mamy

$$X^2 = P.Q, \quad \text{zkąd} \quad X = \sqrt{P.Q}.$$

Więc szukany ciężar ciała jest średnią proporcyonalną między dwoma ciężarami wziętemi do jego ważenia.

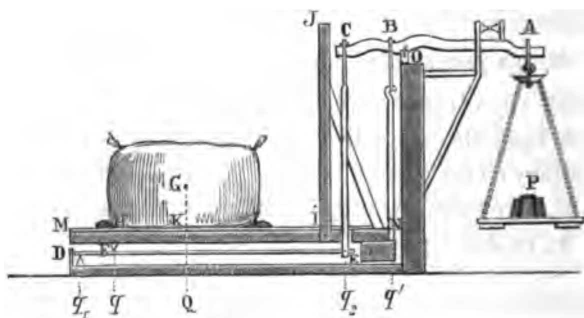
Jeśli podzielimy dwa pierwsze równania stronami, znajdziemy

$$\frac{q^2}{p^2} = \frac{P}{Q}, \quad \text{zkąd} \quad \frac{q}{p} = \sqrt{\frac{P}{Q}}.$$

Ostatnia formuła daje stosunek długości ramion drążka szali.

Tym sposobem, mając długość drążka szali wyznacza się łatwo długości jego ramion.

299. Szala dziesiętna (*Quintenz'a*). Szala dziesiętna służy do ważenia wielkich ciężarów za pomocą małych (dziesięć razy mniejszych). Ta machina składa się głównie z pomostu MN na którym kładzie się ciało szukanego ciężaru Q, i z dźwigni AB



mającej na skrajności A zawieszony talerzyk do trzymania ciężarów znaczonych P. Dźwignia AB jest ruchoma około stałej osi poziomej O. Pomost MN opiera się najpierwej wszerz deski DE, na krawędzi F graniastonu trójkątnego który do niego jest przytwierdzony, a potem utrzymuje się w punkcie N na pręcie pionowym BN który łączy ten punkt z ramieniem OC dźwigni. Deska DE, ruchoma około osi poziomej D, jest połączona z tem samem ramieniem OC za pomocą pręta pionowego CE. Pomost jest zawsze poziomy, a w równowadze szali pustej albo obciążonej dźwignia powinna zostawać pozioma.

Przypuszczając ciężary P, Q w równowadze, i dźwignię AB w położeniu poziomem, rozłóżmy ciężar Q ciała, przyłożony do jego środka ciężkości G, na dwie siły równoległe q i q', przyłożone pierwsza w H druga w N; będziemy mieli

$$\frac{q}{KN} = \frac{q'}{KH} = \frac{Q}{HN}.$$

zkąd

$$q = \frac{KN}{HN} Q, \qquad q' = \frac{HK}{HN} Q.$$

Siłę q można uważać jako przyłożoną w punkcie F deski DE, i rozłożyć ją na dwie siły q_1 i q_2, przyłożone pierwsza w D druga w E. Pierwsza jest zniszczona przez oś stałą D, druga wyraża tężność pręta CE. Natężenia tych dwóch sił są

$$q_1 = \frac{EF}{DE} q = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{KN}{HN} Q,$$

$$q_2 = \frac{DF}{DE} q = \frac{DF}{DE} \cdot \frac{KN}{HN} Q.$$

Można teraz przenieść siły q' i q_2, pierwszą do B drugą do C. Owoż, żeby trzy siły równoległe P, q', q_2, przyłożone w punktach A, B, C dźwigni AB, były w równowadze około punktu stałego O, trzeba i dość jest żeby summa ich momentów względem tego punktu była zero; mamy więc

$$P.OA = \frac{HK.OB}{HN} Q + \frac{DF.KN.OC}{DE.HN} Q.$$

Ale można urządzić rzeczy tak żeby było

$$\frac{DF}{DE} = \frac{OB}{OC};$$

przez podstawienie tego stosunku ostatnie równanie bierze kształt bardzo prosty

$$P.OA = \frac{HK + KN}{HN} Q.OB = Q.OB,$$

albo

$$\frac{P}{Q} = \frac{OB}{OA}.$$

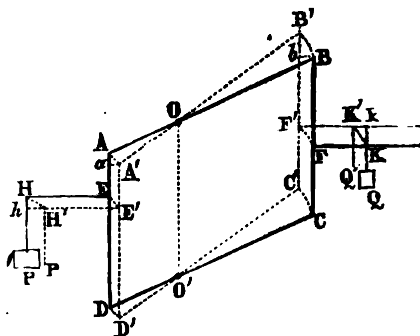
Takie jest równanie równowagi w szali *Quintenza.* Jeśli $OA = 10.OB$ będzie $P = \frac{Q}{10}$; co usprawiedliwia nazwisko szali dziesiętnej.

Otrzymane równanie pokazuje że ciężary P i Q czynią sobie równowagę, za pomocą szali dziesiętnej, tak jak gdyby ciężar Q był zawieszony w punkcie B dźwigni AB; więc ta równowaga istnieje niezależnie od miejsca jakie ciało G zajmuje na pomoście. Ale zmiana miejsca ciała G wpływa na tężność prętów BN, CE, i na parcie osi D. Jakoż, gdy się ciało G zbliża do ściany IJ, siła q zmniejsza się, a temsamem parcie q_1 na oś D i tężność q_2 pręta CE maleją; przeciwnie tężność q' pręta BD rośnie. Co do punktu stałego O dźwigni, parcie jakiego on doznaje jest oczywiście równe summie

$$P + q' + q_2 = P + Q - \frac{BC}{OC} \cdot \frac{KN}{HN} Q.$$

To więc parcie jest zawsze mniejsze od $P + Q$.

300. Szala Roberval'a. Ta szala jest poprostu równoległobokiem ABCD, którego dwa boki przeciwne AD i BC są pio-



nowe, a dwa inne AB i DC mogą się obracać około dwóch

punktów stałych O i O' leżących na jednej pionowej. W przekształceniach figury, boki pionowe AD i BC zostają ciągle równoległe do pionowej stałej OO'. Do boków pionowych są przytwierdzone, w punktach E i F wziętych dowolnie, ramiona poziome EH i FK, na których są zawieszone ciężary P i Q w punktach jakichkolwiek H i K.

Znajduje się równie łatwo jak prosto warunek równowagi tego układu, stosując ogólne twierdzenie pracy przysposobionej. W tym celu, dajemy nieskończenie małe przekształcenie równoległobokowi, obracając jednym nieskończenie małym kątem AOA' = BOB', boki AB i DC około punktów O, O', i przemieszczając równolegle do pionowej OO' boki pionowe AD i BC które pociągają za sobą ciężary P i Q. W takiem przemieszczeniu przysposobionem punkt H zniża się ilością Hh, która jest równa rzutowi Aa, na pionowej AD, drogi AA' przebieżonej przez wierzchołek A; a punkt K wznosi się ilością Kk, która jest równa rzutowi pionowemu B'b drogi przebieżonej przez wierzchołek B. Oczywiście jest

$$Hh = Aa \quad \text{i} \quad Kk = B'b.$$

Owoż, Aa, B'b są rzutami pionowemi cięciw AA', BB', a te cięciwy są równoległe między sobą i proporcyonalne do promieni AO, OB; więc rzuty Hh, Kk są proporcyonalne do promieni OA, OB, i mamy

$$\frac{Hh}{OA} = \frac{Kk}{OB}.$$

Ale twierdzenie pracy przysposobionej daje ogólne równanie równowagi

$$P.Hh = Q.Kk;$$

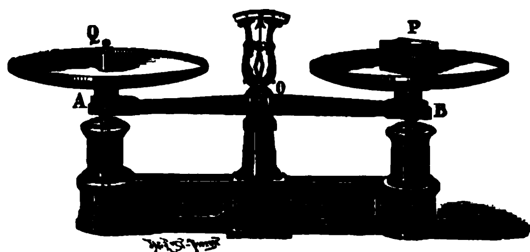
ztąd, dzieląc te dwa równania stronami, otrzymujemy szukany

warunek równowagi

$$P.OA = Q.OB.$$

To równanie zawiera tylko stosunek odcinków OA i OB boku AB. Więc, jeśli ciężary P i Q czynią mu zadość, równowaga będzie istniała jakikolwiek dano kształt równoległobokowi ABCD, jakiekolwiek są punkta E i F w których przytwierdzono ramiona EH i FK, i nakoniec jakiekolwiek są punkta H i K na których zawieszono ciężary P i Q. Więc ta równowaga jest *obojętna*, ponieważ istnieje we wszystkich położeniach figury ruchomej. Przemieszczenia ciężarów P, Q, i przekształcenia równoległoboku nie zmieniają równowagi; ale oczywiście wpływają na tężności boków AD, DC i na parcia jakie punkta stałe O, O′ wytrzymują.

301. W szali *Roberval'a*, teraz powszechnie używanej do ważenia, punkta stałe O, O′ są we środku boków poziomych AB, DC, a ciężary P i Q, zamiast być zawieszone na ramionach EH i FK,

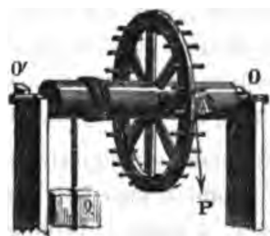


kładą się na talerzykach stale połączonych z bokami pionowemi AD i BC. W tym przyrządzie równanie równowagi wymaga żeby było P = Q; co jest właśnie przeznaczeniem dobrej szali. Ale trzeba jeszcze żeby szala była czuła i tarcie najmniejsze możebne. Otrzymuje się potrzebną czułość szali, jeśli środek ciężkości każdego z dwóch drążków AB i DC, ustawionych poziomo, przypada na pionowej OO′ cokolwiek niżej punktów O i O′; bo wtedy

ciężary tych drążków przywodzą je na położenia poziome, ograniczając przekształcenia równoległoboku pod działaniem nierównych ciężarów położonych na talerzykach. Nakoniec, dla zmniejszenia tarcia, wszystkie części ruchome szali, zamiast na osiach, powinny się obracać na krawędziach ostrych graniastonów trójkątnych.

RÓWNOWAGA I RUCH KOŁOWROTU Z TARCIEM.

302. Kołowrot składa się z walca zakończonego z obydwóch stron dwoma małemi walcami czyli *czopami*, i z koła na nim osadzonego solidarnie. Czopy O i O' mają z walcem spólną



oś i opierają się każdy na powierzchni wewnętrznej półwalca, zwanego *panwią*, wyrobionego w podporach stałych. Machina obraca się około swojej osi figury ruchem ślizgania czopów w panwiach. Siła poruszająca P jest styczna do koła A; oporem do przezwyciężenia jest ciało Q przywiązane do skrajności sznura który, nawijając się na walec, zbliża je do kołowrotu. Zwykle kołowrot służy do windowania ciężarów; w tym ogólnym przypadku jego oś jest pozioma, a siła poruszająca działa najczęściej przez dwie korby na przemian równoległe, osadzone na czopach walca, albo przez kołki wbite w dzwona koła solidarnego z walcem; a niekiedy za pomocą drążka wkładanego w otwory na ten cel wydrążone w walcu. Albo jeszcze ta siła

jest styczna do koła, na którego szczeble wstępuje robotnik i własnym ciężarem przeważa; jak się to dzieje w wydobywaniu kamieni z kopalni. Daliśmy już równanie ruchu kołowrotu w n^{rze} 229, ale bez tarcia; bo tam chodziło nam tylko o przykład ruchu ciała bryłowego około osi stałej. Wskażemy tutaj równanie równowagi i równanie ruchu kołowrotu z tarciem czopów na panwiach, jako przykład machin w stanie równowagi i machin w stanie ruchu.

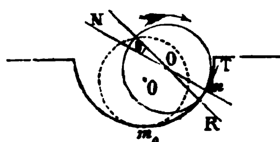
303. Równowaga kołowrotu z tarciem. Nie można twierdzić a priori że stan ruchu nie zmienia oddziaływań punktów stałych: a trzebaby znać naprzód te oddziaływania aby wiedzieć jakie wprowadzić tarcie do równań równowagi. W niewiadomości fizycznego stanu rzeczy, przypuszczamy poprostu że równowaga której równania szukamy jest w chwili zerwania się, i bierzemy tarcie jakieby miało miejsce przy zaczęciu ruchu w danym kierunku. Tym sposobem mamy do rozwiązywania wyraźne zagadnienie, któreby inaczej było niewyznaczone.

Przypuszczając kołowrot symetryczny względem osi obrotu, oznaczamy przez p promień jego koła do którego stycznnie jest przyłożona siła P, i przez q promień walca do którego także stycznnie jest przyłożony ciężar Q; a nazywamy ρ promień każdego z dwóch równych czopów. Promień ρ jest cokolwiek mniejszy od promienia panwi, dlatego żeby czop mógł się w niej obracać bez zawady, i miał z nią zetknięcie wedle jednej tylko krawędzi. Z parcia czopu na panwię wynika tarcie, które siła mająca sprawić ruch kołowrotu zniszczyć powinna. Dla wyrachowania tego tarcia, możemy najpierwej przenieść, równolegle do ich kierunku, siły P i Q, każdą do jednego z punktów osi, wprowadzając tylko dwojany $(P, -P)$, $(Q, -Q)$. Te dwojany nie prą osi na jej podpory, dlatego że ta oś kołowrotu, będąca z założenia osią symetryi figury, jest jego osią główną bezwładności. Poczem, rozkładamy siły P, Q i ciężar ϖ kołowrotu na składowe αP, βQ, $\gamma\varpi$, i $\alpha' P$, $\beta' Q$, $\gamma'\varpi$ przyłożone

odpowiednio do osi dwóch czopów, biorąc

$$\alpha+\alpha'=1,\quad \beta+\beta'=1,\quad \gamma+\gamma'=1.$$

Uważajmy teraz czop O do którego są przyłożone w jednym punkcie jego osi, siły αP, βQ, $\gamma\varpi$. Figura przedstawia przecięcie proste czopu i panwi, uczynione przez płasczyznę prostopadłą



do osi, w założeniu że czop obraca się w stronę wskazaną przez strzałę. Oczywiście w stanie spoczynku zetknięcie czopu z panwią przypada w punkcie najniższym m_0. Ale, w chwili gdy się ruch ma zacząć, siły działające na kołowrót przypierają czop O, naprzykład, do panwi która na niego oddziaływa nawzajem. Oddziaływanie panwi jest normalne N, i styczenne $T=f$N które stanowi tarcie skierowane w stronę przeciwną powstającego ruchu. Owoż, wynikowa tych dwóch sił prostokątnych, wyrażająca oddziaływanie panwi, równa się $N\sqrt{1+f^2}$; jeśli więc nazwiemy R wynikowę sił które sprawiają parcie czopu O na panwię, będzie

$$N\sqrt{1+f^2}=R.$$

Zatem tarcie czopu O w panwi przedstawią się, co do wielkości i kierunku, przez

$$\frac{Rf}{\sqrt{1+f^2}}=R\,\mathrm{wst}\varphi;$$

gdzie φ znaczy kąt tarcia przy zaczęciu ruchu. Ta właśnie siła

tarcia przemieszcza punkt m_0 i podnosi go do położenia m, w stronę toczenia się czopu.

Tak samo, nazywając R′ wynikowę sił które prą na czop O′, tarcie tego czopu wyrazi się przez $R'\text{wst}\varphi$, w przypuszczeniu że kąt tarcia jest ten sam dla obydwóch czopów; co zwykle ma miejsce.

To ustaliwszy, widzimy że kołowrót jest poddany pięciu siłom P, Q, ϖ, $R\text{wst}\varphi$, $R'\text{wst}\varphi$; więc, żeby zostawał w spoczynku albo się obracał jednostajnie około swojej osi symetryi, trzeba i dość jest żeby summa momentów tych sił względem osi była zero; co daje równanie

$$(1) \qquad Pp = Qq + (R + R')\rho\,\text{wst}\varphi.$$

Siły R i R′ wyrażają się w funkcyi sił P, Q, ϖ. Jakoż, czyniąc $\beta Q + \gamma\varpi = S$, mamy dla czopu O

$$(2) \qquad R^2 = \alpha^2P^2 + S^2 + 2\alpha PS\,\text{dos}(P, Q);$$

czyniąc podobnie $\beta'Q + \gamma'\varpi = S'$, będzie dla czopu O′

$$(3) \qquad R'^2 = \alpha'^2P^2 + S'^2 + 2\alpha'PS'\,\text{dos}(P, Q).$$

Jeśli więc, w równaniu (1), zastąpimy summę $R + R'$ przez jej wartość, będzie można, znając kierunek siły P, znaleźć wielkość potrzebną do zrównoważenia oporu Q. Ale ilości R i R′ są pierwiastnikami w których siła P wchodzi w kwadracie; zatem, gdyby zniesiono te pierwiastniki, mianoby dla wyznaczenia niewiadomej P równanie 4^go^ stopnia, którego pierwiastki, w rzadkich tylko i bardzo szczególnych przypadkach, metodami elementarnemi wyrachować się dają.

Zamiast rugowania, otrzymuje się wartość niewiadomej P *metodą przybliżeń po sobie idących*, często używaną w zastoso-

waniach. I tak, w równaniu (1) zaniedbujemy najpierwej tarcie i znajdujemy wartość P_1 przybliżoną przez niedostatek,

$$P_1 = \frac{q}{p} Q,$$

która pokazuje że, *gdyby nie było tarcia w kołowrocie, siła miałaby się do oporu jako promień walca do promienia koła.*

Dla większej ścisłości, wprowadza się do rachunku ciężar sznura, na którym jest zawieszone ciało Q, i grubość tego sznura; oznaczając przez Q summę ciężarów ciała i sznura, a przez q summę promieni walca i sznura. Otrzymana tym sposobem pierwsza przybliżona wartość P_1 niewiadomej P, poniesiona do równań (2) i (3) daje wartości przybliżone dla R i R'; a te ostatnie podstawione w równaniu (1) wyznaczają drugą, więcej przybliżoną, wartość P_2 niewiadomej P. Wartość P_2 posłuży do wyrachowania trzeciej wartości przybliżonej P_3; i tak dalej. Zwykle P_2 i P_3 różnią się bardzo mało, i można uważać P_3 za wartość dostatecznie przybliżoną niewiadomej P. Zresztą, nie trzeba posuwać daleko rachunku przybliżeń, bo wartości f i φ, wpisane w tablicach, nie są dokładne tylko przybliżone.

304. Cała praca tarcia obydwóch czopów na panwiach, po jednym zupełnym obrocie wału, równa się wieloczynowi $(R + R')\rho \operatorname{wst}\varphi . 2\pi$, który pokazuje że ta praca bierna maleje ze zmniejszeniem promienia ρ czopów. Ale to zmniejszenie jest ograniczone, dlatego że czopy powinny wytrzymywać obciążenie, pochodzące z siły poruszającej P, z ciężaru windowanego Q i z ciężaru ϖ kołowrotu. Biorąc czopy żelazne można im dać małe rozmiary; gdyby jednak zmniejszono czopy poza pewną granicę, powiększonoby spółczynnik f tarcia z przyczyny wypędzonego łatwo smarowidła, i tym sposobem straconoby więcej niż zyskano. Sama praktyka nastręcza w każdym przypadku najkorzystniejsze rozwiązanie.

305. Rozwiązanie zagadnienia równowagi kołowrotu upraszcza się w przypadku dość ogólnym w którym obie siły P i Q są pionowe. Albowiem wtedy parcia jakich doznają panwie dwóch czopów wyrażają się przez

$$R = \alpha P + \beta Q + \gamma\varpi,$$

$$R' = \alpha' P + \beta' Q + \gamma'\varpi;$$

co daje

$$R + R' = P + Q + \varpi.$$

Przez podstawienie tej wartości, równanie momentów daje równanie równowagi kołowrotu

(4) $$Pp = Qq + (P + Q + \varpi)\rho \operatorname{wst}\varphi;$$

zkąd

(5) $$P = \frac{Qq + (Q + \varpi)\rho \operatorname{wst}\varphi}{p - \rho \operatorname{wst}\varphi}.$$

Formuła pokazuje że siła P, większa od $\frac{Qq}{p}$, rośnie z tarciem; co samo z siebie widoczne.

Za pomocą formuły (5) można łatwo porównać pracę poruszającą z pracą użyteczną. Jakoż, po jednym obrocie wału, stosunek dwóch prac wyraża się przez

$$\frac{P.2\pi p}{Q.2\pi q} = \frac{p + \left(\frac{p}{q} + \frac{\varpi}{Q}\right)\rho \operatorname{wst}\varphi}{p - \rho \operatorname{wst}\varphi}.$$

Druga strona jest niewątpliwie większa od jedności; więc w kołowrocie praca poruszająca jest zawsze większa od pracy

użytecznej, i kołowrót jest tem korzystniejszy pod względem pracy użytecznej im ma większy opór do pokonania.

Jeśli ciężar Q ma się spuszczać ruchem jednostajnym, a siła P jest użyta do wstrzymywania go żeby nie brał ruchu przyspieszonego, trzeba uważać P jako opór a zaś Q jako siłę poruszającą, ponieważ ta ostatnia musi przezwyciężać tarcie. Wtedy równanie momentów będzie

$$Qq = Pp + (P + Q + \varpi)\rho \operatorname{wst}\varphi$$

zkąd

$$(6) \qquad P = \frac{Qq - (Q + \varpi)\rho \operatorname{wst}\varphi}{p + \rho \operatorname{wst}\varphi}.$$

Ta formuła dowodzi że wielkość siły P jest mniejsza od wartości $\frac{Qq}{p}$ którąby miała gdyby nie było tarcia. W tym przypadku tarcie dopomaga sile P. Jeśliby więc machina była przeznaczona jedynie do spuszczania cieżarów ruchem jednostajnym, byłoby korzystnie dać jej czopom przyzwoicie wielki promień, aby otrzymać dostateczne tarcie i tym sposobem oszczędzić siły P.

306. W przypadku gdy siła windująca ciężar Q działa z dołu do góry, będzie

$$R + R' = Q + \varpi - P,$$

i następnie

$$Pp = Qq + (Q + \varpi - P)\rho \operatorname{wst}\varphi;$$

więc

$$(7) \qquad P = \frac{Qq + (Q + \varpi)\rho \operatorname{wst}\varphi}{p + \rho \operatorname{wst}\varphi}.$$

Ta wartość siły P, oczywiście mniejsza od wartości wymaganej przez formułę (5), jest większa od $\frac{Qq}{p}$.

Ale, jeśli siła P, działająca z dołu do góry, wstrzymuje ciężar Q który się spuszcza ruchem jednostajnym, wtedy

$$(8) \qquad P = \frac{Qq - (Q + \varpi)\rho \operatorname{wst} \varphi}{p - \rho \operatorname{wst} \varphi},$$

a ta wartość jest mniejsza od $\frac{Qq}{p}$.

307. Uwaga. Gdy siła poruszająca kołowrotu nie jest styczna do jego koła, to się rozkłada na trzy siły prostokątne, 1° na styczenną do koła która sprawia ruch, 2° na normalną która prze jego oś, i 3° na równoległą do tej osi. Ostatnią wolno zastąpić przez siłę działającą wzdłuż osi i przez dwojan. Owoż, można obrócić dwojan tak żeby obie jego siły przechodziły przez punkta oparcia czopów; więc siła równoległa do osi kołowrotu powiększa tylko tarcie jego czopów na panwiach wzdłuż i w poprzek. Ztąd wynika że największy skutek użyteczny sprawia sama tylko siła styczenna.

308. Ruch kołowrotu z tarciem. Szukajmy teraz ustawy ruchu kołowrotu, wprowadzając do rachunku tarcie czopów na panwiach. Ciężar sznurów, za pośrednictwem których ciężary P i Q działają, jest ciągle zmienny tak w częściach nawiniętych na walcu jak wiszących. W praktyce, obok innych przybliżeń, można wziąć średni ciężar sznurów i uważać go za stateczny. Ale, ponieważ całe sznury mają ciężary bardzo małe w porównaniu z ciężarami P i Q, nie będziemy na nie zważali w tem zagadnieniu, i, przypuszczając oba sznury dostatecznie giętkie, nazwiemy T i T' ich tężności które wyrachujemy.

To ustaliwszy, możemy uważać kołowrót jako układ bryłowy poruszający się około osi stałej, pod działaniem sił T, T', ϖ

(ciężar kołowrotu), i oddziaływań obydwóch panwi na czopy. Owoż, środek ciężkości kołowrotu zostaje nieruchomy; więc wynikowa oddziaływań jest równa wynikowej sił T, T', ϖ i do niej przeciwnie równoległa, ta zaś ostatnia jest summą $T + T' + \varpi$. Ztąd wnosimy że tarcie, styczne do czopów, równa się ilości

$$(T + T' + \varpi)\operatorname{wst}\varphi$$

w której φ znaczy kąt tarcia podczas ruchu.

Więc, biorąc summę momentów wszystkich sił, względem osi obrotu, mamy (207)

$$\frac{d\omega}{dt}\sum mr^2 = Tp - T'q - (T + T' + \varpi)\rho\operatorname{wst}\varphi.$$

Ale wiemy że tężności T, T', jako siły stracone, są dane przez równania

$$(9) \qquad T = P - \frac{P}{g}p\frac{d\omega}{dt}, \qquad (10) \qquad T' = Q + \frac{Q}{g}q\frac{d\omega}{dt},$$

które zresztą wyrażają równania ruchu ciężarów P i Q uważanych osobno.

Podstawiając wartości T i T', otrzymujemy szukane równanie

$$(11) \qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\{Pp - Qq - (P + Q + \varpi)\rho\operatorname{wst}\varphi\}g}{g\Sigma mr^2 + Pp^2 + Qq^2 - (Pp - Qq)\rho\operatorname{wst}\varphi},$$

które pokazuje że ogólnie ruch kołowrotu jest jednostajnie przyspieszony.

Jeśli w równaniu (11) uczynimy $\frac{d\omega}{dt} = 0$, znajdziemy równanie (4) równowagi kołowrotu, otrzymane wyżej (305).

Znając przyspieszenie kątowe $\frac{d\omega}{dt}$, możemy podstawić jego wartość w równaniach (9), (10), i wyznaczyć tężności T, T'. Nie wykonywając nawet rachunku, widzimy zaraz że,

$$\text{jeśli} \quad \frac{d\omega}{dt} > 0, \quad \text{będzie} \quad T > P \quad \text{a} \quad T' < Q;$$

$$\text{przeciwnie, jeśli} \quad \frac{d\omega}{dt} < 0 \quad \text{będzie} \quad T < P \quad \text{a} \quad T' > Q.$$

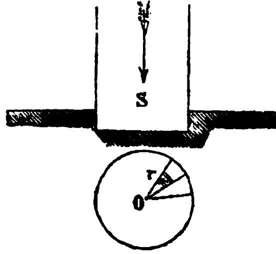
Więc zawsze tężność sznura przez który działa ciężar poruszający jest mniejsza od tego ciężaru, a zaś tężność sznura na którym wisi ciężar windowany jest większa od niego. Te dwie tężności nie są równe odpowiedającym ciężarom tylko wtedy kiedy $\frac{d\omega}{dt} = 0$, to jest kiedy kołowrót ma ruch jednostajny albo zostaje w spoczynku.

309. Kabestan. Kołowrót mający oś pionową nazywa się *kabestanem*, którego używają zazwyczaj w portach. Przez część górną walca tego kołowrotu przechodzi na wylot poziomy drążek, do którego krańców przykładają się poziome siły; a zaś powróz przywiązany do oporu ciągnie go, nawijając się z jednej strony na walec a odwijając z drugiej; ma się rozumieć że kabestan jest mocno do ziemi przytwierdzony żeby nie ustąpił oddziaływaniu oporu.

Teorya kabestanu jest ta sama co kołowrotu, z tą tylko różnicą że ciężar walca z drążkiem opiera się na powierzchni poziomej na której sprawia tarcie. Oto jak się może wyrachować moment tego tarcia, który wchodzi do równania równowagi kabestanu.

Niech będzie S siła wyrażająca ciężar walca pionowego którego kraniec obraca się na powierzchni koła O, mającego pro-

mień R. Przypuszczając że działanie siły S rozdziela się jedno-



stajnie na całej powierzchni koła O, parcie jakiego doznaje nieskończenie mała cząstka $rdrd\theta$ tej powierzchni ma za miarę

$$\frac{S}{\pi R^2} rdrd\theta,$$

a tarcie odpowiedające tej cząstce wyraża się przez

$$\frac{fS}{\pi R^2} rdrd\theta.$$

Owoż, moment tego tarcia względem osi walca jest oczywiście

$$\frac{fS}{\pi R^2} r^2 drd\theta;$$

więc będziemy mieli moment całego tarcia, odpowiedającego powierzchni na której się obraca kraniec (albo czop) walca, całkując powyższe wyrażenie od $r=0$ aż do $r=R$, i od $\theta=0$ do $\theta=2\pi$. Co daje

$$\frac{fS}{\pi R^2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^2 dr = \frac{2}{3} fSR.$$

Jeśli płaszczyzna zetknięcia na której trze czop walca jest powierzchnią obrączkową, zawartą między dwoma okręgami promieni R_0 i R, będzie

$$\frac{fS}{\pi(R^2-R_0^2)}\int_0^{2\pi}d\theta\int_{R_0}^{R}r^2dr=\frac{2}{3}fS\frac{R^2+RR_0+R_0^2}{R+R_0}.$$

BLOK CZYLI KRĄŻEK.

310. Nazywa się *blokiem* krąg kołowy K mogący się obracać na swojej osi O figury, utrzymanej w *osadzie* OC. Obwód kręgu jest wyżłobiony, i w jego wydrążenie wchodzi sznur AKB pod-

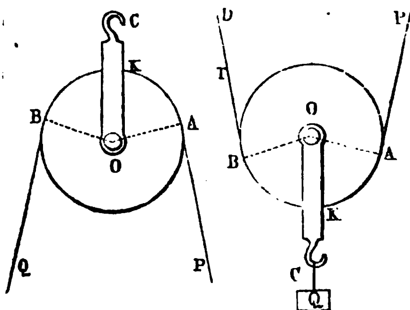


fig. 1. fig. 2.

pasujący pewny łuk. Sam krąg albo jest przytwierdzony do walca z którym się obraca jako kołowrót, na dwóch czopach opartych na panwiach wyrobionych w osadzie; albo ten sam krąg obraca się na walcu, stale do osady przymocowanym, który przechodzi przez tak zwane *oko* bloku, to jest przez otwór dostatnio wydrążony w jego środku. Blok nazywa się *stałym* (*fig.* 1) gdy jego osada jest zawieszona na punkcie stałym C; albo *ruchomym* (*fig.* 2), gdy ta osada razem z nim się porusza. W bloku

stałym, do jednej skrajności sznura jest przyłożona stycznie siła poruszająca P, a do drugiej także stycznie, siła opierająca się Q; w bloku ruchomym siła P jest przyłożona stycznie, do jednej części sznura którego druga część jest utkwiona w punkcie stałym D; a ciężar Q, stanowiący opór, jest zawieszony na haku C osady.

Blok stały. Jeśli sznur jest bardzo giętki, blok stały z czopami może być uważany jako szczególny przypadek kołowrotu w którym $p = q$ i $R = R'$. Więc, nazywając r promień kręgu powiększony promieniem sznura, mamy równanie

$$Pr = Qr + 2R\rho \operatorname{wst} \varphi,$$

w którem 2R jest wynikową sił P, Q i ciężaru ϖ bloku.

Zwykle siły P i Q są pionowe; wtedy

$$2R = P + Q + \varpi.$$

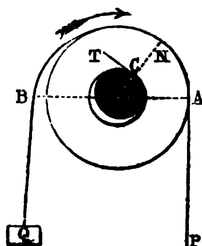
Zatem równanie ruchu jednostajnego albo równowagi bloku stałego jest

$$(12) \qquad Pr = Qr + (P + Q + \varpi)\rho \operatorname{wst} \varphi.$$

φ znaczy tu kąt tarcia w ruchu jednostajnym, a ρ jest promieniem równych czopów bloku. Ale, jeśli blok obraca się na osi połączonej stale z osadą, wtedy ρ oznacza promień oka bloku; w tym przypadku, zetknięcie między okiem i osią walcową niezmienną odbywa się w części wyższej tego oka, ze strony siły poruszającej.

311. Sztywność sznurów. Gdy na bloku, albo na toczącym się walcu, jest przewieszony sznur pod działaniem sił P i Q, przyłożonych do jego skrajności, doświadczenie pokazuje że,

podczas ruchu jednostajnego albo w chwili jego zaczęcia, jeśli sznur nie jest dostatecznie cienki i bardzo giętki, siła porusza-



jąca P jest większa od siły opierającej się Q, ilością która przewyższa powiększenie wynikające z tarcia bloku. To zjawisko jest skutkiem sztywności sznura. Część BQ sznura, na którą działa opór Q, nie przylega dokładnie do krążka w punkcie B; sztywność sznura oddala ją od osi, aby nadać zmienności krzywizny większą rozciągłość. Co powiększa moment oporu Q. Dla tej samej przyczyny część sznura AP, do której jest przyłożona siła P, nie traci raptem w punkcie A krzywizny którą wzięła na krążku, i sztywność zbliża ją do osi. Ztąd pochodzi praca bierna użyta na pokonanie sztywności, która tłumaczy dlaczego musi być $P > Q$ w ruchu jednostajnym bloku, choćby nawet nie istniało tarcie.

Kulomb, z wielu doświadczeń uczynionych w tym przedmiocie, wniósł że, nie zważając na tarcie osi bloku można, z dostatecznem przybliżeniem, wyrażić przewyżkę $P-Q$ przez formułę

$$P-Q=\frac{a+bQ}{2r},$$

w której r znaczy promień bloku powiększony promieniem sznura, a spółczynniki a i b oznaczają dwie ilości niezależne od Q i r, ale zmienne z średnicą sznura, i z jego stanem fizycznym.

Oto kilka wartości tych spółczynników które wyrachował *Navier*.

	średnica	wartość a	wartość b
Sznur biały z 30 splotów	0^m,020	0,222	0,0097
« « 15	0, 014	0,064	0,0055
« « 6	0, 009	0,011	0,0024
sznur smarowany smołą 30	0, 024	0,350	0,0126
« « 15	0, 017	0,106	0,0061
« « 6	0, 010	0,021	0,0026.

312. Jeśli weźmiemy pod rachunek sztywność sznura, uważając że, na mocy powyższéj formuły *Kulomba*, trzeba dodać przewyżkę $\frac{a+bQ}{2r}$ do siły opierającej się Q, i temsamem powiększyć jej moment względem osi bloku ilością $\frac{1}{2}(a+bQ)$, będziemy mieli, dla ruchu jednostajnego albo równowagi bloku stałego pod działaniem sił pionowych, ogólne równanie

$$(13)\qquad Pr = Qr + \frac{1}{2}(a+bQ) + (P+Q+\varpi)\rho \,\mathrm{wst}\varphi;$$

zkąd

$$(14)\qquad P = \frac{\frac{1}{2}a + \varpi\rho\,\mathrm{wst}\varphi + (r + \frac{1}{2}b + \rho\,\mathrm{wst}\varphi)Q}{r - \rho\,\mathrm{wst}\varphi}.$$

Ta wartość dowodzi że siła P, zawsze większa od ciężaru Q, rośnie z tarciem i z promieniem czopów albo oka bloku.

Ostatnia formuła, przedstawiona w kształcie ogólnym

$$P = \alpha + \beta Q$$

który nam wkrótce będzie użyteczny, pokazuje że, pod względ-

dem oszczędności tak siły poruszającej jako pracy poruszającej, blok stały jest tem korzystniejszy im ciężar do podniesienia jest większy.

Przypuszczając że nie ma tarcia osi ani sztywności sznura, byłoby $P = Q$. To dowodzi że blok stały służy głównie do zmiany kierunku siły poruszającej nie do jej oszczędzania.

Gdyby ciężar Q nie wznosił się ale opadał, a siła P była użyta do zachowania ruchu jednostajnego, wtedy Q byłoby siłą poruszającą a zaś P siłą opierającą się. Dość więc, w równaniu (13) przemienić między sobą siły P i Q; co daje

$$(15) \qquad P = \frac{(r - \rho \,\mathrm{wst}\varphi)Q - \frac{1}{2}a - \varpi\rho \,\mathrm{wst}\varphi}{r + \rho \,\mathrm{wst}\varphi + \frac{1}{2}b}.$$

W tym przypadku tarcie czopów i sztywność sznura pomagają sile poruszającej, i ta siła ma wartość mniejszą niżby miała gdyby nie było ani tarcia czopów, ani sztywności sznurów.

313. Blok ruchomy. Niech będzie blok ruchomy obracający się około osi poziomej przytwierdzonej do osady (*fig.* 2). Przypadek najużyteczniejszy do uważania jest ten w którym sznury AP i BD są pionowe, a te sznury są zwykle cienkie i tak giętkie że można zaniedbać ich sztywność. Biorąc ten przypadek widzimy że, gdy blok wznosi się pionowo, siły do niego przyłożone są w równowadze, i tak samo siły przyłożone do osady czynią sobie równowagę.

Otóż, osada jest pod działaniem trzech sił, które są: ciężar Q ciała przyczepionego do osady, ciężar ϖ samej osady, i oddziaływanie R bloku. Ponieważ te trzy siły są w równowadze, trzeba żeby oddziaływanie R było pionowe tak jak dwie siły Q i ϖ, i równało się ich summie; co daje

$$R = Q + \varpi.$$

Uważajmy teraz równowagę sił przyłożonych do bloku; te siły są: siła poruszająca P, tężność T sznura BD, ciężar ϖ bloku, i nakoniec oddziaływanie R osady na blok. Te cztery siły są pionowe; trzeba więc dla równowagi, żeby ich summa algebryczna była zero. Co daje

$$P + T - \varpi - R = 0, \quad \text{zkąd} \quad T = R + \varpi - P,$$

albo, na mocy poprzedzającego równania,

$$T = Q + \varpi' + \varpi - P.$$

Oznaczmy przez r promień bloku powiększony promieniem sznura, a przez ρ promień oka bloku, i weźmy momenta czterech sił P, T, R, ϖ, względem idealnej osi O, przechodzącej przez środek oka bloku, około której ten blok się obraca. Zważając że moment ciężaru ϖ bloku jest zero względem osi O, i mając wzgląd na stronę w którą każda z sił nadaje dążność do obrotu, znajdujemy

$$Pr - Tr - R\rho \operatorname{wst}\varphi = 0;$$

więc, podstawiając za T i R ich wartości, mamy równanie momentów

$$(16) \quad Pr - (Q + \varpi' + \varpi - P)r - (Q + \varpi')\rho \operatorname{wst}\varphi = 0.$$

Zkąd

$$P = \frac{r + \rho \operatorname{wst}\varphi}{2r}(Q + \varpi') + \frac{\varpi}{2}.$$

Ta wartość pokazuje że siła poruszająca P przewyższa połowę całego obciążenia $Q + \varpi' + \varpi$; a gdyby nie istniało tarcie byłoby

$$P = \frac{1}{2}(Q + \varpi' + \varpi).$$

Żeby porównać pracę siły poruszającej P z pracą siły opierającej się Q, trzeba uważać że, gdy blok wzniesie się na wysokość h, każda z dwóch długości AP i BD skróci się ilością h; a ponieważ cała długość sznura zostaje ta sama, trzeba dla zrównania żeby skrajność sznura, do której jest przyłożona siła poruszająca, przydłużyła się ilością $2h$. Jeśli więc praca siły Q jest Qh praca siły P będzie $P.2h$. Co daje

$$\frac{P.2h}{Qh} = 1 + \frac{\rho \operatorname{wst}\varphi}{r} + \frac{\varpi r + \dot{\varpi}(r + \rho \operatorname{wst}\varphi)}{Qr}.$$

Ten stosunek jest większy od jedności, i dowodzi że w bloku ruchomym praca siły poruszającej przewyższa zawsze pracę siły opierającej się, choćby nawet nie było tarcia.

314. Wielokrążek. Nazywa się wielokrążkiem machina składająca się z dwóch układów krążków równych.



W pierwszym krążki są nawleczone na jednej osi A, przytwierdzonej do osady stałej która jest zawieszona na punkcie niezmiennym O; w drugim układzie krążki, w tej samej liczbie co w pierwszym, są nawleczone także na jednej osi B, ale ta oś jest przymocowana do osady ruchomej u której wisi ciężar Q do podniesienia. Sznur przywiązany w punkcie C osady stałej, owija pierwszy krążek osady ruchomej i przechodzi na pierwszy krążek osady stałej; idzie potem na drugi krążek osady ruchomej i powraca owijając drugi krążek osady stałej; i tak następnie przechodzi przez wszystkie krążki. Do skrajności tego sznura jest przyłożona siła poruszająca P. Ta siła, byle tylko była styczna do ostatniego krążka, może oczywiście mieć kierunek jakikolwiek, który nie wpływa na obciążenie osady górnej i punktu stałego O, ani na tężności sznurów utrzymujących osadę dolną. Przypuszczając te dwie

osady przyzwoicie odległe od siebie, wolno uważać sznury jako równoległe między sobą.

Nazwijmy T_1, T_2, T_3,... T_n tężności wszystkich sznurów zawartych między krążkami. Ponieważ te sznury mniej więcej pionowe utrzymują ciężar Q, do którego możemy wliczyć ciężar osady dolnej, trzeba dla równowagi żeby było

$$(17) \qquad T_1 + T_2 + T_3 \ldots . T_n = Q.$$

Owoż, na mocy formuły (14) przedstawionej w kształcie ogólnym $P = \alpha + \beta Q$, mamy ciąg równań

$$(18) \qquad \begin{cases} T_2 = \alpha + \beta T_1, \\ T_3 = \alpha + \beta T_2, \\ T_4 = \alpha + \beta T_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ T_n = \alpha + \beta T_{n-1}, \\ P = \alpha + \beta T_n; \end{cases}$$

jeśli więc, między równaniami (17) i (18) wyrugujemy niewiadome tężności T_1, T_2, T_3... T_n, wyznaczymy siłę P. W tym celu mnożymy równania (18), pierwsze przez β^{n-1}, drugie przez β^{n-2}, trzecie przez β^{n-3},... ostatnie przez 1, i dodając otrzymujemy

$$P = \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\alpha + \beta^n T_1.$$

Poczem, dodajemy stronami te same równania (18), i zważając na równanie (17), znajdujemy

$$P + Q - T_1 = n\alpha + \beta Q_1.$$

Teraz dla wyrugowania niewiadomej T_1, pomnóżmy ostatnie równanie przez β^n, i odciągnijmy od niego przedostatnie, będziemy mieli równanie ruchu jednostajnego wielokrążka

$$(\beta^n - 1)P = \left(n\beta^n - \frac{\beta^n - 1}{\beta - 1}\right)\alpha + (\beta - 1)\beta^n Q;$$

zkąd

$$(19) \qquad P = \left(\frac{n\beta^n}{\beta^n - 1} - \frac{1}{\beta - 1}\right)\alpha + \frac{\beta - 1}{\beta^n - 1}\beta^n Q.$$

Formuła pokazuje że wielokrążek jest tem korzystniejszy im ciężary do podniesiēnia są mocniejsze.

Gdyby nie było tarcia krążków na osi, ani sztywności sznurów, mielibyśmy $\alpha = 0$ i $\beta = 1$; coby dało

$$P = \frac{Q}{n}.$$

Można wprost otrzymać tę formułę. Jakoż, gdy osada ruchoma wznosi się do wysokości h, każdy sznurek skraca się tą samą długością h; a ponieważ długość całego sznura zostaje stateczna, trzeba żeby punkt przyłożenia siły poruszającej P zniżył się wieloczynem nh, to jest długością h wziętą tyle razy ile jest sznurków między krążkami. Więc praca opierająca się wyraża się przez Qh a praca poruszająca przez Pnh; a że nie ma tarcia, summa algebryczna tych dwóch prac musi być zero. Co daje równanie

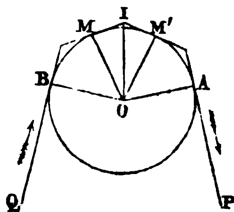
$$Pnh - Qh = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad P = \frac{Q}{n}.$$

W wielkich machinach, obok różnego rodzaju tarć które przeważną grają rolę, sztywność sznurów może być zaniedbana, i dlatego rzadko się ją wprowadza do rachunku skutków tych

machin. Ale w machinach mniejszych rozmiarów, albo w przypadkach szczegółowych jako obecny, sztywność znaczny wpływ wywiera na ruch, i nie wolno jej pomijać.

TARCIE SZNURÓW, ALBO PASÓW RZEMIENNYCH, NA WALCACH STAŁYCH

315. Tarcie sznurów albo pasów, okręconych na walcach stałych, jest równie ważnym jak ciekawym przedmiotem Mechaniki zastosowanej, o którym nieźle będzie kilka słów powiedzieć. Nazwijmy P i Q siły, poruszającą i opierającą się, przy-



łożone do obydwóch skrajności sznura obejmującego walec stały O, i przypuśćmy że te siły nadają sznurowi dążność do ruchu w stronę wskazaną przez strzały. Ponieważ tarcie jest proporcyonalne do parcia normalnego, szukajmy najpierwej tego parcia. Aby je wyznaczyć możemy, bez względu na sztywność, uważać sznur jakoby złożony z cząstek bryłowych, nieskończenie małych, ślizgających na walcu pod wpływem tężności pochodzących z działania sił P i Q. Niech będzie T tężność sznura w punkcie M, $T + dT$ tężność w punkcie sąsiednim M'; kierunki tych dwóch tężności spotykają się w punkcie I. Owoż, parcie normalne na walec jest wynikową tężności T i $T + dT$; więc, jeśli nazwiemy $d\tau$ kąt spółtyczności, parcie którego szukamy wyrazi się przez

$$(2T + dT) \text{wst} \frac{1}{2} d\tau;$$

a, zaniedbując nieskończenie małe rzędów wyższych od pierwszego, wartość tego parcia przywodzi się do

$$T d\tau.$$

Zatem nieskończenie małe tarcie w punkcie M będzie

$$fTd\tau.$$

To tarcie, w ruchu jednostajnym ślizgania sznura na walcu, jest zniszczone przez tężność dT nieskończenie małej cząstki tego sznura; mamy więc równanie

$$dT = fTd\tau;$$

całkując je otrzymujemy

$$\log T = f\tau + stat.$$

zkąd

$$T = Ce^{f\tau} \quad \text{albo} \quad T = Ce^{f\alpha}.$$

C znaczy stateczną dowolną, a τ jest summą kątów spółtyczności, która się równa kątowi α utworzonemu przez normalne w dwóch skrajnych punktach zetknięć sznura z walcem.

Jeśli teraz weźmiemy całkę, od punktu w którym tężność równa się oporowi Q, aż do punktu w którym tężność jest równa sile poruszającej P, będziemy mieli formułę

$$P = Qe^{f\alpha},$$

która pokazuje że stosunek siły poruszającej P do oporu Q jest funkcyą wykładniczą kąta α. Ten stosunek rośnie bardzo szybko

z kątem α; tak że trzeba niezmiernej siły P aby módz posuwać sznur kilka razy okręcony na walcu, choćby nawet opór Q nie był bardzo wielki. Następujący przykład lepiej to wyjaśni.

W sznurach suchych, nawiniętych na walcu drewnianym, spółczynnik tarcia $f = 0,13$; zkąd

$$e^{\pi f} = 1,50\ldots \quad e^{2\pi f} = 2,26\ldots \quad e^{4\pi f} = 5,11\ldots \quad e^{6\pi f} = 11,55\ldots$$

Więc, biorąc $Q = 100^{\text{kg}}$, będzie

$$P = 100e^{\pi . 0,13} = 150, \quad P = 100e^{2\pi . 0,13} = 226, \quad P = 100e^{6\pi . 0,13} = 1155.$$

316. Posługując się tarciem sznurów na walcach, można łatwo spuszczać po schodach pełne beczki do piwnicy. Przepasuje się beczkę sznurem, i, utkwiwszy kraniec jednej jego części, okręca się dwa albo trzy razy drugą część około stałego walca, na przykład około haku; poczem, trzymając w ręku część sznura będącą poza hakiem, popuszcza się ją zwolna; a beczka schodzi stopniowo aż do samego dołu schodów.

317. Używa się podobnego tarcia, gdy trzeba zatrzymać płynący statek. Mając już przywiązany jeden koniec liny do słupa wbitego w ziemię, flis okręca szybko drugą część tej liny, gdy jest jeszcze wietka, około słupa umocowanego na statku; poczem, trzymając w ręku część liny będącą poza okręceniem popuszcza ją zwolna; lina ślizga się na słupie, i jej tarcie wyczerpuje do szczętu prędkość statku.

Niech będzie Q ciężar naładowanego statku; *v* prędkość którą umorzyć chcemy; T tężność liny między dwoma słupami, T_1 tężność części poza okręceniem równa wysileniu flisa; *l* droga przebieżona przez statek od chwili w której prędkość jest *v* aż do chwili jej zniszczenia.

Równanie pracy, bez względu na słaby opór wody przeciw ruchowi statku, jest

$$\frac{Q}{2g}v^2 = Tl;$$

a tarcie ślizgania liny na słupie statku daje

$$T = T_1 e^{f\alpha}.$$

Ztąd wynika

$$\frac{Q}{2g}v^2 = lT_1 e^{f\alpha}.$$

Przypuszczając $Q = 500000^{kg}$, $v = 0^m,50$ $f = 0,13$, i $\alpha = 6\pi$ zkąd $e^{f\alpha} = 11,55$; mamy

$$lT_1 = 551,...$$

Dajmy na to że $T_1 = 25^{kg}$, będzie $l = 22^m$. A ponieważ ruch statku jest jednostajnie opóźniony i kończy się prędkością zero, aby znaleźć czas przebieżenia odległości $l = 22^m$, dość podzielić tę odległość przez średnią prędkość, to jest przez $0^m,25$; co daje czas 1' 28".

Tężność liny w tym przykładzie jest $T = 288^{kg},7$. Największa tężność, jaką może wytrzymać lina bez zerwania się, dochodzi do 3^{kg} na 1 millimetr kwadratowy przecięcia prostego.

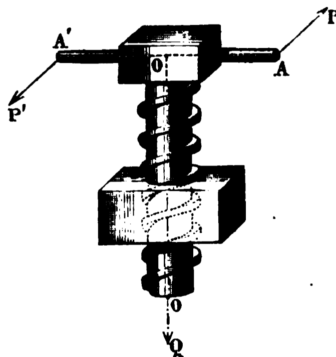
ŚRUBA Z GWINTEM KWADRATOWYM.

318. Wyobraźmy sobie walec obrotowy, i niech kwadrat, którego płaszczyzna przechodzi przez jego oś, obraca się około tej linii tak żeby jeden z boków zostawał ciągle na walcu i jego

punkta opisywały na nim helice. Wszystkie punkta kwadratu opiszą helice mające ten sam *krok*, ale promień ogólnie różny; a sam kwadrat utworzy na około walca część sterczącą którą nazwano *gwintem kwadratowym*. Walec okryty tym gwintem, stanowi *śrubę z gwintem kwadratowym*. Są śruby z gwintem trójkątnym utworzonym przez trójkąt równoboczny, w których krok helic jest równy podstawie trójkąta.

Jest druga sztuka bryłowa, zwana *mutrą*, mająca wydrążenie z gwintem helicowym w które wchodzi śruba tego samego kształtu, i może się w niej poruszać podwójnym ruchem, wirowania około jej osi i przeniesienia wzdłuż tej linii. Nawzajem, jeśli śruba jest stała, mutra może się posuwać wzdłuż osi śruby i zarazem się na niej obracać, to jest mieć ruch helicowy.

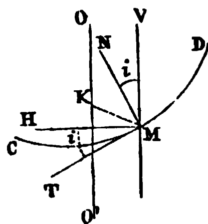
Dla utkwienia myśli, przypuszczamy, że mutra jest stała a śruba ruchoma. Niech będzie OO′ oś pionowa śruby z gwintem



kwadratowym. Siła poruszająca P jest pozioma i przyłożona prostopadle w punkcie A do drążka poziomego, który przechodzi przez głowę śruby. Można przenieść tę siłę równolegle, do punktu O osi, wprowadzając tylko dwojan (P, — P) mający moment PR. Tym sposobem będzie dwojan poruszający (P,—P) który sprawia ruch wirowy śruby, i siła P przyłożona do osi

śruby O a przez nią zniszczona; co sprawia parcie na oś OO'. Można także wprost przyłożyć do śruby sam tylko dwojan (P, — P) mający moment 2PR, przykładając symetrycznie do skrajności drążka dwie siły równe P i P'. Zostaniemy w pierwszem założeniu, biorąc do przezwyciężenia opór Q działający w kierunku OO' osi śruby, i będziemy szukali równowagi między siłami P, Q i oddziaływaniami rozwiniętemi w zetknięciu gwintu z mutrą.

Nie przeinaczając zagadnienia, wolno przypuścić że zetknięcie między śrubą i mutrą odbywa się wzdłuż jednej helicy średniej, leżącej w równej odległości od walca śruby i od walca stycznego do kończyn gwintu. Niech będzie CD ta helica średnia,



i KM$=r$ promień jednego z jej punktów zetknięcia M z mutrą. W założeniu że śruba ma dążność do ruchu wznoszącego się, poprowadźmy normalnę MN do powierzchni helicoidalnej, i styczną MT do helicy w stronę tarcia. Ponieważ gwint jest kwadratowy, te dwie linie leżą na płaszczyznie stycznej do walca na którym się znajduje helica średnia. Owoż, w chwili gdy się ruch ma zacząć, oddziaływanie mutry na helicę w punkcie M rozkłada się na normalne N w kierunku MN i na styczenne fN, czyli tarcie, w kierunku MT. Siły N i fN czynią oczywiście ten sam kąt i z pionową MV i z poziomą MH, które leżą na płaszczyznie stycznej do walca helicy średniej w punkcie M. Rozłóżmy te siły, każdą na dwie, wedle kierunków MV i MH.

Składowe siły N będą N dos i wedle MV, i N wst i wedle MH; tak samo składowe siły fN będą $-f$wst i wedle MV i fN dos i wedle MH. Będziemy więc mieli :

wedle pionowej MV siłę $N(\text{dos}\,i - f\text{wst}\,i)$,

i wedle poziomej MH siłę $N(\text{wst}\,i + f\text{dos}\,i)$.

Czyniąc podobny rozkład oddziaływań mutry we wszystkich punktach helicy średniej, znajdziemy w każdym dwie siły, jedną równoległą do osi OO′ drugą prostopadłą do tej linii.

Możemy teraz łatwo napisać równania równowagi wszystkich sił działających na śrubę. Jakoż, równanie rzutów tych sił na osi OO′ śruby jest summą algebryczną zero

$$(\text{dos}\,i - f\text{wst}\,i)\sum N - Q = 0,$$

a równanie momentów tych samych sił względem osi OO′ wyraża się także przez summę algebryczną zero

$$(\text{wst}\,i + f\text{dos}\,i)r\sum N - PR = 0;$$

więc, jeśli wyrugujemy niewiadomą summę $\sum N$, będziemy mieli

$$\frac{PR}{Qr} = \frac{\text{wst}\,i + f\text{dos}\,i}{\text{dos}\,i - f\text{wst}\,i} = \frac{\text{sty}\,i + f}{1 - f\text{sty}\,i},$$

równanie ruchu jednostajnego śruby która, wznosząc się pod działaniem siły P albo raczej pod działaniem dwojanu (P, — P), podnosi ciężar Q.

Zastępując w tem równaniu f przez styφ, otrzymujemy for-

mułę bardzo prostą i dogodną

$$(1) \qquad \frac{PR}{Qr} = \text{sty}(i + \varphi),$$

która pokazuje że możebność ruchu helicowego, o którym mowa, wymaga żeby było

$$i + \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Moment PR byłby nieskończenie wielki gdyby było $i + \varphi = \frac{\pi}{2}$; wtedy śruba mająca gwint bardzo nachylony, byłaby taka że żadna siła nie mogłaby przezwyciężyć tarcia wynikającego z ciężaru Q.

Między ilościami i, r i krokiem h helicy (*) jest związek

$$\text{sty}\, i = \frac{h}{2\pi r}.$$

Jeśli w formule stronicy 557 weźmiemy $\alpha = -i$, będzie

$$\frac{P}{Q} = \text{sty}(i + \varphi),$$

a jeśli w równaniu (1) uczynimy $r = R$, będzie także

$$\frac{P}{Q} = \text{sty}(i + \varphi).$$

To dowodzi że równanie ruchu jednostajnego śruby podno-

(*) Zobacz *helicę* w naszej Geometryi, wyd. 2e. Paryż, 1869.

szącej ciężar jest równaniem ślizgania jednostajnego na płaszczyznie pochyłej, gdy się bierze siłę PR do windowania ciężaru Qr wzdłuż linii największej spadzistości.

Równanie (1) przedstawia jeszcze ruch jednostajny śruby która, zniżając się pod działaniem dwojanu (P, — P) mającego moment dodatny PR, przezwycięża opór Q skierowany w stronę O'O. Albowiem wtedy składowe N i fN, oddziaływania mutry, zmieniają znaki i tworzą, pierwsza z pionową MV druga z poziomą MH, kąt $i+\pi$; a stosunek $\frac{PR}{Qr}$ ten sam zostaje.

319. Gdyby nie było tarcia mielibyśmy w obydwóch przypadkach, czyniąc, $\varphi = 0$, równanie równowagi śruby

$$\frac{PR}{Qr} = \operatorname{sty} i \qquad \text{albo} \qquad \frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi R}.$$

Ostatni wynik otrzymuje się łatwo przez zasadę pracy przysposobionej. Jakoż, niech będzie $d\theta$ przemieszczenie kątowe śruby które pociąga za sobą jej przemieszczenie linijne dh. Praca przysposobiona siły poruszającej P, odpowiedająca wirowaniu śruby około jej osi, jest równa wieloczynowi PR.$d\theta$ momentu tej siły około osi przez kąt $d\theta$, a zaś praca siły opierającej się Q jest odjemna i równa wieloczynowi — Qdh; więc, na mocy ogólnego twierdzenia równowagi, będzie

$$PRd\theta - Qdh = 0, \qquad \text{skąd} \qquad \frac{PR}{Q} = \frac{dh}{d\theta}.$$

Owoż, po jednym całym obrocie, wirowanie śruby wyraża się przez 2π, a jej przemieszczenie przez krok h; te przemieszczenia kątowe i linijne śruby, jakąkolwiek mają wielkość, są oczywiście proporcyonalne między sobą; co daje $\frac{dh}{d\theta} = \frac{h}{2\pi}$.

Mamy więc ostatecznie

$$\frac{P}{Q} = \frac{h}{2\pi R}.$$

To równanie, otrzymane niezależnie od kształtu gwintów śruby, jest ogólne i przedstawia równowagę śruby z gwintem jakimkolwiek, ale bez tarcia.

Przykład. Gdyby wzięto $f = 0{,}12$ i sty $i = 0{,}04$ byłoby:

$$\frac{PR}{Qr} = 0{,}16\ldots \quad \text{z tarciem,}$$

zamiast

$$\frac{PR}{Qr} = \text{sty}\, i = 0{,}04\ldots \quad \text{bez tarcia.}$$

320. Przypadek szczególny. Szukajmy pod jakim warunkiem, mimo wysilenia P, śruba mogłaby nabyć dążności do ruchu w stronę oporu Q. Aby znaleźć ten warunek, dość jest w formule (1) zmienić znak kąta tarcia φ; co daje

$$(2) \qquad \frac{PR}{Qr} = \text{sty}(i - \varphi).$$

Ale dążność śruby do takiego ruchu wtedy tylko jest możebna kiedy $i > \varphi$. W tym przypadku, żeby mutra ruchoma na śrubie nie odkręcała się, wkładają drugą mutrę która wstrzymuje ruch pierwszej.

Formuła (2) zgodzi się z otrzymaną na stronicy 558, jeśli w tej ostatniej będzie wzięty kąt $\alpha = -i$.

Gdy siły P i Q są obie poruszające, to jest jeśli obie nadają śrubie dążność do ruchu w tę samą stronę, trzeba wtedy, dla wyznaczenia równania równowagi, zmienić zarazem znak kąta

tarcia φ i znak momentu PR w formule (1), która się stanie

$$\text{(3)} \qquad \frac{PR}{Qr} = \text{sty}(\varphi - i).$$

Formuły (2) i (3) pokazują że, gdy $i = \varphi$ a siła P działać przestaje, śruba zostawiona sobie samej nie będzie się odkręcała; bo oddziaływanie ciśniętego ciała nie może jej dawać ruchu wirowego. Na tej zasadzie opiera się *prassa śrubowa*

321. PRACA UŻYTECZNA. Po jednym całym obrocie śruby w jej ruchu jednostajnym, praca użyteczna wyraża się przez $Qh = Q.2\pi r \text{sty}\, i$ (318), a praca poruszająca przez $PR.2\pi$: stosunek pierwszej do drugiej, mierzący pracę użyteczną względną do formuły (1), jest

$$\text{(4)} \qquad \frac{T_u}{T_m} = \frac{Qr.2\pi \,\text{sty}\, i}{PR.2\pi} = \frac{\text{sty}\, i}{\text{sty}(i+\varphi)}.$$

Ten stosunek staje się zerem dla $i = 0$ i dla $i = \frac{\pi}{2} - \varphi$; więc, między temi dwiema granicami, istnieje wartość dla i która go czyni *maximum*. Aby znaleźć tę wartość, weźmy pochodnę względem i z funkcyi (4), i zrównajmy ją do zera; będziemy mieli

$$\frac{1}{\text{dos}^2 i\, \text{sty}(i+\varphi)} - \frac{\text{sty}\, i}{\text{dos}^2(i+\varphi)\text{sty}^2(i+\varphi)} = 0,$$

albo

$$\text{wst}\,2(i+\varphi) - \text{wst}\,2i = 0;$$

co wymaga żeby było

$$2(i+\varphi) = \pi - 2i.$$

Więc

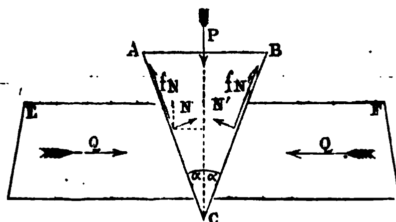
$$i = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}.$$

Podstawiając tę wartość w formule (4), otrzymujemy szukane maximum.

$$\frac{T_u}{T_m} = \frac{\text{sty}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\text{sty}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \text{sty}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

RÓWNOWAGA KLINA.

322. Klin jestto graniastoń trójkątny służący zwykle do łupania ciał, a ogólniej do rozdzielania dwóch ciał między które się go wprowadza. Niech będzie ABC przecięcie proste tego graniastonu. Klin ABC wchodzi krawędzią C, zwaną *ostrzem*, między dwa ciała E i F które ma rozpychać; ściana AB przeciwna ostrzu jest *głową* klina, na którą działa normalnie siła P; a ciała E i F, każde pod wpływem jednej z dwóch sił równoległych Q, wywierają na *ściany boczne* AC i BC oddziaływania równe i przeciwne parciom klina.



Klin zwykle używany jest *równoramienny*, AC = BC z kątem C = 2α, i ciała E, F są tej samej natury. Przypuszczając to

wszystko, będziemy szukali warunków równowagi między siłami P i Q, w chwili w której ma się zacząć ruch ślizgania klina. A ponieważ układ jest utworzony z dwóch ciał tożsamych w zetknięciu z klinem, dość będzie, uważając te ciała po kolei, wyrazić równowagę w każdem z nich osobno.

Weźmy najpierwej klin, i uważajmy przede wszystkiem że siły Q przeciwnie równoległe, działające na ciała E i F, są równe; bo inaczej cały układ mógłby się poruszać w stronę większej z tych dwóch sił. Poczem, niech będą N i fN składowe, normalna i styczenna, oddziaływania jakie ciało E wywiera na ścianę AC klina; N′ i fN′ składowe, także prostokątne, oddziaływania ciała F na ścianę BC. To ustaliwszy, widzimy łatwo że klin jest w równowadze pod działaniem sił P, N, fN, N′, fN′. Te pięć sił, bez względu na ciężar klina który się może liczyć do P, dają dwa następujące równania rzutów na osiach poziomej i pionowej, które jasno figura pokazuje.

$$N \operatorname{dos}\alpha - fN \operatorname{wst}\alpha - N' \operatorname{dos}\alpha + fN' \operatorname{wst}\alpha = 0$$

$$P - N \operatorname{wst}\alpha - fN \operatorname{dos}\alpha - N' \operatorname{wst}\alpha - fN' \operatorname{dos}\alpha = 0.$$

Z pierwszego równania wynika N′=N; zatem drugie staje się

$$(1) \qquad P - 2N(\operatorname{wst}\alpha + f \operatorname{dos}\alpha) = 0.$$

Wyraźmy teraz równowagę ciała E. To ciało pod wpływem siły Q opiera się parciom klina, których składowe są równe i wprost przeciwne oddziaływaniom N i fN. Więc, bez względu na ciężar ciała E, mamy równanie równowagi

$$(2) \qquad Q - N \operatorname{dos}\alpha + fN \operatorname{wst}\alpha = 0.$$

Rugując N między równaniami (1) i (2), otrzymujemy szu

kane równanie równowagi klina

$$\frac{P}{Q}=\frac{2(\text{wst}\alpha+f\text{dos}\alpha)}{\text{dos}\alpha-f\text{wst}\alpha}=2.\frac{\text{sty}\alpha+f}{1-f\text{sty}\alpha}$$

albo

(3) $$P=2Q\,\text{sty}(\alpha+\varphi).$$

Dla cokolwiek większej wartości siły P, klin przeniknie między dwa ciała E i F. Ale, jeśli $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}$, siła potrzebna do wbicia klina będzie $P=\infty$. Wtedy, ponieważ zawsze $\varphi<\frac{\pi}{4}$, kąt $C=2\alpha$ będzie rozwarty, i klin wbijany nawet z wielką siłą P nie wciśnie się między dwa ciała E i F, parte każde jedną siłą Q choćby ona była bardzo mała.

Gdyby tarcie nie istniało, byłoby

$$P=2Q\,\text{sty}\alpha.$$

Przykład $f=0,10$ $\text{sty}\alpha=0,05$; będzie

$\frac{P}{Q}=0,30$ z tarciem,

$\frac{P}{Q}=0,10$ bez tarcia,

To pokazuje jak wielki wpływ wywiera tarcie w tego rodzaju machinach.

323. Jeśli ciała E i F nie są poddane żadnej sile Q, a tylko przeciwstawią opory normalne N ścianom klina, i sprawiają tarcia fN wzdłuż tych ścian, wtenczas między siłą P i oporem

N zostaje równanie (1), które bierze kształt prosty

$$(4) \qquad P = 2N\frac{\text{wst}(\alpha+\varphi)}{\text{dos}\varphi}.$$

Ta formuła dowodzi że, jakikolwiek jest opór normalny N, siła P może go zawsze pokonać, i z natężeniem tem mniejszem im klin będzie ostrzejszy.

Gdyby nie było tarcia, formuła (4) stałaby się

$$\frac{P}{N} = 2\text{wst}\alpha.$$

Owoż, trójkąt prostokątny ACD daje

$$\text{wst}\alpha = \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{2AC};$$

więc byłoby

$$\frac{P}{N} = \frac{AB}{AC},$$

to jest, *siła* P *miałaby się do oporu* N *jako głowa klina do ściany bocznej.*

324. Może się zdarzyć że klin, pod wpływem parć bocznych Q wysuwa się mimo siły poruszającej P w stronę przeciwną jej działania. Aby znaleźć warunek możebności tego ruchu, dość jest zmienić w formule (3) znak spółczynnika f tarcia; dlatego że wtedy siła styczenna fN, czyli tarcie, zmienia stronę działania, a siła normalna N zostaje ta sama. Powinno więc być

$$(5) \qquad P = 2Q.\frac{\text{wst}\alpha - f\text{dos}\alpha}{\text{dos}\alpha + f\text{wst}\alpha} = 2Q\text{sty}(\alpha-\varphi).$$

Ale, jakkolwiek mała jest siła P, parcia Q nie mogą wypychać klina tylko wtedy kiedy się zadość staje drugiemu warunkowi

$$\alpha > \varphi,$$

to jest, kiedy kąt C klina jest większy od 2φ.

Szukajmy nakoniec jaki jest warunek konieczny żeby siła P, działająca w stronę przeciwną wbijania, wysuwała klin mimo tarcia sprawionego przez siły Q. W tym szczególnym przypadku, P i Q są siłami poruszającemi; więc, aby wiedzieć czy taki ruch klina jest możebny, trzeba w formule (3) zmienić zarazem znak kąta tarcia φ i znak siły P. Co daje

$$(6) \qquad P = 2Q\sin(\varphi - \alpha).$$

Ale to równanie nie wystarcza, i trzeba jeszcze żeby było

$$\alpha < \varphi.$$

Więc, na mocy tego co poprzedza, gdy $\alpha < \varphi$ albo $\alpha = \varphi$, a siła P działać przestaje, klin raz wbity pozostanie nieruchomy mimo ciśnień bocznych Q, albo tylko mimo oporów N gdy nie ma sił Q.

Klin może służyć do sprawiania wielkich ciśnień bocznych, i stanowić tak zwane *prassy klinowe*, używane na przykład do wybijania oleju; etc.

TARCIE I PRACA TARCIA W ZAZĘBIANIACH.

325. Widzieliśmy w Cynematyce (109 i 110), że w zazębianiach dwóch kół O, O′, łuk ślizgania punktu zetknięcia M jednego zębu z drugim, przez czas *dt*, ma za miarę

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) p\,ds.$$

Zatem, nazywając N parcie jakie koło O' wywiera na koło O wedle spólnej normalnej $MA = p$, w punkcie zetknięcia M profilów dwóch zębów, nieskończenie mała praca tarcia tych zębów będzie

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) fNpds.$$

Aby wyznaczyć siłę normalną N, uważajmy że siła styczenna Q, działająca na koło O' i stanowiąca opór, czyni równowagę parciu normalnemu N i tarciu fN które z niego wynika w kierunku stycznej spólnej w punkcie M dwóch profilów. Więc, oznaczając przez θ kąt MAO', mamy równania momentów tych sił, względem osi stałej koła O',

$$QR' = NR'\text{wst}\theta + fN(R'\text{dos}\theta - p);$$

zkąd

$$N = \frac{Q}{\text{wst}\theta + f\left(\text{dos}\theta - \frac{p}{R'}\right)}.$$

Podstawiając tę wartość w wyrażeniu pracy tarcia, otrzymujemy

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{fQpds}{\text{wst}\theta + f\left(\text{dos}\theta - \frac{p}{R'}\right)}.$$

Taka jest wartość pracy tarcia, przez czas nieskończenie mały dt, w którym jakikolwiek punkt okręgu jednego z dwóch kół pierwotnych opisuje łuk ds, i w chwili w której odległość punktu zetknięcia profilu dwóch zębów od punktu zetknięcia kół pierwotnych jest p.

Chcąc mieć całą pracę tarcia odpowiedającą przemieszczeniu

skończonemu, na przykład jednemu *krokowi*, to jest odległości dwóch zębów po sobie idących, trzebaby zcałkować to wyrażenie od 0 do długości kroku a zazębiania. Całka otrzymuje się przez przybliżenie sposobem następującym. Uważamy że długość $AM = p$ bardzo mało się różni od łuku $AD = s$ koła O′, i tem mniej im punkt zetknięcia M jest bliżej linii środków OO′. Nadto, w mianowniku iloraz $\frac{p}{R'}$ jest bardzo mały; zaniedbując go, będzie

$$\text{wst}\theta + f\text{dos}\theta = \frac{\text{wst}(\theta + \varphi)}{\text{dos}\varphi}.$$

Owoż, kąt φ ma wartość przyzwoicie małą w zazębianiach dobrze posmarowanych, a summa $\theta + \varphi$ niewiele się różni od kąta prostego; można więc z dostatecznem przybliżeniem uważać stosunek $\frac{\text{wst}(\theta + \varphi)}{\text{dos}\varphi}$ jako równy jedności.

Biorąc te wartości przybliżone, i oznaczając przez T_f pracę tarcia dla jednego kroku, znajdujemy

$$T_f = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) fQ \int_0^a sds = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) fQ \frac{a^2}{2}.$$

Ale Qa wyraża pracę oporu Q na jeden krok przemieszczenia, i to jest właśnie *praca użyteczna*; nazwijmy ją T_u, będziemy mieli formułę pracy tarcia w zazębianiach zewnętrznych walcowych po przemieszczeniu na jeden krok,

$$T_f = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \frac{fa}{2} T_u.$$

Zamiast promieni R i R′ kół pierwotnych można wprowadzić liczby zębów. Jakoż, jeśli n i n' są liczbami zębów dwóch

kół; będzie

$$a = \frac{2\pi R}{n} = \frac{2\pi R'}{n'},$$

zkąd

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2\pi}{a}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Więc, gdy układ dwóch kół zębatych zrobił jeden krok, praca tarcia ma za miarę

$$T_f = \pi f T_u\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

Praca poruszająca T_p przewyższa pracę użyteczną T_u pracą tarcia T_f; mamy więc

$$T_p = T_u\left\{1 + \pi f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)\right\};$$

zkąd stosunek

$$\frac{T_u}{T_p} = \frac{1}{1 + \pi f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right)},$$

który jest tem bliższy jedności im dwa koła mają więcej zębów. Co dowodzi korzyści powiększania liczby zębów kół.

Otrzymane formuły będą się stosowały do zazębiań wewnętrznych, jeśli w nich zmienimy znaki jednego z dwóch promieni, i temsamem znak liczby odpowiedających zębów. Będzie wtedy

$$T_f = \pi f\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)T_u,$$

$$T_p = \left\{1 + \pi f\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)\right\}T_u.$$

326. ZAZĘBIANIA STOŻKOWE. Nazywając r i r' promienie dwóch kół mających żęby stożkowe, α i α' połowy kątów dwóch stożków które im odpowiedają, wiemy (115) że wartość nieskończenie małego łuku ślizgania punktu zetknięcia w zazębianiu stożkowem równa się

$$\left(\frac{\mathrm{dos}\,\alpha}{r}+\frac{\mathrm{dos}\,\alpha'}{r'}\right)pds.$$

Więc, na mocy powyższych rozumowań, pojmujemy łatwo że w zazębianiach stożkowych praca tarcia wyraża się przez

$$T_f=\frac{1}{2}\,\pi fa\left(\frac{\mathrm{dos}\,\alpha}{r}+\frac{\mathrm{dos}'\alpha}{r'}\right)T_u.$$

HYDROSTATYKA

327. Nazywają się *płynami* ciała złożone z cząstek niezmiernie ruchomych, każda względem swoich sąsiednich; takiemi są woda, powietrze, i t. p. Gdy posuwamy jedne na drugich różne części massy płynnej, nie doznajemy żadnego tarcia podobnego do tego jakie się rozwija w ślizganiu ciał bryłowych. Ta nieobecność tarcia w przemieszczaniu się cząstek płynnych między sobą stanowi ich *płynność doskonałą*. Zaiste, ciecze i gazy istniejące w naturze są mniej więcej *lepkie*, nie posiadają samoiście doskonałej płynności, która jest tylko stanem idealnym; ale się od niej tak mało oddalają, zwłaszcza gdy się znajdują w równowadze samoistej albo względnej, że wyniki otrzymane jako następstwo doskonałej płynności i sprawdzone doświadczeniem, są prawie zupełnie zgodne z rzeczywistym stanem płynów naturalnych. W ruchu założenie płynności doskonałej może czasem prowadzić do wniosków mało zgodnych z doświadczeniem; bo części massy płynnej, poruszające się z różną prędkością, rozwijają między sobą pewne, słabe wprawdzie, ale istotne tarcie, którego nie zawsze zaniedbywać wolno.

Płyny dzielą się na *ciecze* i na *gazy*. Pierwsze nazywają się także płynami *nieściśliwemi*, dlatego że przez długi czas nie potrafiono wykonać dostatecznie wielkiego parcia aby zmniejszyć ich objętość. Dopiero w ostatnich czasach przekonano się że nie ma

płynów nieściśliwych; wszystkie znane ciecze są ściśliwe, chociaż w bardzo słabym stopniu; woda pod parciem jednej atmosfery zmniejsza zaledwie o $\frac{46}{10^6}$ swoją objętość. Gazy, przeciwnie cieczom, zmniejszają łatwo swoją objętość; można albowiem, bez znacznej trudności, przywieść objętość gazu do połowy, do trzeciej albo czwartej części tego czem była najpierwej. A jeśli potem siła ściskająca objętość działać przestaje, gaz powraca sam z siebie do pierwotnej objętości. Dla tej przyczyny dają gazom nazwisko *płynów sprężystych*. Gazy, i wszystkie pary które do nich liczyć należy, są płynami *rozprężliwemi*, to jest ciałami lotnemi, których cząstki oddalają się jedna od drugiej jak gdyby się nawzajem odpychały.

Mechanika rozumowa ciał płynnych, tak jako ciał bryłowych, składa się z dwóch oddzielnych części, z których jedna zawierająca teoryę równowagi płynów jest nazwana *Hydrostatyką*, a druga zawierająca teoryę ruchu płynów została mianowana *Hydrodynamiką*. Jest jeszcze, oddawna znana pod nazwiskiem *Hydrauliki*, umiejętność praktyczna ruchu płynów. Hydraulika nie jest umiejętnością rozumową ale doświadczenną. Ona daje ustawy ruchu płynów wywiedzione z doświadczeń, i tym sposobem obchodzi trudności Hydrodynamiki, których dotąd analiza przezwyciężyć nie mogła. Hydraulika stanowi ważną, i w życiu ludzkiem bardzo użyteczną, gałęź Mechaniki zastosowanej.

328. Płyn pod działaniem sił jakichkolwiek, zamknięty w naczyniu, wywiera na jego ściany parcie które działa z wewnątrz na zewnątrz; albowiem, jeśli się zrobi otwór w ścianie naczynia, płyn się z niego zaraz wymyka. To parcie, ogólnie zmienne w różnych punktach jednej ściany, jest normalne w stanie równowagi płynu do nieskończenie małej cząstki na którą się wywiera. Jakoż, przypuśćmy że wycięto w ścianie naczynia niezmiernie mały otwór płaski mający miarę ω, i wystawmy sobie mały tłok mogący się poruszać w walcu prostopadłym do tej

płaskiej cząstki; oczywiście dość będzie przyłożyć do tłoku przyzwoitą siłę, normalną do jego podstawy ω, aby utrzymać płyn w równowadze. Pojmuje się łatwo że płyn wywiera także parcie równe i przeciwne temu jakiego doznaje od ścian naczynia w którem jest zamknięty.

Dla wymierzenia parcia wywartego na nieskończenie małą cząstkę ω, w punkcie M powierzchni jakiejkolwiek, trzeba sobie wyobrazić powierzchnię płaską która ponosi w całej swojej rozciągłości to samo parcie co cząstka ω, i wziąć tę powierzchnię za jedność; wtedy, jeśli p wyraża całe parcie jakie ona wytrzymuje, wieloczyn $p\omega$ będzie przedstawiał normalne parcie na nieskończenie małą cząstkę ω danej powierzchni. Nazywając P to parcie na ω, będzie

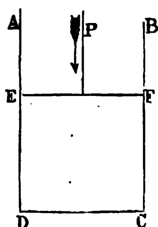
$$P = p\omega, \qquad \text{zkąd} \qquad p = \frac{P}{\omega}.$$

Iloraz $\frac{P}{\omega}$, zwany często *parciem w punkcie* M, wyraża właściwie parcie odniesione do jedności powierzchni przez ten punkt przechodzącej.

329 Przesyłanie parć w płynach. 1° Jeśli płyn (ciecz albo gaz) zamknięty w powłoce, zostaje w równowadze pod działaniem samych tylko sił wewnętrznych, a za pomocą tłoku, albo inaczej, wywarto parcie na powłokę, to parcie będzie przesłane zarówno na wszystkie strony massy płynnej. Równość przesyłania parć jest następstwem płynności doskonałej; stwierdzona doświadczeniem na płynach mniej więcej doskonałych, zależy ona na tej ważnej ustawie :

Parcie odniesione do jedności powierzchni ma tę samą wartość w każdym punkcie wziętym na powłoce płynu, albo wewnątrz jego massy.

GALILEUSZ, autor zasady prędkości przysposobionych, dowodzi za jej pomocą różnych twierdzeń Statyki i Hydrostatyki, DESKART i PASKAL posługują się tą zasadą w Hydrostatyce. LAGRANGE użył jej do okazania *równości przesyłania parć;* za nimi poszli DELAUNAY i BOUR. Ale to dowodzenie zostawia wiele do życzenia! MACLAURIN i EULER, a za nimi POISSON i DUHAMEL, uważają równość przesyłania parć w płynach jako czyn nabyty doświadczeniem. Podzielając ten sposób widzenia, objaśnimy go następującemi uwagami *Poissona.*



Niech będzie naczynie graniastonne proste, i postawione na płaszczyźnie poziomej, w którem ABCD przedstawia przecięcie pionowe. Przypuśćmy to naczynie napełnione wodą aż do EF, i niech tłok poziomy zamyka je szczelnie. Dla uproszczenia kwestyi, uważajmy wodę za płyn bez ciężkości, nie wywierający żadnego parcia na ściany naczynia; na tłoku połóżmy ciężar P, licząc w to ciężar samego tłoku. Widzimy oczywiście że podstawa graniastonu wytrzymuje takie samo parcie jak gdyby ciężar P był jednostajnie rozdzielony na jej całej rozciągłości. Wszystkie punkta podstawy doznają parć pionowych równych między sobą, a parcie na cząstkę α tej podstawy jest proporcyonalne do α; to zaś parcie, równowarte sile pionowej przyłożonej do środka ciężkości powierzchni α, wyraża się przez $\frac{P\alpha}{a}$; w czem a znaczy powierzchnię całej podstawy graniastonu, i temsamem powierzchnię podstawy tłoku w zetknięciu z cieczą.

Owoż, ustawa wyżej wysłowiona zasadza się na tem że parcie, jakie ciężar P wywiera na część górną wody, jest przesłane za pośrednictwem płynu nietylko na podstawę naczynia, ale jeszcze na jego ściany boczne; tak że wszystkie punkta naczynia są zarówno parte w kierunkach prostopadłych do ścian; więc powierzchnia α, wzięta na jednej ze ścian bocznych graniastonu, doznaje takiego samego parcia $\frac{P\alpha}{a}$ jak gdyby stanowiła część podstawy poziomej.

Ogólnie, niech naczynie, mające kształt jakiegokolwiek wielościanu zamkniętego i stale przywiązanego, będzie napełnione cieczą bez ciężkości. Jeśli odjęto jedną ścianę, i zastąpiono tłokiem do którego przyłożono siłę P normalną do powierzchni cieczy dotykającej, ciecz i naczynie zostaną w spoczynku, i, według ustawy którą objaśniamy, parcie, jakie siła P wywiera na powierzchnię przyległą, będzie przesłane za pośrednictwem cieczy na wszystkie ściany wielościanu. Więc wszystkie punkta naczynia, licząc w to punkta podstawy tłoku, będą zarówno parte z wewnątrz na zewnątrz, w kierunkach prostopadłych do ścian; tak że parcie na powierzchnię α, wziętą na jednej ścianie, albo na podstawie tłoku, wyrazi się zawsze przez $\frac{P\alpha}{a}$.

Te wyniki rozciągają się do przypadku w którym powierzchnia parta nie jest płaska; dość tylko rozłożyć ją na cząstki nieskończenie małe, które mogą być uważane jako ściany płaskie wielościanu infinitezymalnego; a jeśli ω oznacza powierzchnię jednej z tych cząstek, $\frac{P\omega}{a}$ będzie wyrażało parcie normalne jakiego ona doznaje.

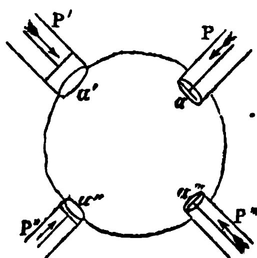
Ustawa równości przesyłania parć na wszystkie strony stosuje się do płynów sprężystych tak jako do cieczy. Płyny sprężyste wywierają na naczynia, w których są zamknięte, parcia równe we wszystkich punktach ścian, i skierowane z wewnątrz na zewnątrz wedle normalnych do tych ścian; tak że parcie odnie-

sione do jedności powierzchni jest to samo w całej rozciągłości naczynia.

2° Jeśli płyn jest pod działaniem siły poruszającej z której wynika parcie ϖ na cząstkę α, wtedy to parcie nie jest już stateczne jako w przypadku samych tylko sił wewnętrznych; ale przeciwnie zmienia się z położeniem cząstki α, która tym sposobem jest parta przez $\varpi + p\omega$; ϖ oznacza wartość odpowiedającą położeniu cząstki α.

Własność przesyłania parć na wszystkie strony stosuje się także do cząstek wewnętrznych massy płynnej. Jakoż, jeśli równowaga ma miejsce, to się jej nie naruszy przypuszczając że część massy płynnej stała się bryłą. Owoż ta bryła zostaje nieruchoma, ponieważ płyn jest w równowadze; więc jej ściany doznają ze wszystkich stron parć równych które się niszczą nawzajem. Można tym sposobem łatwo pojąć że parcia, jakie wytrzymuje płasczyzna zanurzona w płynie w równowadze, są równe i wprost przeciwne.

330. Gdy płyn w równowadze zmienia kształt zachowując objętość, praca rozwinięta przez parcia zewnętrzne jest zero.



Jakoż, wyobraźmy sobie że w powłokę, w której płyn jest zamknięty, powtykano rurki wielkości jakiejkolwiek, kommunikujące z płynem, i w nich umieszczono ruchome tłoki które je zamykają dokładnie. Płyn zostanie w spoczynku jeśli siły,

działające z zewnątrz na wewnątrz, wywierają na tłoki parcia normalne równe dla jedności powierzchni ich podstaw. Chcemyż zmienić kształt płynu nie zmieniając jego objętości? dość będzie wsunąć jedne tłoki a wysunąć drugie, tak żeby zmniejszenie objętości wyrównywało jej powiększeniu. Nazwijmy P, P', P'',... parcia zewnętrzne działające na tłoki, normalnie do ich podstaw a, a', a'',...; i niech będą l, l', l''... drogi przebieżone przez tłoki wsuwające się albo wysuwające. Przypuszczając że pierwszy tłok, wytrzymujący parcie P, został wsunięty wewnątrz massy płynnej w którą wchodzi rurka, praca rozwinięta, przez parcie P działające w stronę przebieżonej drogi, będzie dodatna i równa wieloczynowi Pl; a jeśli drugi tłok ponoszący parcie P' został wysunięty na zewnątrz massy płynnej, to praca rozwinięta, przez parcie P' działające w stronę przeciwną przebieżonej drogi, będzie odjemna i wyrazi się przez —P'l'. Tak samo o innych pracach. Teraz, ponieważ objętość płynu zostaje niezmienna, mamy równanie

$$al - a'l' + a''l'',... = 0;$$

ale parcie odniesione do jedności powierzchni jest stateczne, co daje

$$\frac{P}{a} = \frac{P'}{a'} = \frac{P''}{a''} = \ldots$$

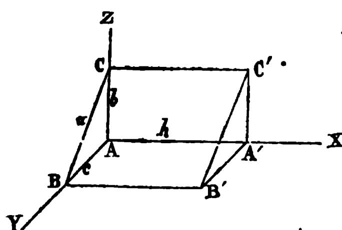
więc, rugując a, a', a'',... otrzymujemy

$$Pl - P'l' + P''l'' + - \ldots = 0.$$

c. b. d. d.

331. Równość parcia na wszystkie strony. Na około jednego jakiegokolwiek punktu massy płynnej w równowadze, parcie odniesione do jedności powierzchni jest to samo na wszystkie

strony. Jakoż, wyobraźmy sobie w massie płynnej nieskończenie mały graniaston trójkątny prosty ABCA'B'C', mający za podstawę trójkąt prostokątny przy A; oznaczmy przez a, b, c boki podstawy a przez h wysokość graniastonu, i weźmy jego trzy krawędzie prostokątne AA', AB, AC za osie spółrzędnych.



Ponieważ płyn zostaje w spoczynku, siły wewnętrzne i zewnętrzne są w równowadze; można tedy, bez naruszenia w niczem istniejącej równowagi, przypuścić że graniaston płynny stał się bryłą. Ale, w tym stanie, warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi graniastonu jest żeby parcia, jakie siły wewnętrzne i zewnętrzne wywierają na powierzchnie jego ścian, niszczyły się między sobą; więc trzeba i dość jest żeby rzuty wszystkich parć, na każdej z trzech osi spółrzędnych, czyniły summę algebryczną zero. Owoż, uważając te rzuty na osi OZ, widzimy że: 1° parcia na podstawy ABC i A'B'C', będąc prostopadłe do osi OZ, mają rzuty zero na tej linii. 2° jeśli oznaczymy przez p parcie odniesione do jedności powierzchni, parcie zewnętrzne wywarte normalnie na ścianę BCC'B' wyrazi się przez $ah(1+\alpha)p_a$, i jego składowa równoległa do osi OZ będzie

$$-ah(1+\alpha)p_a \operatorname{dos} B = -ch(1+\alpha)p_a;$$

α znaczy ilość nieskończenie małą.

Podobnie, parcia na ściany ABB'A' i ACC'A' są $ch(1+\gamma)p_c$ i $bh(1+\beta)p_b$; rzut ostatniego na osi OZ jest zero. 3° Nakoniec,

działanie wszystkich razem cząstek płynu, zamkniętych w graniastonie, jest proporcyonalne do całej ich massy $\frac{1}{2}bch\rho$; zatem, nazywając X, Y, Z składowe parcia wywartego przez jedność massy graniastonu płynnego, składowa parcia tej massy równoległa do osi OZ będzie $\frac{1}{2}bch\rho Z(1+\zeta)$.

Mamy więc równanie

$$\frac{1}{2}bch\rho Z(1+\zeta)+ch(1+\gamma)p_c-ch(1+\alpha)p_a=0$$

albo

$$\frac{1}{2}b\rho Z(1+\zeta)+(1+\gamma)p_c-(1+\alpha)p_a=0;$$

zkąd, przechodząc do granic, wynika

$$p_c-p_a=0.$$

Tak samo, biorąc summę rzutów parć na osi OY, znalezionoby

$$p_b-p_a=0.$$

Więc

$$p_a=p_b=p_c.$$

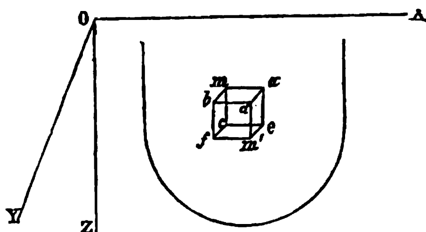
Te równania dowodzą twierdzenia znanego pod nazwiskiem zasady Paskala, które się tak wysłowia :

Płyn w równowadze wywiera na nieskończenie małą cząstkę płaską parcie niezależne od jej orientacyi.

Równania równowagi płynów.

332. Będziemy teraz szukali warunków równowagi massy

płynnej, poddanej działaniu sił jakichkolwiek wewnętrznych i zewnętrznych.



Niech będą OX, OY, OZ trzy osie prostokątne, ostatnia OZ w kierunku ciężkości. Wybraliśmy ten kierunek dlatego że będziemy się szczególniej zajmowali własnościami płynów ciężkich. Między dwoma punktami płynu nieskończenie sąsiedniemi $m(x, y, z)$ i $m'(x + dx, y + dy, z + dz)$, budujemy równoległościan *mabcdefm'* mający krawędzie równoległe do osi spółrzędnych. Oznaczamy przez p parcie odniesione do jedności powierzchni, które ma miejsce w punkcie m; przez ρ gęstość w tym punkcie. Parcie p, zmienne od jednego punktu do drugiego massy płynnej, jest funkcyą spółrzędnych x, y, z punktu m. W ciałach jednorodnych gęstość jest ta sama we wszystkich punktach; w ciałach różnorodnych, gęstość zmienia się z parciem i z temperaturą, wedle pewnej ustawy zależącej od natury płynu. Ale parcie i temperatura są funkcyami spółrzędnych punktu uważanego; zatem gęstość ρ jest ogólnie funkcyą tych spółrzędnych. Jeśli więc nazwiemy X, Y, Z składowe przyspieszenia wynikowej sił zewnętrznych, które działają na cząstkę dm płynu zawartego w równoległościanie mm', o nieskończenie małych rozmiarach dx, dy, dz; składowemi siły poruszającej cząstkę dm będą Xdm, Ydm, Zdm, albo

$$X\rho dxdydz, \qquad Y\rho dxdydz, \qquad Z\rho dxdydz.$$

Mówi się zwyczajnie że X, Y, Z są składowemi siły odniesionej

do jedności massy i działającej w punkcie mającym spółrzędne x, y, z.

To ustaliwszy, przypuśćmy że płyn zawarty w nieskończenie małym równoległościanie mm' stał się bryłą, przez co nie naruszamy w niczem przedistniejącej równowagi; ale teraz widzimy jasno że, dla utrzymania równowagi płynu, trzeba i dość jest żeby składowe równoległe do trzech osi spółrzędnych wszystkich sił tak zewnętrznych jako wewnętrznych nizsczyły się między sobą. Owoż, temi składowemi są siły poruszające Xdm, Ydm, Zdm, i parcia płynu otaczającego równoległościan wywarte normalnie na każdą jego ścianę.

Uważajmy najpierwej parcia pionowe które cisną na ściany poziome $mabc$ i $m'ecf$. Te dwa parcia są skierowane w strony przeciwne; pierwsze działa w stronę $z^{ów}$ dodatnych i wyraża się przez $pdxdy$, drugie pcha w stronę $z^{ów}$ odjemnych i przedstawia się przez $-(p+\frac{dp}{dz}dz)dxdy$; ich wynikowa, równoległa do osi OZ, jest

$$-\frac{dp}{dz}dxdydz.$$

A już powiedzieliśmy że składową siły poruszającej, równoległą do osi OZ, jest

$$Z\rho dxdyz.$$

Więc, biorąc summę algebryczną składowych równoległych do osi OZ, otrzymujemy pierwsze równanie różniczkowe równowagi

$$-\frac{dp}{dz}dxdydz+Z\rho dxdydz=0$$

albo prościej

$$\frac{dp}{dz}=\rho Z.$$

Rozumując podobnie, i bacząc że, na mocy zasady *Paskala* trzy ściany mające spólny wierzchołek m doznają w nim tego samego parcia p, znajduje się dwa inne równania odpowiedające osiom OY i OZ. Mamy zatem następujący układ

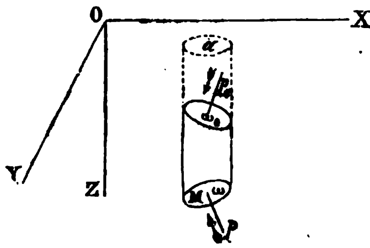
$$\frac{dp}{dx} = \rho X,$$

$$\frac{dp}{dy} = \rho Y,$$

$$\frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Takie są trzy ogólne warunki którym zadość czynić powinien wszelki płyn, aby mógł zostawać w równowadze pod działaniem sił jakichkolwiek.

333. Powyższe dowodzenie *Eulera*, oparte na zasadzie *Paskala*, i zwykle dawane w dziełach Mechaniki rozumowej dla jego prostoty, ulega pewnym zarzutom. Dlatego przynosimy jeszcze inne dowodzenie podane przez *Cauchy*, mające niezaprzeczalną ścisłość i cenną zaletę w tem że nie potrzebuje zasady *Paskala*, która będzie jego następstwem.



Przez punkt M(x, y, z) massy płynnej, poprowadźmy jakąkolwiek płasczyznę i na niej około tego punktu weźmy nieskończenie

małą cząstkę ω; na podstawie ω zbudujmy nieskończenie szczupły graniaston, albo walec, równoległy do osi pionowej OZ, i dajmy mu drugą jakąkolwiek podstawę ω_0. Podstawy ω i ω_0 mają rzut spólny a na płaszczyźnie poziomej XY. Przypuśćmy teraz że nasz graniaston płynny stał się bryłą, przez co równowaga przedistniejąca w niczem się nie zmieniła; żeby się więc utrzymywała, trzeba i dość jest żeby siły zewnętrzne i parcia płynu niszczyły się nawzajem; zatem ich rzuty na każdej z trzech osi spółrzędnych powinny czynić summę algebryczną zero.

Owoż, parcie płynu w równowadze na ścianę boczne graniastonu jest do nich normalne (328), i temsamem prostopadłe do osi OZ; więc jego rzut na tej osi jest zero. Nadto, parcia na podstawy ω i ω_0 są $p\omega$ i $p_0\omega_0$; ich rzuty na osi OZ wyrażają się przez

$$-p\omega \cos(p, z) = -pa, \qquad p_0\omega_0 \cos(p_0, z) = p_0 a,$$

i czynią summę algebryczną

$$(p_0 - p)a.$$

Nakoniec, siła zewnętrzna działająca w punkcie (x, y, z) ma rzut $Z\rho a dz$ na osi OZ; $\rho a dz$ znaczy massę nieskończenie małej cząstki adz na jakie się rozkłada graniaston płynny; co daje summę rzutów sił zewnętrznych

$$\int_{z_0}^{z} a\rho Z dz.$$

Mamy więc równanie

$$(p_0 - p)a + \int_{z_0}^{z} a\rho Z dz = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad p = p_0 + \int_{z_0}^{z} \rho Z dz.$$

Widzimy tu że parcie p na ω jest to samo na wszystkie strony, ponieważ nachylenie podstawy ω graniastonu płynnego

nie wchodzi do równania równowagi. Co sprawdza zasadę *Paskala.*

Jeśli zróżniczkujemy ostatnie równanie względem z, uważając że parcie p_0, odpowiedające rzędnej $z=z_0$, jest stateczne, będzie

$$\frac{dp}{dz}=\rho Z.$$

Znalezionoby tak samo dwa inne równania równowagi

$$\frac{dp}{dx}=\rho X \quad \text{i} \quad \frac{dp}{dy}=\rho Y.$$

Te trzy równania wyrażają pochodne cząstkowe parcia p, zkąd wynika

$$(1) \qquad dp=\rho(Xdx+Ydy+Zdz).$$

Formuła (1) daje przyrost parcia, gdy się przechodzi od punktu (x,y,z) massy płynnej do punktu sąsiedniego $(x+dx, y+dy, z+dz)$, i pokazuje że dla równowagi trzeba żeby wyrażenie

$$\rho(Xdx+Ydy+Zdz)$$

było różniczką dokładną funkcyi spółrzędnych x, y, z, uważanych jako zmienne niezależne. Zatem warunki *konieczne* równowagi płynu są

$$\frac{d(\rho X)}{dy}=\frac{d(\rho Y)}{dx}, \quad \frac{d(\rho X)}{dz}=\frac{d(\rho Z)}{dx}, \quad \frac{d(\rho Y)}{dz}=\frac{d(\rho Z)}{dy}.$$

Łatwo się pojmuje że te warunki nie są *dostateczne*. Jakoż, jeśli mają miejsce, będzie można zcałkować równanie (1), i otrzymać p w funkcyi spółrzędnych x, y, z. Ale, żeby płyn mógł być w równowadze, trzeba oczywiście żeby posiadał w każdym punkcie gęstość ρ taką jakiej potrzebuje do wytrzy-

mania parcia p odpowiedającego temu punktowi. W cieczach ostatniemu warunkowi staje się zawsze zadość; bo ciecze są prawie nieściśliwe, i płyn z daną gęstością może ponosić parcie z jakiemkolwiek natężeniem. Rzeczy dzieją się inaczej w gazach, które, z daną gęstością, mogą tylko wytrzymać parcie wyznaczone.

Całkując równanie (1), otrzymuje się wynik

$$(2) \qquad p = f(x, y, z) + C$$

ze stateczną dowolną C, którą się wyznaczy za pomocą wiadomego parcia w jednym jakimkolwiek punkcie massy płynnej.

Jeśli płyn w równowadze jest cieczą zawartą w naczyniu otwartem, i znana jest powierzchnia wolna tej cieczy, wyznacza się stateczną dowolną C przez wiadome parcie atmosfery na tę powierzchnię. Wtedy, aby mieć parcie w punkcie (x, y) powierzchni wolnej, trzeba wyrugować z między równaniem tej powierzchni i równaniem (2).

334. Powierzchnia poziomu. Nazywa się *powierzchnią poziomu* płynu w równowadze taka powierzchnia, której wszystkie punkta doznają tego samego parcia. Formuła (1) pokazuje że równanie różniczkowe powierzchni jest

$$(3) \qquad Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Jeśli pierwsza strona tego równania jest różniczką dokładną funkcyi φ spółrzędnych x, y, z, ogólne równanie powierzchni poziomu będzie

$$\varphi(x, y, z) = C;$$

gdzie C jest stateczną dowolną, którą się wyznacza pisząc równanie powierzchni poziomu przechodzącej przez punkt dany.

A jeśli $Xdx + Ydy + Zdz$ nie jest różniczką dokładną, wtedy równanie powierzchni poziomu będzie całką równania

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz) = 0,$$

które jest różniczką dokładną gdy istnieje równowaga. Ta całka jest dana przez formułę (2), która bierze kształt

$$lf(x, y, z) = a,$$

gdzie a znaczy stateczną dowolną. Zmieniająo sposobem ciągłym ilość dowolną a, otrzymuje się nieprzerwany szereg powierzchni poziomu, które rozdzielają massę płynną na nieskończenie cienkie *warstwy poziomu*.

Równanie (3) wyraża że siła zewnętrzna P działająca na płyn jest normalna do powierzchni poziomu w każdym punkcie M. Jakoż, weźmy punkt sąsiedni jakikolwiek M′, i niech będzie $MM' = ds$; równanie (3) daje

$$\frac{X}{P}\frac{dx}{ds} + \frac{Y}{P}\frac{dy}{ds} + \frac{Z}{P}\frac{dz}{ds} = 0; \quad \text{więc} \quad \cos(P, ds) = 0.$$

Ztąd wynika że, gdy wszystkie siły działające na płyn są pionowe, jako na przykład w płynach ciężkich, powierzchnia pozioma jest płaszczyzną poziomą.

Jeśli wszystkie siły zewnętrzne działające na płyn są skierowane ku jednemu środkowi stałemu, i zależą tylko od odległości od tego punktu, powierzchnia pozioma jest oczywiście sferyczna.

W cieczach może się zdarzyć że nie ma parcia zewnętrznego. Ale zazwyczaj ciecze są poddane parciu atmosferycznemu, które jest prawie stateczne we wszystkich punktach powierzchni wolnej, i ta ostatnia jest powierzchnią poziomu.

W płynach sprężystych rzecz ma się inaczej. Parcie na po-

wierzchnię wolną gazu nie może nigdy być zero. Albowiem, w tych płynach lotnych, między parciem p i gęstością ρ jest, według ustawy *Mariota*, związek

$$(4) \qquad p = k\rho,$$

w którym spółczynnik k jest ilością stateczną zależącą od temperatury. Żeby więc nie było parcia w jakiej części płynu sprężystego, musiałoby w niej być $\rho = 0$. Co tłumaczy konieczność trzymania gazów w naczyniach zewsząd zamkniętych.

Nazwisko *powierzchni poziomu*, któregośmy w różnych okolicznościach użyli, pochodzi z Hydrostatyki. Powierzchnia wolna wody stojącej jest rzeczywiście powierzchnią poziomu; bo wytrzymuje w każdym punkcie to samo parcie atmosfery spokojnej, a ciężkość, jedyna siła zewnętrzna, jest normalna do tej powierzchni.

335. W przypadku szczególnym gdy $Xdx + Ydy + Zdz$ jest różniczką dokładną pewnej funkcyi φ spółrzędnych x, y, z, równanie (1) staje się

$$dp = \rho d\varphi;$$

wtedy p jest funkcyą z φ. Żeby tego ściśle dowieśdź, uważajmy że ilości p i ρ są, wedle równania obie funkcyami tych samych spółrzędnych x, y, z; rugując między niemi jedną ze zmiennych, na przykład x, będzie

$$F(p, \varphi, y, z) = 0.$$

Ztąd, biorąc pochodne względem każdej ze trzech zmiennych, x, y, z, otrzymujemy

$$\frac{dF}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

$$\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dp}\frac{dp}{dy}+\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

$$\frac{dF}{dz}+\frac{dF}{dp}\frac{dp}{dz}+\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dz}=0.$$

Ale wiemy że $\frac{dp}{dx}=\rho X$, $\frac{dp}{dy}=\rho Y$, $\frac{dp}{dz}=\rho Z$, a mamy teraz $X=\frac{d\varphi}{dx}$, $Y=\frac{d\varphi}{dy}$, $Z=\frac{d\varphi}{dz}$; przez podstawienie tych wartości ostatnie równania biorą kształt

$$\left(\frac{dF}{dp}\rho+\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dx}=0,$$

$$\frac{dF}{dy}+\left(\frac{dF}{dp}\rho+\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dy}=0,$$

$$\frac{dF}{dz}+\left(\frac{dF}{dp}\rho+\frac{dF}{d\varphi}\right)\frac{d\varphi}{dz}=0.$$

Owoż, $\frac{d\varphi}{dx}$ nie jest zero, na mocy pierwszego z trzech poprzedzających równań; musi zatem być

$$\frac{dF}{dp}\rho+\frac{dF}{d\varphi}=0;$$

co wymaga żeby było

$$\frac{dF}{dy}=0 \quad \text{i} \quad \frac{dF}{dz}=0.$$

Więc funkcya F nie zawiera wydatnie zmiennych x, y, z, i mamy

$$F(p, \varphi)=0;$$

zkąd

$$p=f(\varphi).$$

To ustaliwszy, widzimy jeszcze że ρ jest także funkcyą z φ; jakoż, ostatnie równanie daje

$$\rho = \frac{dp}{d\varphi} = f'(\varphi).$$

Ztąd wnosimy że, w przypadku w którym $Xdx + Ydy + Zdz$ jest różniczką funkcyi φ spółrzędnych, ponieważ wtedy $\varphi(x, y, z) = C$, parcie i gęstość są stateczne w każdym punkcie powierzchni poziomu. Więc, w tem założeniu, można uważać wszelki płyn w równowadze jako złożony z nieskończonej liczby warstew jednorodnych nieskończenie szczupłych, oddzielonych jedne od drugich przez powierzchnie poziomu.

W tym samym przypadku, w płynach sprężystych można ogólnie wyznaczyć parcie i gęstość na każdym punkcie powierzchni poziomu. Jakoż, względność $p = k\rho$, w której spółczynnik k zależy od temperatury, daje $\rho = \frac{p}{k}$; zatem, przypuszczając temperaturę jednostajną w całej massie gazu, mamy

$$dp = \frac{p}{k} d\varphi.$$

Zkąd całkując otrzymujemy

(5) $$p = Ce^{\frac{\varphi}{k}};$$

poczem

(6) $$\rho = \frac{C}{k} e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

C jest stateczną dowolną, która przedstawia parcie w każdym punkcie powierzchni poziomu $\varphi = 0$.

Gdy temperatura nie jest jednostajna w massie gazistej, spół-

czynnik k nie jest stateczny; ale równanie

$$\frac{dp}{p}=\frac{d\varphi}{k}$$

pokazuje że wtedy k jest funkcyą z φ. Jeśli będzie można zcałkować to równanie, otrzyma się zawsze p i ρ w funkcyi z φ. Ztąd wynika że, w przypadku o którym mowa, temperatura jest stateczna we wszystkich punktach tej samej powierzchni poziomu.

Atmosfera ziemska. Uważajmy atmosferę, która otacza ziemię ze wszystkich stron; przypuszczając że ziemia jest sferą i nie ma ruchu wirowego. W tem założeniu, siła poruszająca cząstkę $m(x, y, z)$ atmosfery jest skierowana ku środkowi O ziemi, i wyraża się przez $\frac{\mu}{r^2}$; czyniąc $Om=r$. Co daje

$$Xdx+Ydy+Zdz=\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{x}{r}dx+\frac{y}{r}dy+\frac{z}{r}dz\right)=\frac{\mu}{r^2}dr.$$

Mamy zatem

$$d\varphi=\frac{\mu}{r^2}dr,$$

zkąd

$$\varphi=-\frac{\mu}{r}+stat.$$

Więc, w przypuszczeniu któreśmy zrobili, parcie p i gęstość ρ byłyby stateczne we wszystkich punktach jednej powierzchni poziomu atmosfery ziemskiej. Ztąd wynika że atmosfera składałaby się z warstew sferycznych spółśrodkowych z ziemią, mających parcie stateczne i gęstość stateczną. Co wymaga żeby temperatura była ta sama wszędzie, w równej odległości od powierzchni ziemi. Warunek niemożebny, bo słońce nie ogrzewa

jednostajnie wszystkich punktów tej samej warstwy sferycznej. Więc massa atmosfery nie może zostawać w równowadze, gdyby nawet ziemia była nieruchoma. W rzeczywistości atmosfera ziemska nigdy nie jest w równowadze. Słońce sprawia różne ciepło, stosownie do szerokości geograficznej, w punktach tej samej warstwy atmosferycznej; ztąd wynikają prądy powietrza, i to jest jedną z przyczyn wiatrów.

PŁYNY CIĘŻKIE.

336. Parcie w jednym punkcie. Niech będzie massa płynna nie bardzo wielka, aby wolno było uważać ciężar każdego z jej punktów materyalnych $m(x, y, z)$ jako posiadający kierunek stateczny. Biorąc oś OZ wedle pionowej miejsca i w stronę ciężkości, mamy

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=g;$$

będzie zatem

$$(1) \qquad dp=g\rho dz.$$

Powierzchnie poziomu są tu płaszczyznami poziomemi, $gdz=0$. Całkując równanie (1) otrzymujemy

$$p=p_0+\int_0^z g\rho dz.$$

Stateczna p_0 oznacza parcie odpowiedające płaszczyznie poziomu wziętej za płaszczyznę xy. Odległość dwóch płaszczyzn poziomych, przechodzących przez dwa punkta płynu, nazywa się różnicą poziomu tych punktów.

Jakiekolwiek są ilości g i ρ względne do punktu $m(x, y, z)$, całka drugiej strony równania wyraża ciężar graniastonu płyn-

nego, mającego jedność powierzchni za podstawę i rzędnę z za wysokość. Ten ciężar powiększony parciem p_0 stanowi parcie w punkcie $m(x, y, z)$.

Jeśli płyn jest cieczą, będzie

(3) $$p = p_0 + g\rho z.$$

Ta formuła pokazuje że punkt m cieczy wytrzymuje tem mocniejsze parcie im jest głębiej zanurzony.

Gdy $p_p = 0$ będzie $z = \frac{p}{g\rho}$, wtedy rzędna z nazywa się *wysokością parcia p*.

337. Parcie cieczy na dno naczynia. Oznaczmy przez b podstawę poziomą naczynia otwartego jakiegokolwiek, w którem ciecz zawarta wznosi się do wysokości h. Parcie jakie podstawa b ponosi wyraża się przez

$$p = p_0 + g\rho bh.$$

Widzimy więc że, nie licząc parcia atmosfery, jakikolwiek jest kształt naczynia parcie na jego dno równa się ciężarowi słupa cieczy, mającego to dno za podstawę i wzniesienie cieczy za wysokość.

Ten bardzo ważny wynik dowodzi że parcie na dno naczynia nie zależy od massy cieczy w niem zawartej. W naczyniach różnego kształtu i objętości, coraz szerszych albo coraz węższych ku górze, ale mających dna równowarte i napełnionych tą samą cieczą do równej wysokości, parcie na dno jest zupełnie takie samo jak gdyby te naczynia były walcami pionowemi. Łatwo sprawdzić doświadczeniem tę ciekawą własność. Albowiem, wsadziwszy w część wyższą naczynia zamkniętego, pełnego na przykład wody, otwartą rurkę pionową, nawet bardzo cienką byle dość długą, i nalewając ją wodą do przyzwoitej wysokości, można rozsadzić to naczynie jakkolwiek byłoby mocne.

Parcie cieczy na dno naczynia i jej ciężar są to dwie rzeczy zwykle różne, i tylko wtenczas tożsame kiedy naczynie zawierające ciecz jest graniastonem, albo walcem pionowym. We wszystkich innych przypadkach parcie cieczy jest większe albo mniejsze od jej ciężaru, według jak objętość tej cieczy jest mniejsza albo większa od objętości graniastonu pionowego, wystawionego na tej samej co ciecz podstawie.

338. Ciecze mieszane. Jeśli do jednego naczynia wlano dwie ciecze różnej gęstości, ale które się z sobą nie mieszają, jako na przykład oliwa i woda, te ciecze ułożą się do równowagi tak, że lżejsza będzie pływała na cięższej. Ich powierzchnią przedziału będzie płasczyzna pozioma, dlatego że w każdym punkcie powierzchni poziomu gęstość musi być ta sama; coby nie miało miejsca, gdyby ta sama płasczyzna poziomu mogła spotykać obie ciecze. Nazwijmy b dno naczynia, h i h' wysokości dwóch cieczy, ρ i ρ' ich gęstości. Wynika z tego co poprzedza, i na mocy zasady przesyłania parcia równego na wszystkie strony płynu w równowadze, że całe parcie, jakiego doznaje dno naczynia od obydwóch razem cieczy *jednorodnych* i od atmosfery, wyraża się przez

$$(g\rho h + g\rho' h')b + \varpi.$$

Ta teorya może się zogólnić. Jakiekolwiek są ciecze i w jakiejkolwiek liczbie leżą warstwami jedna na drugiej, parcie na dno naczynia albo na płasczyznę poziomą, nie licząc w to atmosfery, równa się zawsze ciężarowi kolumny ciekłej graniastonnej, albo walcowej, mającej za podstawę dno naczynia a za wysokość summę wysokości wszystkich cieczy. A ponieważ te własności mają miejsce jakkolwiek cienkie są warstwy cieczy jednorodnych, ztąd wnosimy że istnieją jeszcze w cieczy której gęstość i nawet ciężar zmienia się ciągle z wysokością, to jest w cieczy *różnorodnej*. Czegośmy zresztą już wyżej (335) dowiedli.

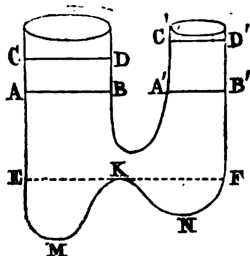
Teorycznie równowaga różnych cieczy w jednem naczyniu może istnieć, gdy warstwy poziome tych cieczy nakładają się jedna na drugą w porządku rosnącym ich gęstości; bo położenie najniższe możebne środka ciężkości nie jest warunkiem niezbędnie potrzebnym do równowagi (150). Tylko w tym przypadku równowaga jest niestała i najmniejsze wstrząśnięcie zaraz ją zrywa. Nalewając z pewną ostrożnością ciecz cięższą na lżejszą, nietrudno widzieć że najsłabsze poruszenie naczynia może zmącić ten sztuczny układ.

Gdy się uważa rozległe massy wody, jako morza, łatwo się pojmuje że powierzchnie poziomu nie są już, i nie mogą być, płaszczyznami poziomemi; ponieważ ciężkość nie ma tego samego kierunku we wszystkich ich punktach. Ale te powierzchnie, nie przestając być normalne do kierunku ciężkości, mają kształt sferyczny; a przynajmniej tak je sobie wyobrażamy nie zważając, ma się rozumieć, na ruch wirowy ziemi i na jej niezupełną sferyczność. Parcie, rozwinięte w jednym jakimkolwiek punkcie warstew wód morskich, rośnie prawie proporcyonalnie do głębokości; tak że dla niektórych punktów leżących blisko dna morskiego, w pewnych krainach, to parcie może niezawodnie przechodzić kilka set atmosfer! Pod tak ogromnemi siłami wody morskie muszą być niezmiernie ściśnięte, i ich gęstość, daleko większa niż na powierzchni, zmienia się zapewne wedle sobie właściwej ustawy.

339. Naczynia spółkujące. Dotąd ciecze o których mówiliśmy zajmowały jedno naczynie; będziemy je teraz uważali zawarte w dwóch naczyniach spółkujących, to jest w naczyniach mających spólny kanał dolny.

Przypuśćmy najpierwej że ta sama ciecz, nalana do dwóch naczyń spółkujących, wznosi się w nich ponad kanał spólny K aż do płaszczyzn poziomych AB, A'B', i poprowadźmy do powierzchni niższej tego kanału płaszczyznę styczną poziomą EKF. Oczywiście pod płaszczyzną EKF ciecz znajduje się w każdem

naczyniu w tych samych warunkach jak gdyby to naczynie istniało samo jedno, z odpowiedającem parciem na płasczyznę



EK albo KF. Nie mniej jest widoczne że ponad płasczyzną EKF powierzchnie wolne AB i A'B' cieczy w dwóch naczyniach są na jednej płasczyznie poziomej; albowiem, dwa naczynia spółkujące stanowią rzeczywiście jedno tylko naczynie szczególnego kształtu, a wiemy że parcie wywarte na powierzchnię poziomu nie zależy bynajmniej od kształtu naczynia w którem się ciecz mieści. Więc płasczyzna pozioma EF, i wszelka inna pozioma nad nią poprowadzona, jest równo parta przez ciecz ponadleżącą; co wymaga koniecznie żeby wysokość cieczy nad płasczyzną EF była wszędzie ta sama.

Wiedząc o tem, wyobraźmy sobie że na powierzchnie wolne AB i A'B', które stanowią tę samą płasczyznę poziomą, nalano dwie różne ciecze, wznoszące się jedna do CD druga do C'D'. Trzeba dla równowagi żeby te dwie nowe ciecze wywierały parcia równe na odpowiedające jedności powierzchni AB i A'B'. Więc, nazywając ρ i ρ' gęstości, h i h' wysokości dwóch cieczy, powinno być

$$gh\rho = gh'\rho'; \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{h}{h'} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

Proporcya pokazuje że, gdy dwie ciecze czynią sobie równo-

wagę w dwóch naczyniach spółkujących, wysokości do jakich się wznoszą są w stosunku odwrotnym gęstości.

Zogólniając to co poprzedza powiedamy: gdyby wlano jakąkolwiek liczbę różnych cieczy w dwa naczynia spółkujące, trzebaby dla równowagi żeby summa wieloczynów gęstości przez wysokości warstew była ta sama w obydwóch naczyniach.

Ale taka równowaga jest niestała w tem że ciecze cięższe dążą zawsze do dna, i z czasem sprawiają w obydwóch naczyniach spółkujących jednakową mieszaninę. Są ciecze które się z sobą nie łączą; takie układają się do równowagi warstwami ponadleżącemi w porządku malejących gęstości: są inne które się ściśle łączą i stanowią jedno nierozdzielne ciało. Lejąc powoli alkohol zafarbowany na powierzchnię wody w szklance, można łatwo widzieć wydatną płaszczyznę przedziału dwóch cieczy; ale, jeśli pręcikiem zamącimy całą massę, zrobi się zaraz ścisła mieszanina dwóch cieczy które się już więcej nie rozdzielą. A co jeszcze osobliwsze, ta mieszanina alkoholu z wodą ma objętość mniejszą od summy objętości dwóch ciał. Zapewne cząstki składowe jednego z tych ciał wchodzą w przestwory cząstek składowych drugiego. Gazy przedstawiają podobne zjawisko; nietylko że, raz zmieszane, już się nie rozstają, ale jeszcze nalane jeden na drugi, nawet lżejszy na cięższy, tworzą zawsze, po niejakim czasie, jedną i tę samą mieszaninę w każdej części naczynia.

Naczynia spółkujące tłumaczą tak zwane *lewary*, i *studnie artezyjskie;* a na zasadzie przesyłania parć równych na wszystkie strony i na teoryi naczyń spółkujących, opiera się teorya *prassy hydraulicznej*.

MIARA WYSOKOŚCI ZA POMOCĄ BAROMETRU.

340. Znajomość parć w punktach atmosfery mogłaby służyć do wyznaczenia wysokości tych punktów ponad poziomem mo-

rza, gdyby wiedziano wedle jakiej ustawy zmieniają się parcia od jednego punktu do drugiego. Ale atmosfera, wzięta w całej swojej massie, nie jest nigdy w spoczynku, z wielorakich przyczyn o których jużeśmy wspominali; dlatego ustawa zmienności parć nie mogła dotąd być ustalona. Jednakże można mieć przybliżoną ustawę parć za pomocą wysokości barometrycznych, i tym sposobem wymierzać wysokości gór, wykonywać geodezyjne poziomowania. O tym ważnym przedmiocie ogólnie przynajmniej słów kilka powiemy.

Wiadomo z Fizyki że, nazywając ρ gęstość, θ temperaturę, α spółczynnik rozszerzania gazu, k jego spółczynnik stateczny i p parcie, między temi ilościami jest związek

$$p = k\rho(1+\alpha\theta); \qquad \text{zkąd} \qquad \rho = \frac{p}{k(1+\alpha\theta)}.$$

Ta formuła stosuje się do mieszanin gazów, albo par w proporcyach statecznych. Powietrze jest właśnie mieszaniną, złożoną głównie z kwasorodu i azotu, niezmienną w różnych wysokościach. Jest w niem rozpuszczona para wodna w małej ilości; ale, ponieważ ta ilość pary mającej gęstość mniejszą niż powietrze, pod tem samem parciem, zwiększa się z temperaturą, gęstość całej mieszaniny która stanowi powietrze, musi się zmniejszać cokolwiek więcej niż to wskazuje ostatnia formuła. Dlatego daje się spółczynnikowi α wartość 0,004, większą od średniej $\alpha = 0,00367$, którą zwykle biorą za spółczynnik rozszerzania gazów, chociaż ten spółczynnik nie jest ściśle jednakowy dla wszystkich.

Niech będą teraz dwa punkta M_0 i M atmosfery, wzniesione na wysokość z_0 i z ponad poziom morski: nazwijmy p_0, ρ_0, θ_0 i p, ρ, θ parcie, gęstość i temperaturę na tych punktach; oznaczmy przez g przyspieszenie ciężkości w punkcie w którym pionowa od z_0 spotyka powierzchnię morza, przez r promień ziemi

w tym punkcie. Nie zważając na ruch ziemi, wyrażamy przyspieszenie ciężkości w punkcie M przez $\frac{gr^2}{(r+z)^2}$.

To ustaliwszy, i przypuszczając równowagę w części atmosfery obejmującej punkta M_0, M, trzeba w ogólnem równaniu równowagi płynów uczynić

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=\frac{gr^2}{(r+z)^2}, \quad \rho=\frac{p}{k(1+\alpha\theta)};$$

co daje dla punktu M, który możemy uważać za jakikolwiek,

$$dp=\frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)}\cdot\frac{dz}{(r+z)^2}.$$

z i θ są dwie zmienne; ale, chociaż oczywiście temperatura θ zmienia się z wysokością z, nie popełnia się znacznego błędu z przyczyny małości α, biorąc za θ wartość stateczną równą średniej temperaturze $\frac{\theta_0+\theta}{2}$ dwóch punktów M_0 i M. Tym sposobem powyższe równanie daje się całkować. Wykonywając całkowanie od z_0 do z, w przypuszczeniu że M_0 jest stacyą niższą a M stacyą wyższą, będzie

$$L\frac{p_0}{p}=\frac{gr^2}{k(1+\alpha\theta)}\,\frac{z-z_0}{(r+z_0)(r+z)};$$

oznaczając przez L logarytm neperyański.

Jeśli nazwiemy ζ różnicę $z-z_0$ wzniesień dwóch stacyj M, M_0, i uczynimy

$$r+z_0=R,$$

zkąd

$$r+z=r+z_0+\zeta=R+\zeta,$$

będziemy mieli do wyznaczenia ζ formułę

$$(1) \qquad \frac{\zeta}{R+\zeta} = \frac{kR(1+\alpha\theta)}{gr^2} L \frac{p_0}{p},$$

którą znacznie uprościć można.

Jakoż, parcia p_0 i p są proporcyonalne do odpowiedających wysokości kolumn barometrycznych, takich jakieby były gdyby merkuryusz miał tę samą temperaturę, na przykład 0°, na obydwóch stacyach. Oznaczmy przez h_0 i h tak poprawione wysokości barometryczne; przez g_0 i g' przyspieszenia ciężkości na M_0 i M; przez D gęstość merkuryuszu na 0°; będzie

$$p_0 = g_0 D h_0, \quad p = g' D h, \quad \frac{g_0}{g'} = \frac{(r+z)^2}{(r+z_0)^2} = \frac{(R+\zeta)^2}{R^2};$$

zkąd

$$\frac{p_0}{p} = \frac{h_0}{h}\left(1 + \frac{\zeta}{R}\right)^2.$$

Podstawiając tę wartość w formule (1), i przemieniając logarytm neperyański na zwyczajny, to jest kładąc zwyczajny podzielony przez moduł $M = 0,4342945$, otrzymujemy

$$\zeta = \frac{kR^2}{gr^2}\frac{(1+\alpha\theta)}{M}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\left\{\log\frac{h_0}{h} + 2\log\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\right\}.$$

Trzeba jeszcze zogólnić formułę, rugując ilość g, której wartość 9,8088 służy tylko dla równoleżnika Paryża. Owoż, nazywając λ szerokość geograficzną, w ostatnich czasach znaleziono

$$g = 9,831084 - 0,050057 \operatorname{dos}^2\lambda$$

$$= 9,806056(1 - 0,002552 \operatorname{dos} 2\lambda);$$

wedle tych wyrachowań i wielokrotnie sprawdzanych doświad-

czeń, przypuszczając stosunek $\frac{R}{r}$ mało różny od jedności, można położyć

$$\frac{k}{gM}\frac{R^2}{r^2}=\frac{18409}{1-0,002552\cos 2\lambda}$$

co daje ostateczną formułę

$$(2)\quad \zeta=\frac{18409(1+0,0040)}{1-0,002552\cos 2\lambda}\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\left\{\log\frac{h_0}{h}+2\log\left(1+\frac{\zeta}{R}\right)\right\}.$$

Ramond, po wielu obserwacyach uczynionych w *Pireneach* gdzie prawie jest $2\lambda=0$, przyszedł do formuły prostej

$$\zeta=18393(1+\alpha\theta)\log\frac{h_0}{h}.$$

Gdy stosunek $\frac{\zeta}{R}$ jest bardzo małym ułamkiem, można go zaniedbać przy jedności; w tym przypadku formuła (2) staje się

$$\zeta=18409(1+\alpha\theta)\log\frac{h_0}{h};$$

wynik bardzo mało różny od poprzedzającego.

PARCIE CIECZY NA POWIERZCHNIĘ PŁASKĄ ZANURZONĄ.

341. Niech będzie A miara powierzchni płaskiej zanurzonej w cieczy. Wiemy że wszystkie punkta powierzchni A wytrzymują parcia normalne cieczy w równowadze, i parcie jakiego jej powierzchnia wolna doznaje; ale nie będziemy zważali na to ostatnie, bo ono jest stateczne i w razie potrzeby łatwe do przywrócenia w otrzymanych wynikach. Z tem zastrzeżeniem, będziemy rozu-

mowali jak gdyby każda nieskończenie mała cząstka $d\omega$ powierzchni A ponosiła parcie od samej tylko cieczy; to zaś parcie wyraża się przez $g\rho z d\omega$, gdzie z znaczy odległość cząstki $d\omega$ od poziomu cieczy, który bierzemy za płaszczyznę xy. Owoż, rzeczone parcia, będące siłami normalnemi do płaszczyzny partej A, mają wynikowę równą ich summie $\sum g\rho z d\omega$; więc, oznaczając przez P tę wynikowę, przez z_1 odległość środka ciężkości powierzchni A od poziomu, i przypuszczając ciecz jednorodną, mamy

$$P = g\rho \sum z d\omega = g\rho A z_1;$$

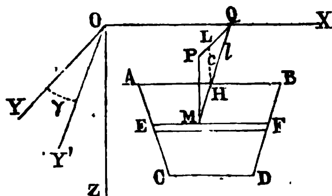
co w języku zwyczajnym tak się wysłowia:

Całe parcie, jakie ciecz wywiera na powierzchnię płaską zanurzoną, jest równe ciężarowi graniastonu ciekłego, mającego tę powierzchnię za podstawę i głębokość (z_1) *jej środka ciężkości za wysokość.*

Ztąd wynika że parcie P jest niezależne od orientacyi płaszczyzny partej A, byle tylko jej środek ciężkości zostawał stały.

Środek parcia. Wynikowa P parć normalnych do płaszczyzny A przecina ją w punkcie który nazwano *środkiem parcia*. Ten punkt schodzi się oczywiście ze środkiem ciężkości płaszczyzny ograniczonej A, gdy ona jest pozioma; ale, jeśli jest nachylona, środek parcia pada niżej środka ciężkości. Jakoż, przypuśćmy że dano położenie poziome płaszczyznie A, obracając ją około osi poziomej która na niej leży i przechodzi przez jej środek ciężkości; natężenie parcia P nie będzie zmienione, ale wtedy środek parcia przypadnie w środku ciężkości płaszczyzny A. Owoż, jeśli przywrócimy tę płaszczyznę na położenie nachylone jakie miała, parcia cząstkowe na jej część wyższą zostaną zmniejszone a parcia na część niższą będą powiększone; więc wynikowa wszystkich parć przechodzi pod osią wirowania. Co dowodzi że środek parcia leży niżej środka ciężkości

Środek parcia wyznacza się przez momenta względem trzech płasczyzn spółrzędnych. Aby uprościć poszukiwanie, niech będzie OX przecięcie płasczyzny A z płasczyzną poziomą cieczy, O punkt osi OX wzięty za początek spółrzędnych, OZ jego



pionowa idąca w stronę ciężkości i OY pozioma prostopadła do OX; nakoniec OY' ślad płasczyzny A na płasczyznie zy, i γ kąt YOY' płasczyzny A z poziomem cieczy.

Nazywając x_2, y_2, z_2 spółrzędne środka parcia, mamy formuły sił równoległych

$$P = \sum p d\omega = \sum g\rho z d\omega,$$

$$Px_2 = \sum p x d\omega = \sum g\rho z x d\omega,$$

$$Py_2 = \sum p y d\omega = \sum g\rho z y d\omega,$$

$$Pz_2 = \sum p z d\omega = \sum g\rho z^2 d\omega.$$

Gdy jest wiadome położenie płasczyzny zanurzonej, otrzymuje się łatwo środek parcia przez dwie spółrzędne x i y' odniesione do dwóch osi prostokątnych OX i OY' leżących na tej płasczyznie. Albowiem wtedy można wyrugować z, uważając

że trójkąt prostokątny MPQ daje

$$z = y' \text{wst}\gamma.$$

Poczem, jeśli podzielimy powierzchnię płaską A na nieskończenie wązkie paski, równoległe do osi OX, zkąd wynika

$$d\omega = dxdy,$$

możemy, przypuszczając ciecz jednorodną i wiedząc że parcie jest tosamo w tej samej głębokości, wykonać całkowanie względem x, to jest wzdłuż jednego paska dla którego y' zostaje niezmienne. Na mocy tych założeń i podstawień, odrzucając już niepotrzebny akcent rzędnej y', znajdujemy trzy proste formuły

$$\text{P} = g\rho \,\text{wst}\gamma \sum y d\omega = g\rho \,\text{wst}\gamma \int (x'' - x') y dy,$$

$$\text{P}x_2 = g\rho \,\text{wst}\gamma \sum x y d\omega = \frac{1}{2} g\rho \,\text{wst}\gamma \int (x''^2 - x'^2) y dy,$$

$$\text{P}y_2 = g\rho \,\text{wst}\gamma \sum y^2 d\omega = g\rho \,\text{wst}\gamma \int (x'' - x') y^2 dy.$$

w których granice całkowań zależą od równania obwodu powierzchni A. Nie przydaliśmy statecznej dowolnej, dlatego że płasczyzna zanurzona A doznaje od atmosfery parć równych i przeciwnych które się niszczą.

Uważając że całka $\sum y d\omega$ jest momentem powierzchni płaskiej A względem osi OX, a całka $\sum y^2 d\omega$ jej momentem bezwładności względem tej samej osi, nietrudno dowieśdź następującego twierdzenia:

Środek parcia powierzchni płaskiej jest środkiem uderzenia, w wirowaniu tej powierzchni około osi poziomej wedle której jej płaszczyzna przecina poziom cieczy.

Jakoż, nazywając k promień wirowy powierzchni płaskiej A około osi OX, z ostatnich formuł wywodzimy

$$y_2 = \frac{\Sigma y^2 d\omega}{\Sigma y d\omega} = \frac{\mathrm{A}k^2}{\mathrm{A}y_1} = \frac{k^2}{y_1};$$

co pokazuje że środek parcia znajduje się na osi oscyllacyi względnej do osi zawieszenia OX. Przenieśmy teraz oś OY', równolegle do niej samej, aż spotka środek parcia przecinając oś OX w punkcie O'; jeśli odniesiemy spółrzędne do nowego układu osi O'X, O'Y, będzie

$$\mathrm{P}x_2 = 0, \qquad \text{zatem} \qquad \sum xy = 0.$$

Owoż, dla punktów płasczyzny A, wziętej za płasczyznę xy, rzędne z są zero; co daje

$$\sum xz = 0.$$

Więc oś OX jest osią bezwładności powierzchni płaskiej A względem punktu O'. To dowodzi że środek parcia tej powierzchni jest jej środkiem uderzenia (227).

342. Na zastosowanie uważajmy (*fig. pow.*) trapez zanurzony ABDC mający podstawy poziome. Widzimy łatwo że środek parcia trapezu leży na linii łączącej środki dwóch podstaw; dość więc, do wyznaczenia tego punktu znaleźć jedną z jego spółrzędnych, na przykład y. Owoż, jeśli oznaczymy przez a podstawę wyższą AB, przez b podstawę niższą CD, przez h wysokość trapezu, przez u odległość podstawy EF paska

$(x''-x')dy$ od podstawy AB, i przez l, odległość HQ tej ostatniej od osi OX będzie

$$y=u+l, \qquad dy=du,$$

$$(x''-x')dy=\left(a-\frac{a-b}{h}u\right)du;$$

więc, nazywając u_2 odległość środka parcia od podstawy AB, mamy

$$(u_2+l)\int_0^h(u+l)\left(a+\frac{b-a}{h}u\right)du=\int_0^h(u+l)^2\left(a+\frac{b-a}{h}u\right)du,$$

albo, po zcałkowaniu,

$$2(u_2+l)\left\{h(a+2b)+3l(a+b)\right\}=h^2(a+3b)+4hl(a+2b)+6l^2(a+b).$$

Ztąd

$$u_2=\frac{h}{2}\cdot\frac{2l(a+2b)+h(a+3b)}{h(a+2b)+3l(a+b)}.$$

Jeśli chcemy wprowadzić nachylenie γ płasczyzny trapezu na poziom cieczy i odległość HL $=c$ jego podstawy wyższej a od tego poziomu, dość zastąpić l przez $\frac{c}{\text{wst}\gamma}$ w ostatniej formule; i będzie

$$u_2=\frac{h}{2}\cdot\frac{2c(a+2b)+h(a+3b)\text{wst}\gamma}{h(a+2b)\text{wst}\gamma+3c(a+b)}.$$

Gdy podstawa wyższa a jest na poziomie wody, wtedy $c=0$, i wartość u_2 staje się

$$u_2=\frac{h}{2}\cdot\frac{a+3b}{a+2b}.$$

W tem położeniu podstawy środek parcia jest niezależny od nachylenia płasczyzny trapezu.

Jeśli trapez jest poziomy, to $\gamma = 0$, i mamy

$$u_2 = \frac{h(a + 2b)}{3(a + b)}.$$

Ten wynik pokazuje że w położeniu poziomem trapezu środek parcia schodzi się ze środkiem ciężkości; co naprzód wiadome.

Jeśli $a = b$, trapez jest równoległobokiem; biorąc $c = 0$ otrzymujemy

$$u_2 = \frac{2h}{3}.$$

Nakoniec, trapez staje się trójkątem jeśli $a = 0$ albo $b = 0$. Przypuszczając zarazem $c = 0$, będzie

$$u_2 = \frac{3h}{4} \qquad \text{albo} \qquad u_2 = \frac{h}{2};$$

w pierwszym przypadku wierzchołek trójkąta zanurzonego leży na powierzchni wody, w drugim jego podstawa.

343. Gdy powierzchnia zanurzona w cieczy nie jest płaska, parcie jakie wytrzymuje nie jest summą parć cząstkowych; bo one nie są już równoległe, i ogólnie nie mają wynikowej. Ale te parcia jako siły mogą się zawsze sprowadzić do jednej siły i dwojanu. Jeśli więc, stosując do powierzchni partej równania równowagi ciał bryłowych, znaleziono że wynikowa przeniesienia leży na płasczyznie dwojanu wynikowego, powierzchnia zanurzona ma środek parcia; w przeciwnym przypadku środek parcia nie istnieje.

Niech będą OX, OY dwie osie prostokątne, nakreślone na

płasczyznie poziomu, i OZ pionowa punktu O, tak jak je wskazuje figura poniżej; p_0 parcie na poziom; X, Y, Z rzuty na osiach OX, OY, OZ wynikowej przeniesienia parć cząstkowych, i L, M, N składowe dwojanu wynikowego; *a*, *b*, *c* rzuty powierzchni partej, na płasczyznach odpowiednio prostopadłych do tych osi; *da*, *db*, *dc* rzuty nieskończenie małej cząstki $d\omega$ powierzchni, na tych samych płasczyznach spółrzędnych; nakoniec y_a i z_a, x_b i z_b, x_c i y_c spółrzędne środków ciężkości rzutów *a*, *b*, *c*.

Mamy

$$X = \int pda = p_0 a + g\rho \int zda = p_0 a + g\rho a z_a,$$

$$Y = \int pdb = p_0 b + g\rho b z_b,$$

$$Z = \int pdc = p_0 c + g\rho \int zdc,$$

$$L = \int p(ydc - zdb) = p_0(cy_c - bz_b) + g\rho \int (yzdc - z^2 db),$$

$$M = \int p(zda - xdc) = p_0(az_a - cx_c) + g\rho \int (z^2 da - xzdc),$$

$$N = \int p(xdb - yda) = p_0(bz_b - ay_a) + g \int (rzdb - yzda).$$

Żeby jedyna wynikowa istniała, trzeba i dość jest żeby jej kierunek był prostopadły do osi dwojanu wynikowego; co wymaga żeby było

$$XL + YM + ZN = 0;$$

a wiadomo że kierunek wynikowej przedstawiają równania

$$Zy - Yz = L,$$

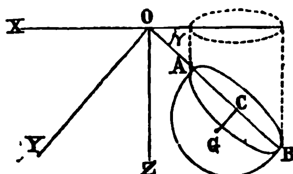
$$Xz - Zx = M,$$

$$Yx - Xy = N,$$

które nie są oddzielne, i, żeby były zgodne, trzeba właśnie żeby powyższemu warunkowi stawało się zadość.

Gdy powierzchnia zanurzona ma płasczyznę symetryi pionową, to ma środek parcia; bo wtedy wszystkie parcia przywodzą się po dwa do sił leżących na tej płasczyznie.

Zastosujmy to do *półsferza* (*). Niech będzie XOZ płasczyzna pionowa przechodząca przez środek C sfery promienia R, *h* rzędna tego środka, γ nachylenie płasczyzny podstawy kołowej AB półsferza na płasczyznę poziomu, OY przecięcie się tych dwóch płasczyzn. Wziąwszy oś OZ w kierunku ciężkości, bierzemy oś OX w kierunku przeciwnym zwyczajnemu, aby tym sposobem zachować znaki i notacye momentów.



Ponieważ $b = 0$, mamy tylko do uważania trzy formuły

$$X = p_0 a + g\rho a z_a$$

$$Z = p_0 c + g\rho \int z dc$$

$$M = p_0(a z_a - c z_c) + g\rho \int z^2 da - g\rho \int x z dc.$$

Owoż, rzuty półsferza na płasczyznach yz i xy są rzutami

(*) Przykład wzięty z dzieła *Traité de Mécanique générale* par RESAL. Paris, 1874. Kurs wykładany w szkole politechnicznej.

koła AB które zamyka tę powierzchnię; będzie zatem

$$X = \pi R^2 p_0 \,\mathrm{wst}\gamma + g\rho\pi R^2 h \,\mathrm{wst}\gamma$$

$$Z = \pi R^2 p_0 \,\mathrm{dos}\gamma + g\rho \int zdc$$

$$M = \frac{\pi R^2 h}{\mathrm{wst}\gamma} p_0 + g\rho \int z^2 da - g\rho \int xzdc.$$

Trzeba teraz znaleźć trzy całki. Pierwsza $\int zdc$ wyraża objętość zawartą między powierzchnią półsferza i walcem rzutującym poziomo podstawę AB; jej wartość jest

$$\int zdc = \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 h \,\mathrm{dos}\gamma.$$

Całka $\int xzdc$ przedstawia moment, względem OY, powyższej objętości półsferza i walca ściętego. Aby otrzymać jej wartość, uważajmy że, nazywając G środek ciężkości półsferza, mamy

$$CG = \frac{3}{8} R.$$

Owoż odcięta x_1 tego środka G, ze zmienionym znakiem, jest

$$-x_1 = OC \,\mathrm{dos}\gamma - CG \,\mathrm{wst}\gamma = h \,\mathrm{dot}\gamma - \frac{3}{8} R \,\mathrm{wst}\gamma;$$

zatem moment półsferza względem osi OY wyraża się przez

$$-\frac{2}{3}\pi R^3 \left(h \,\mathrm{dot}\gamma - \frac{3}{8} R \,\mathrm{wst}\gamma\right).$$

Podobnie moment walca ściętego, względem tej samej osi OY,

przedstawia się przez

$$\pi R^2 h \operatorname{dos}\gamma\,(-h \operatorname{dot}\gamma) = -\pi R^2 h^2 \frac{\operatorname{dos}^2\gamma}{\operatorname{wst}\gamma}.$$

Będzie więc

$$\int xz\,dc = \frac{1}{4}\pi R^4 \operatorname{wst}\gamma - \frac{2}{3}\pi R^3 h \operatorname{dot}\gamma - \pi R^2 h^2 \frac{\operatorname{dos}^2\gamma}{\operatorname{wst}\gamma}.$$

Nakoniec całka $\int z^2 dc$ jest momentem bezwładności, około OY, rzutu koła AB na płaszczyznie yz, i równa się (187 i 206)

$$\int z^2 dc = \pi R^2 \operatorname{wst}\gamma\left(\frac{R^2}{4}\operatorname{wst}^2\gamma + h^2\right).$$

Podstawiając te wartości całek, otrzymujemy

$$= \pi R^2 p_0 \operatorname{dos}\gamma + \frac{2}{3}\pi R^3 + \pi R^2 h \operatorname{dos}\gamma,$$

$$M = \frac{\pi R^2 h}{\operatorname{wst}\gamma} p_0 + g\rho\pi R^2\left(\frac{R^2}{4}\operatorname{wst}^3\gamma + h^2 \operatorname{wst}\gamma - \frac{R^2}{4}\operatorname{wst}\gamma \right.$$
$$\left. + \frac{2}{3} R h \operatorname{dot}\gamma + h^2 \frac{\operatorname{dos}^2\gamma}{\operatorname{wst}\gamma}\right)$$

$$= \frac{\pi R^2 h}{\operatorname{wst}\gamma} p_0 + g\rho\pi R^2\left(\frac{h^2}{\operatorname{wst}\gamma} + \frac{2}{3} R h \operatorname{dot}\gamma - \frac{R^2}{4}\operatorname{wst}\gamma \operatorname{dos}^2\gamma\right).$$

Znając X, Z i M, mamy dwa równania

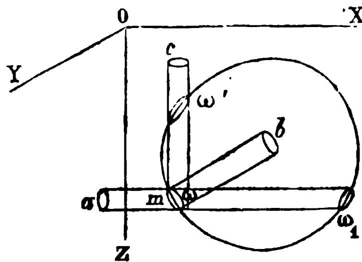
$$X z_2 - Z x_2 = M,$$

$$(x_2 + h \operatorname{dot}\gamma)^2 + (z_2 - h)^2 = R,$$

tóre wyznaczają spółrzędne środka parcia wywartego na powierzchnię półsfery.

PARCIE PŁYNU CIĘŻKIEGO W RÓWNOWADZE NA POWIERZCHNIĘ CIAŁA.

344. Zasada Archimedesa. Niech będzie ciało bryłowe zupełnie zanurzone w cieczy albo w jakimkolwiek płynie w równowadze. Weźmy nieskończenie małą cząstkę ω powierzchni tego ciała w jakimkolwiek punkcie m, i nazwijmy, jako zwykle p



parcie w tym punkcie, odniesione do jedności powierzchni. Ponieważ płyn jest w równowadze, parcie na cząstkę ω będzie do niej normalne i wyrazi się przez $p\omega$. Jeśli więc oznaczymy przez α, β, γ kąty jakie normalna do powierzchni ciała w punkcie m czyni z trzema osiami spółrzędnych prostokątnych, i przez a, b, c rzuty cząstki ω na trzech płaszczyznach odpowiednio prostopadłych do OX, OY, OZ; składowe parcia $p\omega$, równoległe do tych osi, będą

$$p\omega \operatorname{dos}\alpha = pa, \qquad p\omega \operatorname{dos}\beta = pb, \qquad p\omega \operatorname{dos}\gamma = pc.$$

Nietrudno widzieć że wszystkie parcia równoległe do osi poziomych, OX albo OY, niszczą się po dwa. Jakoż, uważajmy składową pa; nieskończenie szczupły graniastosłup ma równoległy do OX, wycina na powierzchni ciała zanurzonego nieskończenie małą cząstkę ω_1, której rzutem na płaszczyznie yz jest a, rzut

cząstki ω; nadto, parcie płynu na cząstkę ω_1, odniesione do jedności powierzchni, jest to samo p co na cząstkę ω, bo obie cząstki ω i ω_1 są w tej samej głębokości. Ztąd wynika że składowa parcia $p\omega_1$ równoległa do OX ma wielkość pa; a ponieważ kierunek jej działania jest wprost przeciwny temu w którym działa składowa parcia w punkcie m, także równoległa do OX, te dwie składowe równe i wprost przeciwne niszczą się między sobą. Dowiedzionoby podobnie że wszystkie składowe parć równoległe do OY niszczą się także między sobą. Zostają więc tylko składowe pionowe.

Aby znaleźć wynikowę parć pionowych, na cząstce ω wystawmy graniaston pionowy; ten graniaston wytnie w części wyższej powierzchni ciała drugą nieskończenie małą cząstkę ω', której rzut na płaszczyznie xy miesza się z rzutem c cząstki ω. Zatem, jeśli p' oznacza parcie płynu na ω', odniesione do jedności powierzchni, nieskończenie cienki graniaston będzie poddany parciu pionowemu, które działa z dołu do góry i przedstawia się (336) przez

$$c(p-p') = c\left(\int_0^z g\rho dz - \int_0^{z'} g\rho dz\right) = c\int_{z'}^{z} g\rho dz.$$

To więc parcie, jakakolwiek jest ciecz, jednorodna albo złożona z warstew jednorodnych, równa się ciężarowi graniastonu cieczy który przechodzi przez przecięcia ω i ω'. Ztąd wnosimy że wszystkie parcia cieczy, albo płynu jakiegokolwiek, które cisną na powierzchnię ciała zanurzonego, składają się w jedną wynikowę pionową, która działa w stronę przeciwną ciężkości, jest równa ciężarowi płynu wypchniętego i przechodzi przez środek ciężkości jego massy. Ta wynikowa nazywa się *pchaniem płynu.*

Taka jest zasada odkryta przez *Archimedesa.*

W powyższem dowodzeniu przypuściliśmy że ciało jest zu-

pełnie pogrążone w cieczy, albo w płynie jakimkolwiek; zasada Archimedesa istnieje i wtedy kiedy ciało w części tylko jest zanurzone. Jakoż, wyobraźmy sobie walec pionowy przechodzący przez linię przecięcia powierzchni ciała z płasczyzną poziomu. Ten walec rozdziela ciało nie całkiem zanurzone na dwie części jedna z tych części ta która zostaje na zewnątrz walca jest zupełnie pogrążona, do niej więc stosuje się poprzednie rozumowanie druga część stanowi walec którego podstawa niższa, sama jedna w zetknięciu z płynem ponosi jego parcie pionowe; podstawa zaś wyższa będąca częścią płasczyzny poziomu nie ponosi żadnego parcia od płynu. Ztąd wynika że parcia pionowe wy warte na walec są summą wyrażoną przez

$$pc = c\int_0^z g\rho dz.$$

Nakoniec, część niezanurzona ciała nie doznaje żadnego parcia od płynu. Więc, jakakolwiek jest ciecz albo płyn ciężki w spoczynku, ciało w nich zupełnie albo częściowo zanurzone, wytrzymuje parcie pionowe, z dołu do góry, które jest siłą pchania równą ciężarowi płynu przemieszczonego, i przechodzi przez środek ciężkości tego płynu. Tę zasadę *Archimedesa* wyrażają zwykle mówiąc: *Gdy płyn jest w równowadze, ciało w nim zanurzone traci tyle ze swojego ciężaru ile waży płyn przez nie wypchnięty.*

Można dowieśdź *a priori* zasady Archimedesa. Uważajmy jakąkolwiek cząstkę massy płynu w równowadze; ta cząstka jest także w równowadze, i oczywiście będzie w niej jeszcze jeśli przypuścimy myślą że się stała bryłą. Ale wtedy wszystkie parcia wywarte na powierzchnię tej bryły przywodzą się do jednej wynikowej, równej i wprost przeciwnej jej ciężarowi. Jest zaś przez się widoczne że te parcia będą miały tę samą wynikowę, gdy za massę płynu, która się stała idealną bryłą, podstawimy jakiekolwiek ciało bryłowe tego samego kształtu. Przychodzimy

więc tym prostym i jasnym sposobem do wyżej wysłowione zasady.

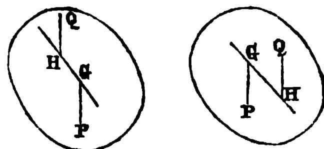
Z przyczyny istnienia zasady Archimedesa, która się stosuje tak dobrze do ciał gazistych jako do ciekłych, gdy ważymy jakiekolwiek ciało nie otrzymujemy nigdy prawdziwego ciężaru, ale tylko przewyżkę tego ciężaru nad ciężarem płynu wypchniętego w którym wykonywamy ważenie; tak że, nazywając P i ϖ te dwa ciężary, D gęstość prawdziwą, i ρ gęstość pozorną, mamy

$$\frac{P}{P-\varpi}=\frac{D}{\rho}; \quad \text{zkąd} \quad P=\frac{D\varpi}{D-} \cdot$$

To równanie służy zwykle do wyrachowania gęstości D danego ciała, gdy jest znany ciężar gatunkowy powietrza; na niem opiera się teorya szali hydrostatycznej i areometrów.

345. Równowaga ciała bryłowego zupełnie zanurzonego. Jeśli to ciało jest tylko pod samem działaniem ciężkości i płynu otaczającego, trzeba dla równowagi : 1° żeby jego ciężar był równy ciężarowi płynu wypchniętego ; 2° żeby środek ciężkości ciała i środek ciężkości płynu wypchniętego były na jednej i tej samej pionowej.

W drugim warunku są dwa ważne szczególy do rozróżnienia. Ponieważ ciało zanurzone jest bryłowe, można, nie zmieniając nic w jego stanie równowagi albo ruchu, zastąpić siły którym jest poddane przez ich odpowiedne wynikowe. Niech będą : P siła pionowa która przedstawia ciężar ciała zanurzonego i



przechodzi przez ego środek ciężkości G, Q parcie wynikowe

także pionowe i równe sile P, ale działające w stronę przeciwną i przyłożone do środka ciężkości H płynu wypchniętego. Dlatego że wynikowa przeniesienia sił P i Q jest zero jakiekolwiek położenie pochyłe w płynie danoby ciału bryłowemu bez prędkości początkowej, środek ciężkości G ciała zostanie nieruchomy; ale, z przyczyny działania siły Q, ciało obróci się około G ku położeniu w którem H jest pionowo ponad G. Ztąd wynikają dwie równowagi, jedna stała druga niestała, według jak G jest pionowo pod albo nad H.

Jeśli ciężar ciała zanurzonego jest większy od ciężaru tej samej objętości cieczy, ciało się pogrąży aż do dna naczynia, albo ogólniej, aż dojdzie do głębokości w której ciężar wypchniętej cieczy jest równy jego ciężarowi; a jeśli przeciwnie ciało bryłowe jest lżejsze od cieczy, to się w niej nie zanurzy zupełnie i będzie na niej pływało.

CIAŁA PŁYWAJĄCE.

346. Równowaga ciał pływających. Żeby ciało pływające, to jest częściowo tylko zanurzone w cieczy, było w równowadze, trzeba, wedle zasady Archimedesa, żeby jego ciężar był równy ciężarowi cieczy wypchniętej, i żeby jego środek ciężkości był na jednej pionowej ze środkiem ciężkości tej cieczy przemieszczonej.

Otóż, jeśli ciało i ciecz są jednorodne, nazywając V i D, v i d ich objętości i gęstości odpowiedające, widzimy że pierwszemu warunkowi staje się zadość, gdy jest

$$VD = vd, \qquad \text{zkąd} \qquad \frac{D}{d} = \frac{v}{V}.$$

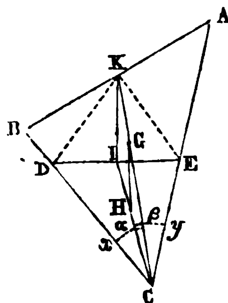
Co dowodzi że ciężary ciała pływającego i cieczy wypchniętej przez część zanurzoną powinny być odwrotnie proporcyonalne

do objętości ich figur. Ztąd wynika że zagadnienie ciała pływającego przywodzi się do następującego zagadnienia Geometryi : *Podzielić ciało płaszczyzną sieczną na dwie części mające dany stosunek objętości, tak żeby ich środki ciężkości były na jednej prostopadłej do tej płaszczyzny.*

Zagadnienie rozwiązuje się zaraz w przypadku ciała pływającego mającego oś symetryi pionową, i w przypadku graniastonu albo walca mającego krawędzie pionowe. Dość tylko podzielić objętość na dwa odcinki mające stosunek dany, płaszczyzną prostopadłą do osi albo do krawędzi bocznych.

Na zastosowanie będziemy szukali *położenia równowagi graniastonu trójkątnego prostego, pływającego na cieczy i mającego krawędzie poziome.*

Uważajmy najpierwej przypadek w którym jedna tylko krawędź C graniastonu jest zanurzona. Ponieważ objętości grania-



stonu i jego części zanurzonej są proporcyonalne do powierzchni swoich przecięć prostych, wyobrażając sobie przecięcie proste ABC graniastonu widzimy łatwo że cała rzecz zależy na poprowadzeniu linii prostej DE, któraby wyznaczyła trójkąt DEC mający z trójkątem ABC wiadomy stosunek *r* gęstości graniastonu do gęstości cieczy, tak żeby środki ciężkości H i G tych dwóch trójkątów były na jednej prostopadłej do DE.

Niech będą a, b, c boki trójkąta ABC, k ośrodkowa CK boku AB, I środek boku DE; $CD = x$ i $CE = y$ części zanurzone boków a i b; nakoniec, kąt $KCB = \alpha$ i kąt $KCA = \beta$. Mamy zaraz związek

(1) $$xy = rab.$$

Trzeba teraz wyrazić że prosta GH równoległa do KI jest prostopadła do DE. Owóż, żeby w trójkącie KDE ośrodkowa KI boku DE była do niego prostopadła, ten trójkąt powinien być równoramienny, KD = KE; znajdujemy więc drugie równanie

$$\overline{KD}^2 = x^2 + k^2 - 2kx \operatorname{dos}\alpha = \overline{KE}^2 = y^2 + k^2 - 2ky \operatorname{dos}\beta$$

albo

(2) $$x^2 - y^2 - 2k(x \operatorname{dos}\alpha - y \operatorname{dos}\beta) = 0.$$

Rugując y między (1) i (2), otrzymujemy

(3) $$x^4 - 2kx^3 \operatorname{dos}\alpha + 2rabkx \operatorname{dos}\beta - r^2a^2b^2 = 0.$$

To równanie 4go stopnia, którego ostatni wyraz jest odjemny, ma przynajmniej dwa pierwiastki rzeczywiste, jeden dodatny drugi odjemny. Ostatni nie stosuje się do zagadnienia, dlatego że linia DE musi być zawarta w trójkącie ABC. Gdy kąty α i β są oba ostre, przypuszczając że równanie ma wszystkie cztery pierwiastki rzeczywiste, widzimy, za pomocą prawidła znaków *Dekarta* (Descartes), że dwa drugie pierwiastki są dodatne. Ale z pierwiastków dodatnych ten tylko może być przyjęty który, będąc mniejszy od a, daje dla y wartość mniejszą od b. Istnieją więc najwięcej trzy położenia równowagi graniastonu, dla których jeden z wierzchołków jego przecięcia prostego jest całkiem pogrążony.

To zagadnienie przywodzi się do prowadzenia, przez punkt

dany K, normalnej do hiperboli której niemaltycznemi są CA i CB. Jakoż, jeśli w trójkącie ABC nakreślono różne proste, jako DE, tworzące z ramionami CA i CB trójkąty CDE równowarte, środek każdej z tych prostych będzie się znajdował na hiperboli mającej CA i CB za niemaltyczne, i w każdym z tych środków, I, prosta odpowiedająca, jako DE, będzie styczną do tej krzywej. A że prosta KI jest prostopadła do DE, cała więc rzecz przywodzi się do prowadzenia przez punkt K normalnej do hiperboli. Owoż, wiadomo że z jednego punktu można poprowadzić cztery normalne do tej stożkowej; jedna z nich należy do drugiej gałęzi, zawartej w kącie który jest wierzchołkiem przeciwległy kątowi ACB; więc zagadnienie równowagi, którem się zajmujemy, może mieć tylko trzy rozwiązania możebne. Co jest potwierdzeniem wyniku otrzymanego wyżej.

Gdy trójkąt ABC jest równoramienny, czyli gdy $a = b$, będzie $\alpha = \beta$ i $k^2 = \frac{4a^2 - c^2}{4}$; wtedy równania (1) i (2) stają się

$$xy = ra^2, \qquad x^2 - y^2 = \frac{4a^2 - c^2}{2a}(x - y).$$

Uczyni się zadość tym równaniom, biorąc najpierwej

$$(4) \qquad x = y = a\sqrt{r};$$

wartość możebna, dlatego że $r < 1$.

Znosząc czynnik $x - y$, mamy dwa równania

$$xy = ra^2 \quad \text{i} \quad x + y = \frac{4a^2 - c^2}{2a},$$

w których wartości x i y są pierwiastkami równania

$$x^2 - \frac{4a^2 - c^2}{2a}x + ra^2 = 0.$$

Te wartości będą rzeczywiste i nierówne, rzeczywiste i równe, albo urojone, według jak będzie

$$(6) \qquad (4a^2 - c^2)^2 \gtreqless 16ra^4.$$

Ale trzeba jeszcze żeby wartości dla x i y były mniejsze od a. Zagadnienie ma dwa rozwiązania, jeśli staje się zadość następującemu podwójnemu warunkowi

$$1 - \sqrt{r} > \frac{c^2}{4a^2} > \frac{1-r}{2}.$$

W przypadku pierwiastków równych będzie

$$x = y = \frac{4a^2 - c^2}{4a} = a\sqrt{r};$$

co jest wartością (4).

Nakoniec, gdy trójkąt ABC jest równoboczny, istnieje zawsze pierwsze rozwiązanie

$$x = y = a\sqrt{r};$$

a równanie (5) daje drugie

$$x = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{9 - 16r}),$$

$$y = \frac{a}{4}(3 - \sqrt{9 - 16r}).$$

Będzie więc trzy położenia równowagi graniastonu, jeśli r mieści się między $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} + \frac{1}{16}$.

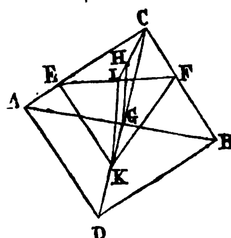
Przypadek w którymby dwa wierzchołki A i B były zanurzone a trzeci C zewnątrz, przywodzi się do poprzedzającego. Jakoż, w tem położeniu graniastonu mamy

$$\frac{\text{czwor. ABDE}}{r}=\frac{\text{trój. ABC}}{1}=\frac{\text{trój. CDE}}{1-r}\text{, zkąd CDE}=(1-r)\,\text{ABC};$$

a jeśli środki ciężkości czworoboku ABDE i trójkąta ABC są na jednej prostopadłej do poprzecznej DE, to środek ciężkości trójkąta CDE będzie się także na niej znajdował; dość więc, w poprzednich formułach, przemienić r na $1-r$ aby otrzymać wartości x i y.

Ponieważ dla każdego wierzchołka mogą być trzy różne rozwiązania, tak jako dla każdego dwojanu wierzchołków, może więc istnieć najwięcej osiemnaście położeń równowagi graniastonu pływającego z krawędziami poziomemi.

347. *Graniaston prosty jednorodny, o podstawie kwadratowej, pływa tak że jego krawędzie boczne są poziome, i jedna z nich zostaje nad poziomem cieczy. Znaleźć położenie równowagi.*



Niech będzie kwadrat ADBC, przecięcie proste graniastonu pływającego; C wierzchołek ponad poziomem cieczy, D wierzchołek przeciwny, A i B dwa inne, wszystkie trzy zanurzone; G środek kwadratu i a jego bok, EF linia pływania, I jej środek; H środek ciężkości trójkąta CEF; CE $=x$ i CF $=y$.

Powierzchnie CEF i CADB powinny być w stosunku da-

nym n; mamy więc pierwsze równanie

$$(1) \qquad xy = 2na^2;$$

zostaje tylko do wyrażenia że linia GH jest prostopadła do EF Owoż, jeśli poprowadzimy przez punkt I prostę IK, równoległą do HG, aż do spotkania K z przekątną CD kwadratu, i połączymy KE, KF, będzie $CK = \frac{3}{2} CG$; ztąd wynika że rzuty odcinka CK na bokach CA i CB są równe $\frac{3}{4}a$; a że powinno być

$$KE = KF,$$

mamy więc

$$x^2 + \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{2}ax = y^2 + \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{2}ay.$$

Zkąd

$$(x - y)(x + y - \frac{3}{2}a) = 0.$$

Otrzymane równanie rozdziela się na dwa inne

$$(2) \qquad x - y = 0,$$

$$(2') \qquad x + y - \frac{3}{2}a = 0.$$

Te ostatnie, dołączone po kolei do równania (1), tworzą dwa układy które zawierają wszystkie rozwiązania zagadnienia.

Pierwszy układ daje

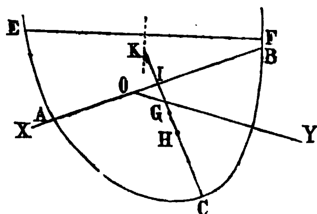
$$(3) \qquad x = y = a\sqrt{2n},$$

a drugi

$$(4) \qquad x = \frac{a}{4}(3 \pm \sqrt{9 - 32n}), \qquad y = \frac{a}{4}(3 \pm \sqrt{9 - 32n}).$$

Znaki wyższe powinny być brane razem, i znaki niższe także razem. Możebność dwóch położeń symetrycznych graniastonu, wyznaczonych przez ostatnie wartości, wymaga żeby stosunek n mieścił się między $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}+\frac{1}{32}$. W przypadku pierwiastków równych, te dwa położenia mieszają się z położeniem określonem przez wartość (3).

348. STAŁOŚĆ RÓWNOWAGI CIAŁ PŁYWAJĄCYCH. Ciało pływające jest w równowadze stałej, jeśli, odebrawszy małe przemieszczenie, dąży do położenia pierwotnego przez ciąg coraz mniejszych oscyllacyj.



Przypuśćmy że oddalono cokolwiek ciało pływające z położenia równowagi, dając wszystkim jego punktom bardzo małe prędkości. Niech będzie EF poziom cieczy, AB płaszczyzna pływania ciała nim było przemieszczone, G jego środek ciężkości i M massa; ρ gęstość cieczy; V objętość części zanurzonej w położeniu równowagi, i H środek ciężkości massy płynnej wypchniętej, leżący ze środkiem G na jednej prostopadłej do płaszczyzny pływania AB; θ kąt płaszczyzn AB, EF. Wzięliśmy za płaszczyznę figury, płaszczyznę przechodzącą przez środek ciężkości G ciała i prostopadłą do płaszczyzn AB i EF, to jest prostopadłą do ich przecięcia.

Do szukania warunków stałości równowagi ciał pływających, przedstawia się naturalnie zasada sił żywych, wyrażona przez

ogólne równanie

$$(1)\qquad \sum v^2 dm = c + 2\int \sum (\mathrm{X}dx + \mathrm{Y}dy + \mathrm{Z}dz),$$

w którem całka drugiej strony znaczy summę prac sił tak zewnętrznych jako wewnętrznych, wykonaną w czasie t.

Owoż, siły które działają na ciało pływające są : $\mathrm{M}g$ ciężar tego ciała, $\mathrm{V}g\rho$ ciężar cieczy wypchniętej przez ACB, i ciężar cieczy przemieszczonej przez AEFB. Dwa ostatnie ciężary stanowią pchanie cieczy, skierowane na część zanurzoną ciała, w stronę przeciwną ciężkości. Jeśli nazwiemy a odległość GH, z_0 i z_1 odległości środka ciężkości G od poziomu, podczas równowagi i po przemieszczeniu θ, odpowiedające odległości punktu H od poziomu będą

$$z_0 \pm a, \qquad z_1 \pm a \operatorname{dos}\theta;$$

trzeba brać znak + albo znak —, według jak H jest pod albo nad G. Zatem prace sił, pochodzące z dwóch pierwszych ciężarów które są siłami pionowemi, wyrażają się przez

$$\mathrm{M}g(z_1 - z_0) - g\rho\mathrm{V}(z_1 - z_0 \pm a\operatorname{dos}\theta \mp a).$$

Ta summa może się uprościć, z przyny że powino być $\mathrm{M}g = \mathrm{V}g\rho$; co daje

$$\pm\, 2\mathrm{V}g\rho a \operatorname{wst}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Aby łatwo wyrachować pracę pochodzącą z pchania cieczy przemieszczonej przez AEFB, podzielmy powierzchnię przecięcia AB na nieskończenie małe cząstki $d\omega$, równoległe do poziomej OY, poprowadzonej przez środek ciężkości tej powierzchni, aż do spotkania w punkcie O z prostą AB którą

weźmiemy za oś OX. Nazywając z i x odległości cząstki $d\omega$ od poziomu EF i od osi OY, widzimy zaraz że pchanie którego szukamy wartości, jest wynikową ciężarów graniastonów płynnych pionowych, mających $d\omega \operatorname{dos}\theta$ za podstawę i z za wysokość. Te nieskończenie małe ciężary są $g\rho z d\omega \operatorname{dos}\theta$; więc całe pchanie równa się summie

$$-g\rho \operatorname{dos}\theta \int d\omega \int_0^z z dz = -\frac{1}{2} g\rho \operatorname{dos}\theta \int z^2 d\omega.$$

Możemy wyrugować z. Jakoż, nazywając ζ odległość punktu O od poziomu, mamy

$$z = \zeta + x \operatorname{wst}\theta;$$

jeśli więc podstawimy tę wartość, uważając że $\int x d\omega = 0$, i oznaczając przez Ω powierzchnię przecięcia AB, przez Ωk^2 jej moment bezwładności względem OY, znajdziemy ostatecznie

$$-\frac{1}{2} g\rho \operatorname{dos}\theta \int z^2 d\omega = -\frac{1}{2} g\rho\Omega(\zeta^2 + k^2 \operatorname{wst}^2\theta)\operatorname{dos}\theta.$$

Ponieśmy wartości prac wszystkich sił do formuły (1), będziemy mieli

$$(2) \qquad \sum v^2 dm = c \pm hg\rho V \operatorname{wst}^2 \frac{\theta}{2} - g\rho\Omega(\zeta^2 + k^2 \operatorname{wst}^2\theta)\operatorname{dos}\theta.$$

Teraz, ponieważ pierwsza strona z przyczyny nadanych niezmiernie małych prędkości, jest ilością bardzo małą drugiego rzędu, wolno zeniedbać w drugiej stronie ilości małe rzędu wyższego od drugiego; bierzemy więc $\operatorname{wst}\theta = \theta$, $\operatorname{dos}\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$,

i tym sposobem, opuszczając wyrazy rzędu wyższego od drugiego, otrzymujemy formułę prostą

$$(3) \qquad \sum v^2 dm = c - g\rho(\Omega k^2 \mp Va)\theta^2 - g\rho\Omega\zeta^2 + \iota,$$

w której ι, ilość najmniej rzędu czwartego, zastępuje wyrazy zaniechane. Stateczna c wyznacza się, jako zwykle, przez stan początkowy; a gdy prędkości początkowe są zero albo nieskończenie małe, stateczna c będzie także zero albo nieskończenie małą.

To ustaliwszy, nietrudno z równania (3) wywieśdź warunki stałości równowagi ciała pływającego; trzeba tylko rozróżnić dwa przypadki.

Najpierwej, jeśli środek ciężkości G ciała jest niżej środka ciężkości H płynu wypchniętego w równowadze, będziemy mieli równanie.

$$\sum v^2 dm = c - g\rho(\Omega k^2 + Va)\theta^2 - g\rho\Omega\zeta^2 + \iota.$$

Pierwsza strona jest istotnie dodatna, a temsamem i druga; więc wyrazy odjemne muszą czynić summę nieskończenie małą, ponieważ ona powinna być mniejsza od statecznej c którą można mieć tak małą jak się podoba, nie zważając na ι; co wymaga żeby ilości θ i ζ zostawały ciągle nieskończenie małemi. Ztąd wynika że

Równowaga ciała pływającego jest zawsze stała, gdy jego środek ciężkości przypada niżej środka ciężkości płynu wypchniętego w równowadze.

Zobaczmy teraz drugi przypadek, w którym środek ciężkości G ciała jest wyżej środka ciężkości H płynu wypchniętego. Wtedy równanie (3) staje się

$$\sum v^2 dm = c - g\rho(\Omega k^2 - Va)\theta^2 - g\rho\Omega\zeta^2.$$

Chociaż c jest ilością nieskończenie małą, θ i ζ mogłyby nie być nieskończenie małemi gdyby było $\Omega k^2 < Va$. Co pokazuje że, dla stałości równowagi w tym przypadku, trzeba i dość jest żeby wieloczyn Va był mniejszy od najmniejszej wartości jaką wziąć może moment bezwładności Ωk^2 powierzchni przecięcia AB, względem różnych osi przechodzących przez jej środek ciężkości.

Więc, *gdy* G *leży nad* H, *równowaga ciała pływającego będzie jeszcze stała, ale pod warunkiem żeby było*

$$Va < min.\Omega k^2.$$

349. Metacentro. Gdy ciało pływające jest symetryczne względem płaszczyzny ACB, punkt O jest środkiem ciężkości przecięcia AB; jeśli wtedy przemieszczono cokolwiek ciało z położenia równowagi, zachowując płaszczyznę ACB, punkta G i H zostaną ciągle na tej płaszczyźnie, i siła pchania płynu przemieszczonego spotka prostę GH w pewnym punkcie K, który nazwano *metacentrem*. Aby mieć ruch środka ciężkości G trzeba, jako wiadomo, przenieść do tego punktu wszystkie siły poruszające równolegle do ich kierunków. Temi siłami są tu ciężar ciała i ciężar płynu wypchniętego; obie siły są pionowe, ale działają w strony przeciwne. Jeśli więc objętość płynu wypchniętego przez ciało w ruchu jest równa objętości jaką wypycha w położeniu równowagi, wynikowa przeniesienia będzie zero, i środek ciężkości zostanie nieruchomy, byle nie miał prędkości początkowej. Poczem otrzyma się ruch wirowy około tego środka uważając go za punkt stały, przez co niszczy się ciężar ciała; a siła pchania, przyłożona do metacentru K, będzie obracała ciało około osi poziomej przechodzącej przez G i prostopadłej do płaszczyzny symetryi ACB. Takim sposobem widzimy

jasno że, jeśli w tym ruchu metacentro K zostaje zawsze ponad środkiem ciężkości G na prostej GH, pchanie płynu będzie usiłowało przywieśdź prostę GH do położenia pionowego odpowiedającego równowadze ciała. Więc ta równowaga jest stała. Jeśli przeciwnie, metacentro przypada ciągle pod środkiem ciężkości ciała, pchanie płynu będzie usiłowało odwieśdź prostę GH od położenia pionowego, i równowaga ciała pływającego będzie niestała. Nakoniec, jeśli metacentro przypada raz nad a drugi raz pod środkiem ciężkości, z jego położenia nic o równowadze ciała wiedzieć nie można. Ale rzecz szczególna, która udaremnia użytek metacentru, leży w tem że, wtedy nawet gdy równowaga ciała pływającego jest stała, metacentro znajduje się raz wyżej drugi raz niżej jego środka ciężkości; co wynika z poprzednio wyłożonej teoryi. W pierwszych poszukiwaniach stałości równowagi ciał pływających, uważano metacentro, i do jego wyznaczenia przypuszczano że płyn wypchnięty przez ciało w ruchu ma tę samą objętość co płyn wypchnięty przez ciało w spoczynku. Założenie całkiem nieprawdziwe; jednakże, za pomocą tej ułomnej i niedostatecznej teoryi metacentru znaleziono prawdziwe warunki równowagi ciał pływających.

350. Na zastosowanie szukajmy warunku stałości równowagi równoległościanu prostokątnego jednorodnego, pływającego na cieczy także jednorodnej. Niech będą a, b, c trzy krawędzie przyległe tego równoległościanu, G jego środek ciężkości, D gęstość; przypuszczamy krawędź c pionową, i nazywamy H środek ciężkości objętości zanurzone, ρ gęstość cieczy. Czyniąc $GH=h$, trzeba uważać że odległość h będzie odjemna, bo H przypada oczywiście pod G. Nakoniec, oznaczamy przez u odległość płaszczyzny pływania od środka ciężkości G; odległość u jest dodatna albo odjemna, według jak płaszczyzna pływania znajduje się wyżej albo niżej środka G.

Ponieważ środek ciężkości G równoległościanu jest nad środkiem ciężkości H cieczy wypchniętej w równowadze, trzeba i

dość jest dla stałości równowagi pływania żeby było

$$Vh < min\, \Omega k^2.$$

Ωk^2 przedstawia moment bezwładności powierzchni przecięcia równoległościanu przez płaszczyznę pływania, wzięty względem osi, przechodzącej na płaszczyznie tego przecięcia i przez jego środek ciężkości, która daje moment bezwładności najmniejszy możebny. Tą osią jest większa z dwóch osi głównych bezwładności, więc równoległa do krawędzi a, jeśli $a > b$.

Owoż, mamy najpierwej równanie

$$Dabc = \rho ab\left(\frac{c}{2} + u\right),$$

które znaczy że ciężar równoległościanu materyalnego jest równy ciężarowi cieczy wypchniętej; co daje wartość u.

Potem, biorąc moment objętości V, względem płasczyzny poziomej przechodzącej przez środek ciężkości równoległościanu, będzie

$$Vh = ab\int_{c}^{a} zdz = \frac{ab}{2}\left(u^2 - \frac{c^2}{4}\right);$$

wartość oczywiście odjemna.

Nareszcie, moment bezwładności minimum Ωk^2 wyraża się (206) przez

$$\Omega k^2 = \frac{ab^3}{12}.$$

Więc warunek stałości równowagi równoległościanu pływającego jest

$$\frac{c^2}{4} - u^2 < \frac{b^2}{6}.$$

Ale z pierwszego równania wywodzimy

$$u = \left(\frac{2D}{\rho} - 1\right)\frac{c}{2};$$

podstawiając tę wartość, otrzymujemy ostatecznie

$$c < \frac{b\rho}{\sqrt{6(D\rho - D^2)}}.$$

Niech będzie, jako przykład, tratwa zbita z drzew sosnowych pływająca na wodzie. Średnia gęstość sosny jest 0,64; biorąc $\frac{D}{\rho} = 0{,}6$ znajdujemy

$$c < \frac{b}{1{,}2}.$$

Zatem stałość równowagi tratwy sosnowej pływającej na wodzie wymaga żeby grubość pionowa była równa najmniejszym z trzech rozmiarów.

RÓWNOWAGA WZGLĘDNA PŁYNÓW.

Wszystko cośmy powiedzieli o równowadze płynów pod działaniem sił jakichkolwiek, stosuje się tak dobrze do równowagi względnej jak do równowagi samoistej, byle tylko w przypadku równowagi względnej dołączono do sił rzeczywistych siły pozorne (zmyślone), które do rachunku wprowadzić należy. Równowaga płynów ciężkich jest istotnie równowagą względną, z przyczyny ruchu ziemi w przestrzeni; przedstawiliśmy ją wprawdzie jako równowagę samoistą, ale za to uważaliśmy każdą cząstkę płynu jako rzeczywiście poddaną działaniu jej własnego ciężaru, który jest wynikową przyciągania ziemi i siły

odśrodkowej pochodzącej z ruchu wirowego naszej planety.

351. RUCH JEDNOSTAJNY CIECZY OKOŁO OSI PIONOWEJ. Niech będzie jakakolwiek ciecz, zawarta w naczyniu jakiemkolwiek któremu dano ruch wirowy jednostajny około osi pionowej. Szukajmy pod jakiemi warunkami punkta tej cieczy nie będą się przemieszczały jedne względem drugich, to jest zostaną w równowadze względnej. Owoż wiemy że, dla znalezienia równań równowagi względnej, dość jest wyrazić równania równowagi samoistej, między siłami istotnie przyłożonemi do cząstek materyalnych ciała w ruchu i siłami zmyślonemi, jak gdyby one także do tych cząstek były przyłożone; więc zagadnienie przywodzi się do wyznaczenia tych wszystkich sił. Aby to uskutecznić, weźmy oś pionową obrotu cieczy za oś OZ, skierowaną w stronę przeciwną ciężkości, i dwie inne osie OX, OY prostokątne jakiekolwiek, leżące na płasczyznie poziomej podstawy naczynia. Widzimy zaraz że siłą rzeczywiście działającą na massę m cząstki ciekłej jest siła zewnętrzna wprost przyłożona, mająca składowe mX, mY, mZ, i parcie cząstek otaczających które jest siłą wewnętrzną, mającą składowe $-\frac{m}{\rho}\frac{dp}{dx}$, $-\frac{m}{\rho}\frac{dp}{dy}$, $-\frac{m}{\rho}\frac{dp}{dz}$. Siłami zmyślonemi są: 1° siła bezwładności ruchu uniesienia, która jest siłą odśrodkową pochodzącą z wirowania cieczy około osi; 2° siła odśrodkowa składana; ta ostatnia jest zero, bo cząstki ciekłe będąc w równowadze względnej nie mają prędkości względnych. Jeśli teraz oznaczymy przez ω prędkość kątową stateczną z jaką się ciecz obraca, przez r odległość cząstki m od osi obrotu, i przez x, y, z spółrzędne tej cząstki, siła odśrodkowa wyrazi się przez

$$m\omega^2 r,$$

a jej składowe, równoległe do osi spółrzędnych, przez

$$m\omega^2 x, \quad m\omega^2 y, \quad 0.$$

Więc równania różniczkowe równowagi względnej są

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z,$$

zkąd

$$(1) \qquad dp = (Xdx + Ydy + Zdz) + \rho\omega^2(xdx + ydy).$$

Druga strona powinna być różniczką dokładną, bo inaczej równowaga względna istnieć nie może.

Powierzchnie poziomu mają równanie różniczkowe spólne

$$\rho(Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2 xdx + \omega^2 ydy) = 0,$$

którego całka jest

$$\varphi(x, y, z) = c.$$

Zmieniając sposobem ciągłym stateczną dowolną c, otrzymuje się wszystkie powierzchnie poziomu. Jeśli powierzchnia wolna cieczy, jednorodnej albo różnorodnej, ponosi parcie stateczne, to ona będzie także jedną z powierzchni poziomu danych przez ostatnie równanie, w którem stateczna dowolna c będzie miała wartość wyznaczoną.

Przypuśćmy ciecz jednorodną i pod działaniem samej tylko ciężkości jako siły zewnętrznej; będziemy mieli

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -g,$$

przez co równanie (1) stanie się

$$dp = -g\rho dz + \rho\omega^2(xdx + ydy).$$

Wtedy ogólne równanie powierzchni poziomu będzie

$$-gdz + \omega^2(xdx + ydy) = 0;$$

zkąd wynika całka

$$(2) \qquad z = \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2) + c,$$

w której c jest stateczną dowolną.

Ostatnie równanie pokazuje że powierzchnie poziomu są paraboloidami obrotowemi, mającemi oś wirowania cieczy za oś figury; c jest wysokością ich wierzchołka nad płaszczyzną podstawy naczynia. Te wszystkie paraboloidy są oczywiście równe między sobą. Gdy powierzchnia wolna ponosi parcie atmosferyczne stateczne, to naturalnie jest także paraboloidą; a gdy ją pokrywa atmosfera gazista ciężka, wtedy powierzchnie poziomu obracającej się cieczy są zawsze paraboloidami; ale powierzchnia wolna nie jest już jedną z nich, bo jej punkta, leżące w rożnych wysokościach, doznają parć nierównych od gazu ciężkiego otaczającego. Te jednak różnice parć są bardzo małe, i powierzchnia wolna prawie się nie różni od paraboloidy, zwłaszcza gdy rozmiary naczynia zawierającego ciecz nie są wielkie.

We wszystkich przypadkach wyznaczy się stateczną dowolną c, wyrażając że objętość cieczy, zawartej między powierzchnią naczynia i jedną z powierzchni poziomu, jest równa objętości danej massy tej cieczy. Przypuśćmy, na przykład, że ciecz jest zawarta w naczyniu walcowem mającem promień R i wysokość h, którego oś jest osią obrotu; objętość cieczy wyrachowana przez spółrzędne napół-biegunowe będzie

$$\int_0^{2\pi}\int_r^{R} z.2rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_r^{R}\left(c + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) rdr = 2\pi \int_r^{R}\left(c + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right) rdr.$$

Równając tę wartość z objętością walca, otrzymujemy

$$(3)\qquad 2\int_r^R\left(c+\frac{\omega^2r^2}{2g}\right)rdr=R^2h.$$

Teraz, dla wyznaczenia granic całkowania, należy rozróżnić dwa przypadki, według jak wierzchołek paraboloid znajduje się nad dnem naczynia albo pod niem, czyli innemi słowy, według jak ciecz obracająca się pokrywa całkiem dno naczynia albo tylko jego część.

1° Jeśli ciecz obracająca się pokrywa zupełnie dno naczynia, trzeba całkować od $r=0$ aż do $r=R$; co daje

$$c+\frac{\omega^2}{4g}R^2=h,\qquad \text{zkąd}\qquad c=h-\frac{\omega^2}{4g}R^2;$$

zatem równanie powierzchni wolnej będzie

$$z=h-\frac{\omega^2}{4g}R^2+\frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2).$$

2° Gdy ciecz obracająca się nie pokrywa całego dna naczynia, wierzchołek paraboloid przypada pod spodem; wtedy stateczna c jest odjemna. Uczyńmy $c=-c'$; przez podstawienie tej wartości równanie powierzchni poziomu (2) stanie się

$$z=\frac{\omega^2}{4g}r^2-c'.$$

Ta powierzchnia przecina podstawę walca wedle koła mającego promień R′ dany przez równanie

$$\frac{\omega^2}{2g}r^2-c'=0,\qquad \text{zkąd}\qquad R'=\sqrt{\frac{2gc'}{\omega^2}}.$$

Trzeba więc całkować równanie (3) od $r = R'$ aż do $r = R$; co daje

$$2\int_{R'}^{R}\left(\frac{\omega^2}{2g}r^2 - c'\right)rdr = R^2h.$$

Po wykonaniu rachunku i podstawieniu wartości R', będzie

$$\frac{g}{\omega^2}c'^2 - R^2c' + \left(\frac{\omega^2}{4g}R^2 - h\right)R^2 = 0.$$

Oba pierwiastki rzeczywiste tego równania są dodatne, jeden mniejszy a drugi większy od $\frac{\omega^2R^2}{2g}$. Pierwiastek większy powinien być odrzucony, bo on dałby $R' > R$, Więc biorąc

$$c' = \frac{R\omega}{2g}\left(R\omega - 2\sqrt{gh}\right),$$

otrzymujemy w tym przypadku równanie powierzchni wolnej

$$z = \frac{\omega^2}{4g}(x^2 + y^2) - \frac{R^2\omega^2}{2g} + R\sqrt{\frac{h}{g}}.$$

Można uważać że, gdy ciecz wychodzi ze spoczynku, i, obracając się około osi, dosięga położenia równowagi względnej, punkt powierzchni wolnej który był na osi zniża się o tyle o ile się wzniosły punkta będące w zetknięciu z walcem. Jakoż, wysokość wierzchołka paraboloidy jest

$$z = h - \frac{\omega^2}{4g}R^2,$$

a wysokość punktów w zetknięciu z walcem wyraża się przez

$$z = h + \frac{\omega^2}{4g}R^2.$$

Te dwie wysokości różnią się od h tą samą ilością $\frac{\omega^2}{4g}R^2$; co dowodzi założenia.

Zagadnienie będzie zupełnie rozwiązane jeśli jeszcze znajdziemy parcie p w punkcie jakimkolwiek. Owoż, całkując wartość dp, mamy

$$p = -g\rho z + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + C;$$

wyznaczamy stateczną C wyrażając że punkta powierzchni cieczy wytrzymują parcie stateczne $p = p_0$, co daje

$$p_0 = -g\rho h + \frac{\rho\omega^2}{2}R^2 + C.$$

Więc

$$p = p_0 - g\rho(z - h) + \frac{\rho\omega^2}{2}(x^2 + y^2 - R^2).$$

352. Zobaczmy teraz jaka byłaby powierzchnia pozioma, gdyby cząstki składające ciecz zawartą w naczyniu, które się obraca jednostajnie około osi pionowej, były pod działaniem siły skierowanej ku punktowi stałemu i proporcyonalnej do odległości od tego punktu.

Nazywając μ wartość tej siły na jedność odległości, jeśli weźmiemy za początek spółrzędnych prostokątnych punkt stały ku któremu ona jest skierowana, składowe jej przyspieszenia wyrażą się przez

$$-\mu x, \qquad -\mu y, \qquad -\mu z,$$

a składowe przyspieszenia należnego sile odśrodkowej przez

$$\omega x, \qquad \omega y, \qquad 0.$$

Więc równanie różniczkowe powierzchni poziomu będzie

$$-\mu(xdy + ydy + zdz) + \omega^2(xdx + ydy) = 0;$$

zkąd

$$x^2 + y^2 + \frac{\mu z^2}{\mu - \omega^2} = c.$$

c znaczy stateczną dowolną.

Powierzchnie poziomu są tu powierzchniami drugiego rzędu, obrotowemi około osi pionowej OZ; według jak będzie

$$\omega^2 \lesseqgtr \mu,$$

te powierzchnie będą ellipsoidami, płasczyznami poziomemi, hiperboloidami o jednej albo o dwóch płachtach. We wszystkich przypadkach wyznaczy się stateczną c, obliczając objętość cieczy zawartej między powierzchnią wewnętrzną naczynia a jedną z powierzchni poziomu, i równając tę objętość z objętością danej massy ciekłej.

353. Zostawiając szczegóły ostatniego zagadnienia które nie przedstawiają nic ciekawego, przechodzimy do zagadnienia daleko ważniejszego, które zajmowało najznakomiszych Matematyków. Ale, nie mogąc dać ogólnego rozwiązania, bo ono jest poza obrębem niniejszego dzieła, wyłożymy jeden dość obszerny przypadek, chociaż tylko szczególny, objęty w następującem wysłowieniu.

Massa płynna, której cząstki działają nawzajem na siebie wedle ustawy powszechnego przyciągania, mająca kształt ellipsoidy obrotowej spłasczonej, czy może się obracać jednostajnie około swojej osi zachowując równowagę względną?

Jeśli weźmiemy oś obrotu za oś $x^{ów}$ będziemy mieli

$$b = c > a, \quad \text{i} \quad \frac{b^2 - a^2}{a^2} = \lambda^2.$$

Niech będzie μ massa punktu płynnego $K(\alpha, \beta, \gamma)$ na który rzeczywiście działają wszystkie inne punkta massy płynnej. Składowe X, Y, Z siły tego działania, uważanego jako przyciąganie punktu wewnętrznego K przez całą massę płynną ellipsoidy obrotowej spłasczonej (*Tom.* I, 174), są

$$X = -4\pi f \mu \rho \alpha \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda} \text{łuk sty}\lambda\right),$$

$$\frac{Y}{\beta} = \frac{Z}{\gamma} = -\frac{2\pi f \mu \rho}{\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} \text{łuk sty}\lambda - 1\right);$$

a składowe siły odśrodkowej, siły zmyślonej którą przypuszczamy przyłożoną do punktu K, wyrażają się przez

$$0, \qquad \mu\omega^2\beta, \qquad \mu\omega^2\gamma.$$

Więc równanie różniczkowe powierzchni poziomu jest

$$4\pi f \rho \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{\lambda} \text{łuk sty}\lambda\right)\alpha d\alpha$$

$$+ \frac{2\pi f \rho}{\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} \text{łuk sty}\lambda - 1 - \frac{\lambda^2\omega^2}{2\pi f \rho}\right)(\beta d\beta + \gamma d\gamma) = 0.$$

Trzeba dla równowagi massy płynnej żeby to równanie było różniczką dokładną, a dla ruchu ellipsoidy płynnej żeby między powierzchniami poziomu znajdowała się powierzchnia tej ellipsoidy. Owoż, jeśli podzielimy równanie przez $\frac{\pi f \rho}{\lambda^2}$ i zcałkujemy, znajdziemy

$$2(1+\lambda^2)\left(1 - \frac{1}{\lambda} \text{łuk sty}\lambda\right)\alpha^2 + \left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda} \text{łuk sty}\lambda - 1 - \frac{\lambda^2\omega^2}{2\pi f \rho}\right)(\beta^2 + \gamma^2) = C.$$

To równanie przedstawia właśnie ellipsoidę obrotową około osi OZ.

Owoż równanie ellipsoidy płynnej jest

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2+\gamma^2}{b^2}=1, \quad \text{albo} \quad (1+\lambda^2)\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=b^2,$$

Żeby więc powierzchnia naszej ellipsoidy była jedną z powierzchni poziomu, trzeba dobrać stateczną dowolną C tak, żeby można było ztożsamić równanie dwóch ellipsoid; co wymaga najpierwej żeby się stało zadość warunkowi

$$2(1-\frac{1}{\lambda}\,\text{łuk sty}\,\lambda)=\frac{1+\lambda^2}{\lambda}\,\text{łuk sty}\,\lambda-1-\frac{\lambda^2\omega^2}{2\pi f\rho};$$

zkąd równanie

$$\frac{3+\lambda^2}{\lambda}\,\text{łuk sty}\,\lambda-3=\frac{\lambda^2\omega^2}{2\pi f\rho},$$

które wyznacza λ, jeśli ρ i ω są wiadome.

Gdy λ jest ilością bardzo małą, można rozwinąć łuk styλ; co daje

$$\text{łuk sty}\,\lambda=\lambda-\frac{\lambda^3}{3}+\frac{\lambda^5}{5}-\ldots$$

Podstawiając tę wartość w ostatniem równaniu, będzie

$$(3+\lambda^2)(1-\frac{\lambda^2}{3}+\frac{\lambda^4}{5}-\ldots)-3=\frac{\lambda^2\omega^2}{2\pi f\rho},$$

albo

$$\frac{4}{15}\lambda^2+\frac{\lambda^4}{5}-\ldots=\frac{\omega^2}{2\pi f\rho}.$$

Ztąd, zaniedbując potęgi wyższe od λ^2, wynika

$$\lambda^2=\frac{15\omega^2}{8\pi f\rho}.$$

Wprowadźmy teraz spłaszczenie

$$\frac{b-a}{a}=\varepsilon;$$

będziemy mieli

$$\frac{b^2}{a^2}=(1+\varepsilon)^2=1+\lambda^2, \qquad \text{zkąd} \qquad \varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{2}=\frac{\lambda^2}{2}.$$

Zaniedbując ε^2, będzie $\varepsilon=\frac{\lambda^2}{2}$; więc $\varepsilon=\frac{15}{16}\frac{\omega^2}{\pi f\rho}$.

Ellipsoida płynna jest mało spłasczona, nie wiele się różni od sfery; jakie ona wywiera przyciąganie na punkta leżące na równiku które są w odległości b?

Natężenie tego przyciągania ma za miarę

$$\frac{4}{3}\pi f\rho\frac{ab^2}{b^2}=\frac{4}{3}\pi f\rho a.$$

Owoż, siła odśrodkowa na równiku wyraża się przez $\omega^2 b$; zatem stosunek siły odśrodkowej do przyciągania, który oznaczymy przez φ, ma wartość

$$\varphi=\frac{3\omega^2 b}{4\pi f\rho a}.$$

Wprowadźmy φ do ε, będzie

$$\varepsilon=\frac{5}{4}\varphi\frac{a}{b}, \qquad \text{albo prawie} \qquad \varepsilon=\frac{5}{4}\varphi.$$

Więc, żeby ellipsoida płynna mogła się obracać, trzeba żeby jej spłasczenie miało wartość przybliżoną

$$\varepsilon=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{289}, \qquad \text{albo około} \qquad \varepsilon=\frac{1}{232}.$$

Ztąd wnosimy że ziemia nie mogła być pierwotnie płynem jednorodnym, bo jej spłasczenie jest $\varepsilon = \frac{1}{294}$.

Ale, jeśli gęstość ziemi była wielka we środku, jakie musiało być spłasczenie?

Przypuszczając że jądro ziemi miało pierwotnie massę M, przyciąganie tej massy, wywarte na punkt K w odległości δ, nadaje mu przyspieszenie którego składowe są

$$-\frac{fM}{\delta^2}\frac{\alpha}{\delta}, \qquad -\frac{fM}{\delta^2}\frac{\beta}{\delta}, \qquad -\frac{fM}{\delta^2}\frac{\gamma}{\delta};$$

a składowa przyspieszenia nadanego pozornie przez siłę odśrodkową są jeszcze

$$0, \qquad \omega^2\beta, \qquad \omega^2\gamma.$$

Zatem równanie różniczkowe powierzchni poziomu jest

$$-\frac{fM}{\delta^3}(\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma) + \omega^2(\beta d\beta + \gamma d\gamma) = 0.$$

Ale równanie

$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

daje

$$\delta d\delta = \alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma.$$

Podstawiając tę wartość mamy

$$-\frac{fMd\delta}{\delta^2} + \omega^2(\beta d\beta + \gamma d\gamma) = 0;$$

zkąd, dzieląc przez fM i całkując, wynika

$$\frac{1}{\delta} + \frac{\omega^2}{2fM}(\beta^2 + \gamma^2) = c.$$

Stateczna dowolna c wyraża odwrotność promienia biegu-

nowego; jakoż czyniąc $\beta=0$ i $\gamma=0$, otrzymujemy

$$\frac{1}{\delta}=c.$$

A jesli oznaczymy przez R ten promień, będzie

$$\frac{1}{\delta}+\frac{\omega^2}{2fM}(\beta^2+\gamma^2)=\frac{1}{R}.$$

Szukajmy teraz spłasczenia. Nazywając R' promień równika, mamy

$$\delta^2=\beta^2+\gamma^2=R'^2;$$

zatem

$$\frac{1}{R'}+\frac{\omega^2 R'^2}{2fM}=\frac{1}{R}.$$

Owoż

$$\varphi=\frac{\omega^2 R'}{\frac{fM}{R'^2}}=\frac{\omega^2 R'^3}{fM};$$

wprowadzając φ do ostatniego równania, znajdujemy związek

$$\frac{1}{R'}+\frac{\varphi}{2R'}=\frac{1}{R},$$

z którego wywodzimy spłasczenie

$$\frac{R'-R}{R}=\frac{\varphi}{2}.$$

Ta wartość daje dla naszej ellipsoidy spłasczenie

$$\varepsilon=\frac{1}{2.289}=\frac{1}{578}.$$

Więc ziemia mogła być pierwotnie massą płynną, z częścią środkową bryłową.

Taki jest szczególny przypadek ruchu wirowego jednostajnego massy płynnej jednorodnej, mającej kształt ellipsoidy obrotowej. Jakobi poszedł dalej, i dowiódł że ellipsoida mająca trzy osie nierówne może także być rozwiązaniem zagadnienia.

HYDRODYNAMIKA

354. W Hydrostatyce wiedza parcia zasadza się cała na założeniu doskonałej płynności, z której pochodzą dwie charakterystyczne własności plynów; pierwsza, że płyny w równowadze wywierają, w każdym punkcie wziętym wewnątrz ich massy, parcie równe na wszystkie strony i normalne do nieskończenie małej cząstki powierzchni przez ten punkt przechodzącej; a druga, że te płyny przeprowadzają zarówno na wszystkie strony parcia przyłożone do ich powierzchni. Na tych dwóch własnościach opierają się równania równowagi płynów.

Ale doświadczenie dowodzi że w ruchu płynów rozwija się pewne tarcie ślizgania jednych części płynnych na drugich, i to tarcie jest tem znaczniejsze im prędkość ślizgania jest większa. Aby się o tem przekonać, dość jest przypatrzeć się rzece. Jej ruch, uważany w nie wielkiej rozciągłości, jest prawie jednostajny; a gdyby nie było tarcia, to byłby przyspieszony jako ruch ciał ślizgających na płasczyznach pochyłych. Nadto, gdyby tarcie płynów odbywało się wedle tych samych ustaw co tarcie ciał bryłowych, istniałoby pewne nachylenie łoża rzeki na którem ruch byłby jednostajny. Na wszystkich innych nachyleniach, i w tych samych okolicznościach, byłoby przyspieszenie albo opóźnienie. Owoż, doświadczenie pokazuje że ruch jednostajny zawsze nastaje jakakolwiek jest spadzistość, i tylko pręd-

kość zwiększa się ze spadzistością a tarcie z prędkością. Ztąd wynika że płyn w ruchu nie posiada wszystkich własności płynu w równowadze; to jest nie przeprowadza zawsze równo na wszystkie strony parć odebranych, i jego parcie może nie być normalne do cząstki na którą ciśnie, ani być koniecznie to samo we wszystkich kierunkach około jednego punktu. Można jednak przypuścić że te własności istnieją jeszcze gdy ruch nie jest bardzo bystry; doświadczenie zgadza się często dość dobrze z tego założenia wywiedzionemi wynikami, które, jeśli nie są zupełnie prawdziwe, to w praktyce przynajmniej są w ogóle dostatecznie przybliżone do prawdziwych. Wiedząc o tem wszystkiem, będziemy szukali równań ruchu płynów nie zważając najpierwej na tarcie, które później do rachunku wprowadzić trzeba.

Równania ogólne ruchu płynów. Aby wyznaczyć ruch układu materyalnego punktów w przestrzeni, dość jest znaleźć spółrzędne każdego z tych punktów w funkcyi czasu. W ruchu płynów rzecz przedstawia się inaczej. Zamiast szukać ruchu każdej cząstki płynnej z osobna, korzystniej jest wiedzieć co się dzieje w jakimkolwiek punkcie przestrzeni przez który ta cząstka przechodzi. Owoż, w epoce odpowiedającej czasowi t, jedna z cząstek płynnych, mająca massę dm, zajmuje punkt M przestrzeni, opisując pewną linię krzywą; zagadnienie ruchu płynów zależy więc na wyznaczeniu prędkości, parcia i gęstości cząstki dm która się znajduje w punkcie M na końcu czasu t. Nazwijmy x, y, z spółrzędne punktu M, i niech będą

$$u=\frac{dx}{dt}, \quad v=\frac{dy}{dt}, \quad w=\frac{dz}{dt}$$

składowe prędkości cząstki dm, przechodzącej przez punkt M w czasie t; po chwili ta cząstka będzie przeniesiona gdzieindziej, a inna cząstka płynu, mająca inszą prędkość, zastąpi ją w punkcie M. Ztąd wynika że ilości u, v, w są w punkcie stałym M funkcyami czasu t, a zmieniając się z punktem M są funkcyami

spółrzędnych x, y, z : więc składowe u, v, w prędkości cząstki dm są ogólnie funkcyami czterech zmiennych niezależnych x, y, z, t. Nietrudno teraz pojąć że parcie p jakiego doznaje cząstka dm zajmująca punkt M, i jej gęstość ρ są ogólnie także funkcyami tych samych czterech zmiennych x, y, z, t. To ustaliwszy, widzimy że niewiadomemi zagadnienia ruchu płynów są: składowe u, v, w prędkości jakiejkolwiek cząstki płynnej dm, jej parcie p i gęstość ρ. Trzeba więc pięciu równań do ich wyznaczenia.

Niech będą Xdm, Ydy, Zdm składowe siły zewnętrznej która działa na cząstkę dm, w chwili gdy ona zajmuje położenie M; jeśli nazwiemy u', v', w' składowe całego przyspieszenia tej cząstki, $u'dm$, $v'dm$, $w'dm$ będą wyrażały składowe jej siły bezwładności. Owoż, na mocy zasady *D'Alemberta*, płyn byłby w równowadze, gdyby jakakolwiek jego cząstka dm była pod działaniem siły mającej składowe

$$(X - u')dm, \qquad (Y - v')dm, \qquad (Z - w')dm;$$

więc, jeśli w równaniach różniczkowych równowagi płynów (332), zastąpimy X, Y, Z przez $X - u'$ $Y - v'$, $Z - w'$, otrzymamy trzy równania o różniczkach cząstkowych

$$\frac{dp}{dx} = \rho(X - u'), \qquad \frac{dp}{dy} = \rho(Y - v'), \qquad \frac{dp}{dz} = \rho(Z - w').$$

Należy teraz uważać że przyspieszenie u' jest pochodną zupełną prędkości u względem czasu t. Cząstka dm przenosi się w czasie dt z punktu M na inne położenie, i jej spółrzędne x,y,z biorą przyrosty udt, vdt, wdt; zatem, na końcu dt przyrost du prędkości u będzie

$$du = \frac{du}{dt}dt + \frac{du}{dx}udt + \frac{du}{dy}vdt + \frac{du}{dz}wdt.$$

Mamy więc dla składowej u' całego przyspieszenia cząstki dm wartość

$$u' = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz}.$$

Będzie tak samo

$$v' = \frac{dv}{dt} + u\frac{dv}{dx} + v\frac{dv}{dy} + w\frac{dv}{dz},$$

$$w' = \frac{dw}{dt} + u\frac{dw}{dx} + v\frac{dw}{dy} + w\frac{dw}{dz}.$$

Przez podstawienie tych wartości otrzymane wyżej równania stają się

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X - \frac{du}{dt} - u\frac{du}{dx} - v\frac{du}{dy} - w\frac{du}{dz},$$

(1) $$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y - \frac{dv}{dt} - u\frac{dv}{dx} - v\frac{dv}{dy} - w\frac{dv}{dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z - \frac{dw}{dt} - u\frac{dw}{dx} - v\frac{dw}{dy} - w\frac{dw}{dz}.$$

Mamy już trzy równania którym pięć niewiadomych funkcyj u, v, w, p, ρ zadość czynić powinny; trzeba więc jeszcze znaleźć dwa równania. Otrzymamy jedno z nich, wyrażając że massa płynna jest ciągła. Oto jakim sposobem :

Gęstość zmienna ρ cząstki płynnej dm, albo, jako mówią niektórzy, *massa gatunkowa* ρ cząstki dm, jest związana z prędkościami różnych cząstek płynu niezależnie od sił które do nich są przyłożone. Jakoż, gdyby znano prędkości wszystkich cząstek płynu, mając dany ich stan początkowy, ruch całej massy płyn-

nej byłby wyznaczony, i znanoby w każdej chwili położenie cząstek płynnych w szczególności; wtedy możnaby wiedzieć jakie cząstki w danej chwili zajmują nieskończenie małą objętość wziętą gdziekolwiek wewnątrz płynu, i temsamem jaka jest massa płynu zawarta w tej objętości; możnaby więc znać gęstość ρ płynu, względną do punktu przestrzeni w którym ta mała objętość wzięta została. Co już dowodzi że gęstość zmienna ρ zależy od prędkości cząstek płynu. Aby wyrazić związek między u, v, w i ρ, wyobraźmy sobie w massie płynnej nieskończenie mały równoległościan stały, którego wierzchołek M ma spółrzędne x, y, z, a którego krawędzie, wychodzące z punktu M i równoległe do osi spółrzędnych, są dx, dy, dz. Na końcu czasu $t + dt$, massa $\rho dxdydz$ płynu zawartego w tym równoległościanie staje się $\left(\rho + \frac{d\rho}{dt} dt\right) dxdydz$; powiększa się więc, przez czas dt, ilością

$$\frac{d\rho}{dt} dtdxdydz.$$

Owoż, możemy mieć drugie wyrażenie tego przyrostu, szukając przewyżki massy płynu która wchodzi przez czas dt do małego równoległościanu, nad tą która z niego wychodzi. I w samej rzeczy, ponieważ kierunek prędkości zmienia się sposobem ciągłym, jeśli pewna ilość płynu wchodzi przez jedną ścianę to wychodzi także pewna część przez ścianę przeciwległą; dość więc wyrachować przewyżkę pierwszej ilości nad drugą, dla każdego z trzech dwojanów ścian przeciwległych; summa trzech przewyżek będzie przyrostem massy płynu zawartego w małym równoległościanie.

Niech będzie najpierwej ściana M$dydz$, równoległa do płaszczyzny yz; płyn przechodzący przez tę ścianę w czasie dt ma kształt graniastonu ogólnie pochyłego, którego wysokością jest udt a podstawą $dydz$. Zatem, uważając u i ρ jako war-

tości średnie w całej rozciągłości nieskończenie małego równoległościanu, widzimy że massa płynu która do niego weszła przez ścianę M$dydz$ ma za miarę $\rho dydzudt$. Największa ilość tej massy zostanie w równoległościanie przez czas dt, ale część jej może wyjść. W tym samym czasie dt, część płynu zawartego pierwotnie w równoległościanie wychodzi z niego przez ścianę przeciwległą ścianie M$dydz$, a zmienność prędkości i gęstości tej massy płynnej zależy jedynie od x. Ztąd wynika że massa płynu wychodzącego przez rzeczoną ścianę ma wartość

$$dydz\left(\rho u + \frac{d.\rho u}{dz}\,dx\right)dt.$$

Zatem przewyżka pierwszej massy nad drugą jest

$$-\frac{d.\rho u}{dx}\,dxdydzdt.$$

Dwa inne dwojany ścian równoległych do płasczyzn xz i xy dają przewyżki

$$-\frac{d.\rho u}{dy}\,dxdydzdt \quad \text{i} \quad -\frac{d.\rho z}{dx}\,dxdydzdt.$$

Summa tych trzech przewyżek wyraża przyrost massy płynnej zawartej w równoległościanie na końcu czasu dt. Więc, równając dwa wyrażenia wartości tego przyrostu, mamy *równanie ciągłości*

$$(2) \qquad \frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0.$$

Zobaczmy jak to równanie tłumaczyć trzeba stosownie do natury płynów; albowiem ustawa zmienności gęstości ρ, nie jest ta sama w cieczach co w gazach.

Jeśli gęstość płynu jest stateczna, jako na przykład w cieczach jednorodnych i nieściśliwych, równanie (2) staje się

$$(3) \qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

W tym przypadku, ponieważ $\rho = stat.$ są tylko cztery niewiadome p, u, v, w; i są także cztery równania (1), (3), dostateczne do ich wyznaczenia w funkcyi zmiennych x, y, z, t.

Odnosząc równanie (3) do summy trzech ostatnich wyrazów równania (2), widzimy że przewyżka płynu który wszedł do równoległościanu nad płynem który z niego wyszedł jest zero; a ponieważ gęstość zostaje stateczna, objętości tych dwóch ilości płynu są równe. Ztąd wynika że objętość jakiejkolwiek części płynu jednorodnego nie zmienia się przechodząc od jednego punktu przestrzeni do drugiego.

Jeśli ciecz jest nieściśliwa i różnorodna, jej gęstość zmienia się od jednej cząstki składowej dm do drugiej; ale, z przyczyny nieściśliwości całej massy, gęstość cząstki dm w całym biegu jej ruchu zostaje zawsze funkcyą stateczną zmiennych x, y, z, t. Ta funkcya jest niewiadoma. Aby wyrazić że jest stateczna, trzeba zrównać do zera jej różniczkę zupełną, uważając ilości x, y, z za spółrzędne cząstki dm, a zatem jako funkcye czasu t. Otrzymujemy tym spobem równanie

$$(4) \qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d\rho}{dx}u+\frac{d\rho}{dy}v+\frac{d\rho}{dz}w=0,$$

na mocy którego równanie (2) przywodzi się do

$$(3) \qquad \frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0.$$

Ostatnie równanie (3) wyraża nieściśliwość, a poprzedzające (4)

różnorodność. Te dwa równania przydane do równań (1) stanowią układ pięciu równań, potrzebnych do wyznaczenia pięciu niewiadomych p, ρ, u, v, w zagadnienia.

Gdy jest do uważania płyn sprężysty, jako powietrze, do którego się stosuje ustawa *Mariotta*, będzie

$$p = k\rho.$$

Ten związek między p i ρ, w którym spółczynnik k jest ogólnie funkcyą temperatury, dołączony do równań (1) i (2), wyznacza niewiadome p, ρ, u, v, w.

355. WARUNKI WZGLĘDNE DO POWIERZCHNI. Poprzedzające równania stosują się do wszystkich punktów wewnętrznych płynu, i, jeśli płyn jest nieograniczony, trzeba tylko wyrazić warunki względne do stanu początkowego. Ale, jeśli płyn jest ograniczony, naprzykład zamknięty w naczyniu, istnieją szczególne równania dla jego punktów będących na powierzchni ściany. Zazwyczaj przypuszczają że punkta płynu, które były najpierwej w zetknięciu ze ścianą ruchomą albo nieruchomą, zostają na niej przez czas nieokreślony, a zaś punkta które należały pierwotnie do powierzchni wolnej, nie przestają nigdy być jej częścią. Te założenia, mniej więcej zgodne z naturalnym stanem rzeczy, ścieśniają wiele zagadnienie ruchu płynów; a mimo tego bardzo mało jest przypadków w których rachunek zupełnie dokonać się może!

Niech będzie $F(x, y, z, t) = 0$ równanie powierzchni ściany ruchomej, na której się znajduje pewny punkt płynu mający spółrzędne x, y, z; wedle założeń trzeba żeby, na końcu czasu dt, było

$$F(t + dt,\ x + udt,\ y + vdt,\ z + wdt) = 0;$$

zkąd

$$\frac{dF}{dt} + u\frac{dF}{dx} + v\frac{dF}{dy} + w\frac{dF}{dz} = 0. \tag{5}$$

Otóż równanie warunkowe, którego pierwszy wyraz $\frac{dF}{dt}$ znika jeśli ściana jest stała.

To równanie powinno istnieć, przez cały czas ruchu, dla punktów które były pierwotnie w zetknięciu ze ścianą; podobne równania istnieją dla wszystkich części powierzchni które nie są wolne.

Powierzchnia wolna jest pod działaniem wiadomego parcia p_0, które jest zwykle to samo we wszystkich jej punktach, ale które może się zmieniać z czasem t. Nie zważając na zamęty, wiry i tym podobne ruchy gwałtowne, które sprowadzają punkta płynu z jego powierzchni do wnętrza i nawzajem, w założeniu w którem się stawiamy, wyrażamy tylko że punkta płynne ślizgają na powierzchni wolnej, idealnej, mającej za równanie

$$p - p_0 = 0;$$

zkąd, dla tych punktów płynnych wywodzimy warunek

$$(6) \qquad \frac{dp}{dt} + u\frac{dp}{dx} + v\frac{dp}{dy} + w\frac{dp}{dz} = 0, \quad \text{albo} \quad = \frac{dp_0}{dt}.$$

Równania (5) i (6), razem z równaniami wynikającemi ze stanu początkowego, służą do wyznaczenia funkcyj dowolnych wprowadzonych przez całkowanie równań różniczkowych cząstkowych (1) i (2).

356. Uważaliśmy dotąd x, y, z jako spółrzędne punktu wyznaczonego, ale wziętego gdzie się podoba w przestrzeni napełnionej massą płynną. Jeśli chcemy znać ruch jednej szczególnej cząstki płynnej, przypuszczając że x, y, z oznaczają spółrzędne tej cząstki, wtedy x, y, z przestaną być zmiennemi niezależnemi i staną się funkcyami czasu t. Aby je wyznaczyć, trzeba

całkować trzy równania różniczkowe jednoczesne

$$\frac{dx}{dt}=u, \qquad \frac{dy}{dt}=v, \qquad \frac{dz}{dt}=w,$$

zastąpiwszy najpierwej u, v, w przez ich wartości ogólne, znalezione jakośmy poprzednio pokazali. Wtedy x, y, z będą funkcyami czasu t i trzech statecznych dowolnych; wyznaczy się te stateczne wyrażając że, dla $t=0$, x, y, z biorą wartości a, b, c spółrzędnych początkowych cząstki uważanej.

Nie potrafiono jeszcze zcałkować ogólnych równań ruchu płynów. Gdyby to zrobić umiano, bez wątpienia rozszerzonoby granice matematycznej wiedzy; ale ztąd Mechanika nie bardzo wielką odniosłaby korzyść, dlatego że równania, które mianowano ogólnemi równaniami ruchu płynów, nie są prawdziwe tylko przybliżone (*), a w przypadkach w których się udało ich

(*) W ustaleniu tych równań, jakośmy zastrzegli, nie zważano na tarcie; a doświadczenie dowodzi że w ruchu płynów nie wolno zaniedbywać tarcia które właśnie sprawia to co nazywają lepkością. *Navier* usiłując wprowadzić do rachunku lepkość, przedstawia w następującym kształcie ogólne równania Hydrodynamiki

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=X+\varepsilon\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^2u}{dz^2}\right)-\frac{du}{dt}-u\frac{du}{dx}-v\frac{du}{dy}-w\frac{du}{dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=Y+\varepsilon\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{d^2v}{dz^2}\right)-\frac{dv}{dt}-u\frac{dv}{dx}-v\frac{dv}{dy}-w\frac{dv}{dz},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=Z+\varepsilon\left(\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{d^2w}{dy^2}+\frac{d^2w}{dz^2}\right)-\frac{dw}{dt}-u\frac{dw}{dx}-v\frac{dw}{dy}-w\frac{dw}{dz};$$

w których ε jest spółczynnikiem statecznym, a nawiasy wyrażają składowe pewnej siły, pochodzącej z tarcia cząstek płynnych ruchomych, która ma zbliżać je i oddalać nawzajem. Ale, te dość zawiłe równania, zbijane przez jednych, modyfikowane przez drugich, potrzebują doświadczennego potwierdzenia. W stanie obecnym są one więcej wskazem niedostatku niż rzetelnym nabytkiem umiejętności.

całkowanie, teorya nie zgadza się zupełnie z doświadczeniem. Nie ma więc co żałować dotychczasowej niemożebności całkowania tych równań dla Mechaniki.

Dodajemy do tego że cztery ogólne twierdzenia Dynamiki stronica 228) stosują się do ruchu massy płynnej jakiejkolwiek; zatem, kiedy tylko użycie tych twierdzeń może doprowadzić do szukanego wyniku trzeba na tem poprzestać, i nie udawać się do równań różniczkowych ustalonych powyżej.

357. Równania różniczkowe cząstkowe (1) uproszczają się, gdy wyrażenia $Xdx + Ydy + Zdz$ i $udx + vdy + wdz$ są różniczkami dokładnemi, to jest gdy istnieją równania

$$Xdx + Ydy + Zdz = dU,$$

$$udx + vdy + wdz = d\varphi,$$

w których U i φ są funkcyami czterech zmiennych x, y, z, t; X, Y, Z i u, v, w są pochodnemi cząstkowemi, odpowiednych funkcyj U i φ, wziętemi względem spółrzędnych x, y, z uważanych jako zmienne niezależne. U jest *funkcyą sił*, a przez podobieństwo nazwano φ *funkcyą prędkości*.

Aby wydatnie pokazać uproszczenia, uważajmy że, jeśli pomnożymy równania (1) odpowiednio przez $dx = udt$, $dy = vdt$, $dz = wdt$ i dodamy stronami, otrzymamy równanie które może wziąć kształt następujący

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{du}{dt}dx - \frac{dv}{dt}dy - \frac{dw}{dt}dz$$

$$-u\left(\frac{du}{dx}udt + \frac{du}{dy}vdt + \frac{du}{dz}wdt\right) - v\left(\frac{dv}{dx}udt + \frac{dv}{dy}vdt + \frac{dv}{dz}wdt\right)$$

$$-w\left(\frac{dw}{dx}udt + \frac{dw}{dy}vdt + \frac{du}{dz}wdt\right),$$

albo

$$(7)\quad \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{du}{dt}dx - \frac{dv}{dt}dy - \frac{dw}{dt}dz - \frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2).$$

Nietrudno teraz widzieć że druga strona jest różniczką dokładną, kiedy z funkcyą sił istnieje jeszcze funkcya prędkości. W samej rzeczy, gdy wyrażenie $udx+vdy+wdz$ jest różniczką dokładną pewnej funkcyi φ względem spółrzędnych x, y, z, wtedy jego pochodna względem czasu t będzie także różniczką dokładną; albowiem

$$\frac{du}{dt}dx + \frac{dv}{dt}dy + \frac{dw}{dz}dz = \frac{d^2\varphi}{dtdx}dx + \frac{d^2\varphi}{dtdy}dy + \frac{d^2\varphi}{dtdz}dz = d\frac{d\varphi}{dt}.$$

Mamy więc

$$(8)\quad \frac{dp}{\rho} = dU - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right);$$

wszystkie różniczki są wzięte względem x, y, z, uważając tu czas t jako stateczny.

Jeśli nazwiemy V prędkość cząstki dm która przechodzi w epoce t przez punkt (x, y, z), to równanie weźmie kształt niezależny od wyboru spółrzędnych

$$\frac{dp}{\rho} = dU - d\frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}d.V^2.$$

Równanie (8) może się zcałkować, gdy gęstość ρ jest ilością stateczną albo funkcyą wiadomą parcia p; jako się zdarza w cieczach jednorodnych i w gazach temperatury statecznej.

W cieczach jednorodnych mamy zaraz

$$\frac{p}{\rho} = U - \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2}\right);$$

trzeba tylko do drugiej strony przydać funkcyę dowolną czasu t, albo ją uważać jako zawartą w funkcyi φ.

Dobrze jest pamiętać że, w tym przypadku, równanie ciągłości cieczy, już przywiedzione do równania nieściśliwości (3), bierze teraz kształt

$$\frac{d\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0;$$

zkąd można otrzymać φ w funkcyi x, y, z, i następnie po wyznaczeniu funkcyj dowolnych, znaleźć u, v, w przez różniczkowanie funkcyi φ.

W gazach temperatury stałej jest $p=k\rho$; rugując ρ z równania (8) i potem całkując, znajdujemy równanie

$$kLp=U-\frac{d\varphi}{dt}-\frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi^2}{dx^2}+\frac{d\varphi^2}{dy^2}+\frac{d\varphi^2}{dz^2}\right),$$

które wyznacza p w funkcyi φ.

W gazach, gdy funkcya prędkości istnieje, równanie (2) może wziąć postać

$$\frac{dp}{dt}+\frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(p\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}=0.$$

Podstawiając wartość p, wyciągniętą z poprzedzającego równania, otrzymuje się równanie które daje φ; zkąd u, v, w.

Ogólniej, jakiekolwiek są płyny, równanie (2) w przypadku funkcyi prędkości może zawsze brać kształt

$$(9)\qquad \frac{d\rho}{dt}+\frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dx}\right)}{dx}+\frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dy}\right)}{dy}+\frac{d\left(\rho\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}=0.$$

Znając ustawę gęstości ρ wedle natury płynów, będzie można znaleźć p i φ za pomocą równań (7) i (8); a gdy funkcye dowolne zostaną wyznaczone, otrzyma się u, v, w różniczkując φ.

358. Uproszczenia wykonane na początku numeru 357 opierają się na twierdzeniu następującem, które *Lagrange* podał w swojej Mechanice analitycznej :

Jeśli *$udx + vdy + wdz$ jest w pewnej epoce różniczką dokładną, to nią jest w jakiejkolwiek chwili ruchu.*

Różni autorowie, nie przyjmując jego dowodzenią, osadzają swoje na założeniu cieczy jednorodnych albo gazów temperatury statecznej. Ale to są tylko bardzo szczególne przypadki twierdzenia *Lagrange'a.* Następujące dowodzenie jest równie ogólne jak proste.

W przypuszczeniu funkcyi sił U, równania różniczkowe cząstkowe ruchu płynów mają kształt

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=\frac{dU}{dx}-\frac{d}{dt}u,\quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}=\frac{dU}{dy}-\frac{d}{dt}v,\quad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}=\frac{dU}{dz}-\frac{d}{dt}w$$

Weźmy pochodne z pierwszego względem y a z drugiego względem x, będzie

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2p}{dydx}+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy}\frac{dp}{dx}=\frac{d^2U}{dydx}-\frac{d}{dt}\frac{du}{dy},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d^2p}{dxdy}+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}\frac{dp}{dy}=\frac{d^2U}{dxdy}-\frac{d}{dt}\frac{dv}{dx};$$

zkąd, odciągając stronami, wynika

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}\frac{dp}{dy}-\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy}\frac{dp}{dx}=\frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right).$$

Jeśli gęstość ρ jest stateczna albo proporcyonalna do parcia p, pierwsza strona jest zero; ale ta strona jeszcze jest zero w przypadku zupełnie ogólnym. Wiadomo albowiem z analizy że, gdy dwie funkcye tych samych zmiennych, jako $f(x, y, z)$ i $\varphi(x, y, z)$, mają między sobą związek jakikolwiek, są funkcyą jedna drugiej, wtedy ich pochodne sprawdzają równania

$$\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx}=\frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz}-\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}=0;$$

i nawzajem. Owoż, w płynach gęstość ρ i parcie p są ogólnie funkcyami spółrzędnych x, y, z, a gęstość jeśli nie jest stateczna zależy od parcia; więc $\frac{1}{\rho}$ i p dają zawsze równanie

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx}\frac{dp}{dy}-\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy}\frac{dp}{dx}=0, \qquad \text{i temsamem} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}\right)=0.$$

Ten wynik dowodzi że różnica $\frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}$ jest niezależna od czasu t. Okaże się podobnie że różnice $\frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}$ i $\frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}$ są także niezależne od czasu t. Zatem, jeśli te trzy różnice są zero w jednej epoce, to będą zero w każdej innej. A więc, ponieważ warunki całkowalności wyrażenia $udx+vdy+wdz$ są niezależne od czasu, jeśli to wyrażenie jest różniczką dokładną w pewnej epoce, to nią jest w każdej chwili ruchu. Co właśnie stanowi twierdzenie Lagranża..

Można łatwo wiedzieć czy w danym ruchu płynu istnieje funkcya prędkości φ, albowiem dość tylko się zapewnić czy ona ma miejsce w stanie początkowym. Trzeba zaś uważać że temu wystarczającemu warunkowi, staje się zadość, gdy prędkości wszystkich punktów są zero w stanie początkowym;

bo wtedy mamy

$$udx + vdy + wdz = 0,$$

co jest oczywiście różniczką dokładną.

359. W ruchu massy płynnej która się obraca jednostajnie około osi stałej tak, że jej punkta zachowują położenie względne, wyrażenie $udx + vdy + wdz$ nie jest różniczką dokładną. Jakoż, oznaczając przez ω prędkość kątową stateczną, i przez r odległość punktu materyalnego (x, y, z) od osi, będzie

$$x = r \operatorname{dos} \omega t, \qquad y = r \operatorname{wst} \omega t;$$

zkąd

$$u = -\omega y, \qquad v = \omega x, \qquad w = 0;$$

a następnie

$$udx + vdy + wdz = \omega(xdy - ydz).$$

To wyrażenie nie jest różniczką dokładną; nie można więc rozwiązać zagadnienia, o którem mowa, sposobem szczególnym opartym na istnieniu funkcyi prędkości φ. Ale ogólne równania ruchu płynów dają łatwe rozwiązanie. Mamy albowiem w tym przypadku

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = 0, \qquad w = 0.$$

$$\frac{du}{dx} = 0 \text{ i } \frac{du}{dy} = -\omega, \quad \frac{dv}{dx} = -\omega \text{ i } \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0 \text{ i } \frac{dw}{dy} = 0;$$

przez podstawienie tych wartości równania (1) stają się

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = X + \omega^2 x, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = Y + \omega^2 y, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = Z:$$

zkąd wynika

$$\frac{dp}{\rho} = Xdx + Ydy + Zdz + \omega^2(xdx + ydy),$$

równanie otrzymane w Hydrostatyce.

OGÓLNE WIADOMOŚCI Z HYDRAULIKI.

RUCH USTAWICZNY PŁYNÓW.

360. Nie mogąc wyprowadzić potrzebnych następstw z ogólnych równań Hydrodynamiki, udajemy się do Hydrauliki po niektóre praktyczne formuły, dopełniające obecnych wiadomości o ruchu płynów.

W wielu przypadkach najbardziej nam pożytecznych płyny mają ruch regularny, jednakowy w tych samych punktach a rozmaity w różnych. Gdy cząstki płynne, przebiegając punkta przestrzeni, zachowują w każdym z nich dla pięciu ilości u, v, w, p, ρ wartości statecznie te same, i tylko je zmieniają przechodząc z jednego punktu do drugiego, mówi się że ruch płynu jest *ustawiczny*.

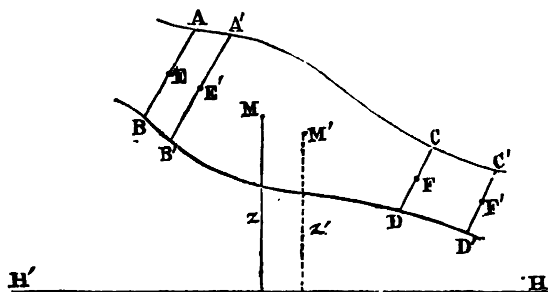
Zwyczajny bieg wód rzecznych przedstawia przykład massy ciekłej w stanie ruchu ustawicznego. W tym ruchu każda cząstka płynna nie posiada koniecznie statecznej prędkości; ale różne cząstki, przechodzące jedna po drugiej przez ten sam punkt przestrzeni, biorą w nim prędkości mające tę samą wielkość i ten sam kierunek; ztąd łatwo pojąć że wszystkie cząstki płynne, przechodzące przez ten sam punkt przestrzeni, idą ciągiem po sobie i przebiegają tę samą krążnę. Ogół tych cząstek rozpołożonych wzdłuż ich spólnej krążnej stanowi to co można nazwać *strugą* płynu w ruchu.

Z określenia ruchu ustawicznego wynika że pochodne cząst-

kowe ilości u, v, w, p, ρ, wzięte względem czasu t, są zero; te więc pięć ilości w tym przypadku są funkcyami samych tylko spółrzędnych x, y, z, uważanych jako zmienne niezależne.

361. Twierdzenie Daniela Bernoulli. Gdy ciecz jakakolwiek, pod działaniem samej ciężkości, płynie ruchem ustawicznym w rurach, nie zważając na jej tarcie o ściany tych rur ani na wzajemne tarcie cząstek płynnych między sobą, można za pomocą zasady sił żywych wykazać główne własności tego ruchu, jak to pierwszy uczynił *Daniel Bernoulli* podając ważne twierdzenie którem się teraz zajmiemy.

Niech będzie rura z przecięciami jakiemikolwiek, przez którą płynie ciecz ruchem ustawicznym. Uważajmy dwa przecięcia normalne AB, CD, i, massę płynną, między niemi zawartą, odo-



sobnijmy od reszty cieczy; poczem, weźmy płaszczyznę poziomą porównania HH', która nam posłuży za płaszczyznę xy. Siły działające na massę odosobnioną (ABCD) są: najpierwej jej ciężar, potem parcie na ścianę AB skierowane ku CD, i parcie na ścianę CD skierowane ku AB. Nie zważając na tarcie cząstek płynnych zaniedbujemy siły wewnętrzne. Owoż, na końcu czasu dt, przecięcia AB i CD wezmą położenia A'B' i C'D', a ich środki ciężkości E i F przeniosą się na E' i F'; zatem, jeśli

V_0 i V oznaczają prędkości tych dwóch punktów, będzie

$$EE' = V_0 dt \quad \text{i} \quad FF' = V dt.$$

Z przyczyny ruchu ustawicznego, objętości (ABA'B') i (CDC'D') są równowarte; więc, nazywając Ω_0 i Ω powierzchnie przecięć AB i CD, mamy

$$\Omega_0 V_0 dt = \Omega V dt \quad \text{zkąd} \quad \Omega_0 V_0 = \Omega V.$$

To ustaliwszy, szukajmy przyrostu siły żywej. Widzimy zaraz że w obliczaniu tego przyrostu nie ma potrzeby zważać na massę zawartą między AB i CD, bo ona jest spólna sile żywej końcowej i sile żywej początkowej których różnicą jest przyrost; dość więc tylko wziąć różnicę między siłą żywą massy (CDC'D') i siłą żywą massy (ABA'B'). Zatem, jeśli nazwiemy ϖ ciężar gatunkowy cieczy, jej gęstość będzie $\frac{\varpi}{g}$, i przyrost siły żywej wyrazi się przez

$$\frac{\varpi}{g}\Omega V dt . V^2 - \frac{\varpi}{g}\Omega_0 V_0 dt V_0^2 = \frac{\varpi}{g}\Omega V dt (V^2 - V_0^2).$$

Aby znaleźć pracę sił, oznaczmy przez dm massę cząstki płynnej w jakimkolwiek punkcie $M(x, y, z)$, która przechodzi do $M'(x', y', z')$ w czasie dt; przez p_0 i p parcia, na jedność powierzchni, jakich doznają ściany AB i CD; summa prac sił działających na odosobnioną massę płynu będzie miała za miarę

$$p_0 \Omega_0 V_0 dt - p \Omega V dt + \sum (z - z') g dm.$$

Więc, stosując zasadę sił żywych, otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{2}\frac{\varpi}{g}\Omega V dt (V^2 - V_0^2) = \Omega V dt (p - p_0) + \sum (z - z') g dm.$$

Ale $\Sigma(z - z')gdm = \Sigma gzdm - \Sigma gz'dm$; a ponieważ w dwóch ostatnich summach objętość (A'B'CD) jest spólna, trzeba tylko wyrachować objętości skrajne (ABA'B') i (CDC'D'); zatem, nazywając Z_0 i Z rzędne środków ciężkości E i F przecięć AB i CD, mamy

$$\sum gzdm - \sum gz'dm = \varpi\Omega_0 V_0 dt.Z_0 - \varpi\Omega V dt.Z.$$

Podstawiając tę wartość w równaniu, znajdujemy ostatecznie

$$\frac{\varpi}{2g}(V^2 - V_0^2) = p_0 - p + \varpi(Z_0 - Z);$$

więc

$$(1)\qquad \frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p}{\varpi} + Z_0 - Z.$$

Na tem równaniu zależy twierdzenie *Daniela Bernoulli.*

Jeśli przypuścimy $Z = Z_0$, co się zdarza gdy środki ciężkości przecięć CD i AB są zawsze na płasczyznie poziomej, wtedy

$$\frac{V^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = \frac{P_0}{\varpi} - \frac{P}{\varpi}.$$

Zkądinąd, jeśli $\Omega_0 > \Omega$ będzie $V_0 < V$; zatem $p_0 > p$. Co dowodzi że w rurach rozprowadzających wodę, parcie jest największe przy wydętościach. Wynik bardzo ważny w zastosowaniach i potwierdzony doświadczeniem.

362. Twierdzenie *Bernullego* stosuje się do ruchu ustawicznego strug płynnych, i w tym przypadku może się wywieśdź z ogólnych równań ruchu płynów. Jakoż, z założenia struga jest ciągiem punktów płynnych pod działaniem samej ciężkości, mających ruch ustawiczny w którym

$$dU = -gdz, \quad \frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0.$$

Przez podstawienie tych wartości, równanie (7) stronicy 734 staje się

$$\frac{dp}{\rho} = -gdz - \frac{1}{2}d.V^2;$$

zkąd, całkując w przypuszczeniu gęstości statecznej, otrzymujemy

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = stat.$$

albo, czyniąc $\varpi = g\rho$ i wyznaczając stateczną dowolną,

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\varpi} + z_0.$$

Wiemy że $\frac{V^2}{2g}$ znaczy wysokość należną prędkości V cząstki płynnej; $\frac{p}{\varpi}$ przedstawia wysokość odpowiedającą parciu p, jakiego ona doznaje od cieczy otaczającej; nakoniec z jest wysokością tej cząstki ponad płaszczyzną poziomą porównania. Zatem, znalezione równanie pokazuje że, dla każdej nieskończenie małej cząstki płynu w ruchu ustawicznym, trzy rzeczone wysokości czynią summę $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z$ stateczną, która przedstawia *płaszczyznę obciążenia* dla cząstki płynnej $m(x, y, z)$.

Ten wynik zgadza się z twierdzeniem *Bernullego*, zastosowanem do nieskończenie cienkiej strugi jednorodnej, w której każdy punkt może być uważany jako środek ciężkości jej nieskończenie małego normalnego przecięcia.

Piezometr. W Hydraulice nazywa się piezometrem (πιεσις *parcie*), rurka z obydwóch stron otwarta, postawiona jednym koń-

cem w punkcie m strugi. Ciecz wchodzi do rurki i tworzy kolumnę mającą wysokość $\frac{p}{\varpi}$, która jest miarą parcia jakiego punkt m doznaje; a zaś $\frac{p}{\varpi}+z$ oznacza wzniesienie *poziomu piezometrycznego* dla wierzchołka tej kolumny.

Za pomocą tych określeń można mieć prawdziwe znaczenie ostatniego równania. Jakoż, to równanie, otrzymane w założeniu doskonałej płynności cieczy, bez lepkości ani tarcia, wyraża że *płaszczyzny obciążenia dwóch punktów jednej strugi są te same.*

Nadto, ostatnie równanie, napisane jako następuje

$$\frac{V^2}{2g}-\frac{V_0^2}{2g}=\frac{p_0}{\varpi}+z_0-\left(\frac{p}{\varpi}+z\right),$$

dowodzi że różnica wysokości, należnych prędkościom dwóch punktów jednej strugi, jest równa różnicy odpowiedających poziomów piezometrycznych.

Zkąd nietrudno przewidzieć że ta różnica poziomów piezometrycznych przedstawia dla dwóch punktów strugi *stratę obciążenia*, pochodzącą z lepkości i tarcia. Co wkrótce wyraźnie pokażemy.

363. Uwaga. Teorycznie twierdzenie Dª *Bernullego* jest zaiste ważnym nabytkiem umiejętności; ale nie trzeba zapominać że się opiera na ruchu ustawicznym, a szczególniej że zaniedbuje tarcie między cząstkami płynnemi w ruchu, czego praktyka nie zawsze pozwala. Można jednak użyć tego twierdzenia z dostatecznem przybliżeniem, w przypadkach do których się stosują trzy następujące ogólne prawidła Hydrauliki.

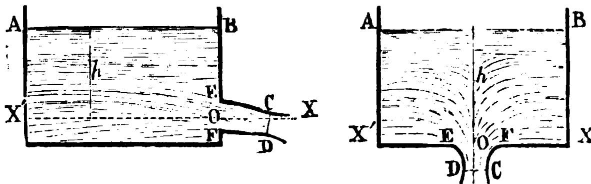
1° Gdy bieg wody składa się ze strug ożywionych ruchem mniej więcej prostolinijnym i jednostajnym, parcie jest to samo co w stanie statycznym; albowiem, ponieważ siły zewnętrzne

czynią sobie równowagę na każdej cząstce strugi, parcia jakie jedna struga wywiera na strugi sąsiednie, albo od nich ponosi, są takie same jak gdyby ciecz była w spoczynku.

2° Gdy ruch cieczy jest zmienny ale przyspieszenie słabe, ciecz jest prawie w równowadze; zatem parcia cząstek płynnych są prawie stateczne.

3° Jeśli ciecz poddana działaniu ciężkości porusza się strugami parabolicznemi, na płaszczyznach pionowych równoległych, parcie jest to samo wewnątrz pasma strug co zewnątrz; bo, ponieważ strugi mają kształt parabol jakieby każda z ich cząstek płynnych przebiegała, na mocy swojej prędkości lub ciężaru, gdyby była odosobniona w próżni, ruchy tych strug płynnych są niezależne jedne od drugich; zatem strugi nie wywierają żadnego między sobą wzajemnego działania. W tym przypadku, jako widzimy, ustawa parcia jest zupełnie różna od tej której ulega ciecz w równowadze.

364. Twierdzenie Torricellego. Przypatrując się wypływowi cieczy przez małe otwory wyrobione w cienkich ścianach naczyń, *Torricelli* odkrył ustawę prędkości tego wypływu, i zrobił pierwszy krok w Hydrodynamice, podając jako czyn doświadczenny ważne twierdzenie : *Prędkość cieczy wypływającej przez mały otwór naczynia, jest taka sama jak prędkość ciała spadającego wolnie w próżni, z wysokości równej wzniesieniu poziomu tej cieczy nad otworem.* Ale dopiero D. *Bernoulli* dał dowodzenie tego twierdzenia.



Niech będzie naczynie napełnione, na przykład wodą, z po-

ziomem statecznym AB, mające w cienkiej części ściany, pionowej albo poziomej, wyrobiony mały otwór EF przez który ta woda wypływa. Gdyby nie było ciężkości żyła płynna EFCD byłaby walcowata. Rzeczywiście, z przyczyny pochyłości strug płynnych względem osi otworu, ta żyła zwęża się najpierwej, dosięga największego *ścieśnienia* CD, i potem się rozszerza.

To zjawisko łatwo się wytłumaczyć daje. Strugi płynne wewnątrz naczynia zbiegają się zewsząd ku otworowi, a mając kierunki różne nawzajem się uderzają i tłoczą. Ztąd ścieśnienie żyły, które dopiero wtedy ustaje, kiedy te cząstki przebiegły już pewną odległość zewnątrz naczynia. Nadto cząstki ciekłe, zmuszone do poruszania się wedle krążnych krzywych którychby nie opisywały gdyby były wolne, dają początek siłom odśrodkowym których skutkiem jest powiększenie parcia wewnątrz żyły na prost otworu.

Aby znaleźć prędkość wypływu, przez środek ciężkości O otworu EF, poprowadźmy płaszczyznę poziomą porównania; nazwijmy h wysokość poziomu AB cieczy nad tą płaszczyzną, p_0 parcie atmosferyczne i p parcie cieczy.

Parcia przy otworze są niewiadome; ale, w punktach największego ścieśnienia żyły, cząstki płynne mają prędkości równoległe, i pod działaniem ciężkości opisują parabole prawie niezależne jedne od drugich; można więc przypuścić że parcie jest stateczne w całej rozciągłości żyły i równe parciu atmosferycznemu : co stanowi właśnie przypadek w którym twierdzenie D[a] Bernullego jest zastosowalne. Biorąc zatem $p = p_0$, mamy równanie

$$\frac{V^2}{2g} = \frac{V_0^2}{2g} + h.$$

Owoż, $V_0 = \frac{\Omega}{\Omega_0} V$, a z założenia powierzchnia Ω otworu jest bardzo mała względem przecięcia naczynia $AB = \Omega_0$; możemy

więc bez znacznego błędu zaniedbać wyraz $\frac{V_0^2}{2g}$, i wziąć po prostu formułę

$$(2) \qquad V = \sqrt{2gh}$$

która wyraża twierdzenie *Torricellego*.

Ta formuła, jako jej podobne w Hydraulice często oparte na wielce wątpliwych założeniach, nie powinna być przyjęta za dokładną dopóki nie zostanie sprawdzona doświadczeniem. Otrzymuje się zaraz jedno sprawdzenie, dając wypływowi kierunek pionowy wytrysku, i uważając że ciecz wznosi się prawie do wysokości h. Można mieć drugie dobitniejsze sprawdzenie, wyznaczając parabolę którą żyła płynna opisuje, i wywodząc prędkości cząstki $m(x, y)$ z równań ruchu jednostajnie przyspieszonego

$$x = Vt, \qquad y = \frac{1}{2}gt^2;$$

zkąd

$$V = x\sqrt{\frac{g}{2y}}.$$

Znaleziona tym sposobem wartość $V = \sqrt{2gh}$ potwierdza teoryę.

Wywrot żyły. Gdy ciecz wypływa przez otwór wyrobiony w cienkiej ścianie pionowej naczynia, nie kołowy ale wielokątny, na przykład kwadratowy, wtedy zdarza się ciekawe zjawisko, zwane *wywrotem żyły*, które uwydatnia istnienie parć odśrodkowych. Przecięcie żyły najpierwej kwadratowe zaokrągla się przy kątach i ścieśnia; potem przybiera kształt ośmiokątny prawie foremny, a następnie się rozszerza i znowu bierze kształt kwadratu którego przekątne są równoległe do boków otworu. Wypuszczając wodę przez otwory prostokątne pionowo wydłużone, otrzymano żyły bardzo spłasczone i mające rozmaitego kształtu przecięcia.

365. WYDATEK. Nazywa się *wydatkiem cieczy* przechodzącej, w jednej sekundzie, przez przecięcie normalne do prądu, jej objętość która się równa wieloczynowi powierzchni tego przecięcia przez prędkość. Oznaczając przez Q wydatek i przez Ω powierzchnię *przecięcia ścieśnionego* żyły, ponieważ prędkości strug płynnych są prawie normalne do tego przecięcia, otrzymujemy

$$Q = \Omega \sqrt{2gh}.$$

Trzeba teraz wyznaczyć wartość Ω znając powierzchnię A otworu. Teorya nic tu dać nie może; ale doświadczenie pokazuje że Ω jest proporcyonalne do A. Kładąc $\Omega = mA$, będziemy mieli formułę

$$(3) \qquad Q = mA\sqrt{2gh},$$

w której *spółczynnik ścieśnienia* $m = 0{,}62$, wartość średnia. Ta wartość przypuszcza że otwór, zrobiony w cienkiej ścianie płaskiej, ma wysokość mniejszą od $0^m{,}1$, i że jego środek ciężkości ponosi dość znaczne obciążenie.

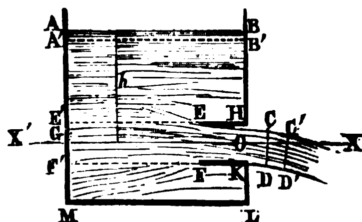
Spółczynnik ścieśnienia zależy ogólnie od kształtu otworu, i jest mniejszy dla kwadratu niż dla koła; jego wartość zmniejsza się także, gdy się obciążenie zwiększa poza pewną granicę. Ale w praktyce biorą zwykle $m = 0{,}62$, bez względu na kształt otworu.

Jeśli temu otworowi dano kształt jaki wziąć usiłuje żyła przy wyjściu z małego otworu wyrobionego w cienkiej ścianie, to oczywiście nie będzie już ścieśnienia, ponieważ sztucznie przyprowadzono otwór do przecięcia ścieśnionego; nie będzie więc spółczynnika zmniejszającego prędkość albo przecięcie. Co właśnie sprawdzili doświadczeniem *Michellotti* i *Eytelwein*, znajdując

$$Q = 0{,}984\,A\sqrt{2gh}.$$

366. Przystawki. Nazywa się przystawką krótka rurka przyprawiona normalnie do otworu naczynia przez którą ciecz z niego wypływa. Przystawki stosownie do swojego kształtu wywierają różny wpływ na wydatek otworu. Powiemy kilka słów o znakomitszych.

Przystawka wklęsła. Jestto cienka rurka walcowa EFKH wchodząca w naczynie, i dostatecznie krótka aby żyła wodna, wypływająca przez otwór EF, nie przylegała do jej ściany. Za



pomocą tej przystawki, wynalezionej przez *Borda*, punkta w których cząstki płynne zaczynają brać prędkości przyspieszone są przeniesione wewnątrz cieczy. A ponieważ otwór EF jest bardzo szczupły, w porównaniu z przecięciem poziomem naczynia, prędkość przy ścianach pionowych jest bardzo mała; zatèm parcie cieczy na te ściany jest prawie prostopadłe, to jest takie jakieby miało miejsce w stanie równowagi. Nadto, że statecznym poziomem cieczy w naczyniu ruch całej massy jest ustawiczny. Bacząc na te okoliczności, można rachunkiem wyznaczyć wartość najmniejszą możebną spółczynnika ścieśnienia m. Dość tylko zasadę ilości ruchu rzutowanych na osi zastosować do cieczy która, w chwili jakiejkolwiek wziętej za początek czasu, jest zawarta między poziomem statecznym AB i przecięciem ścieśnionem CD. Jakoż, siły zewnętrzne wpływające na ruch cieczy są: ciężkość, parcie atmosferyczne i oddziaływania ścian naczynia; jeśli weźmiemy oś rzutów prostopadłą do płas-

czyzny otworu HK ściany BL, rzut ciężkości i rzut parcia atmosferycznego na poziom AB będą oba zero. Co do oddziaływań ścian, trzeba rozróżnić dwa przypadki: 1° gdy przyprawiono przystawkę wklęsłą do otworu HK, cząstki cieczy przy częściach BH i LK poruszają się powoli; zatem ich parcia na te części mogą być uważane za normalne, jakośmy wyżej powiedzieli; ztąd wynika że oddziaływania dwóch ścian przeciwległych BL i AM niszczą się w częściach BH i AE′, LK i MF′: ale jeszcze zostaje oddziaływanie części E′F′. Ta część jest na ścianie AM, rzutem otworu HK mającego powierzchnię A, a jej środek ciężkości G znajduje się na odległość h od poziomu AB. Owoż, oddziaływanie części E′F′ pochodzi z parcia cieczy prawie równego parciu hydrostatycznemu $\varpi \mathrm{A}h$, i z parcia atmosferycznego p_0 wywartego na całą żyłę ECDF, które jest to samo co parcie na powierzchnię EF zamykającą powierzchnię żyły; ostatnie zaś ma za miarę $\mathrm{A}p_0$. Zatem oddziaływanie części E′F′ jest równe summie $\varpi \mathrm{A}h + \mathrm{A}p_0$; a ponieważ parcie atmosferyczne, działające na żyłę i skierowane w stronę przeciwną oddziaływania ściany AM, ma wartość $-\mathrm{A}p_0$, summa wszystkich oddziaływań ścian i parcia atmosferycznego, rzutowanych na osi prostopadłej do ściany BL, wyraża się przez $\varpi \mathrm{A}h$. 2° Gdy otwór jest wyrobiony w samej cienkiej ścianie naczynia, strugi płynne ślizgające na tej ścianie, z prędkością rosnącą w miarę zbliżania się do otworu, wywierają parcie mniejsze od parcia hydrostatycznego; wtedy summa oddziaływań ścian naczynia jest większa od $\varpi \mathrm{A}h + \varpi p_0$. Z tego wszystkiego wnieść należy że, w obydwóch przypadkach, summa popędów sił zewnętrznych na osi prostopadłej do ściany BL może się przedstawić ogólnie przez

$$i\varpi \mathrm{A}hdt;$$

gdzie liczba i jest przynajmniej równa jedności.

Szukajmy teraz przyrostu ilości ruchu rzutowanych na tej

samej osi idącej w stronę prędkości wypływu. Na końcu czasu dt massa ciekła, zawarta między poziomem statecznym AB i przecięciem ścieśnionem CD, bierze położenie sąsiednie A'B'C'D'; a że, z przyczyny ruchu ustawicznego, ciecz mieszcząca się w spólnej objętości A'B'CD zachowuje we wszystkich swoich cząstkach te same prędkości w obydwóch położeniach całej massy, przyrost ilości ruchu tej massy jest poprostu różnicą ilości ruchu mass CDC'D' i ABA'B'. Ale ostatnia massa ABA'B' nie daje żadnego rzutu ilości ruchu na obranej osi, bo prędkości jej cząstek są pionowe; tym sposobem zostaje tylko do wyznaczenia rzut ilości ruchu massy CDC'D' której cząstki poruszają się równolegle do osi rzutów. Jeśli więc oznaczymy przez V prędkość wypływu, i przez Ω powierzchnię przecięcia ścieśnionego CD, wydatek całej massy ciekłej przez czas dt będzie $\frac{\varpi}{g}\Omega V dt$, i ilość ruchu tej massy, równa

$$\frac{\varpi}{g}\Omega V dt.$$

wyrazi przyrost rzutu ilości ruchu uważanej massy ABCD. Porównywając tę wartość z otrzymaną wyżej, znajdujemy, na mocy zasady ilości ruchu, równanie

$$\frac{\varpi}{g}\Omega V^2 dt = i\varpi A h dt;$$

a ponieważ twierdzenie *Torricellego* daje $V^2 = 2gh$, mamy ostatecznie

$$\frac{\Omega}{A} = m = \frac{i}{2}.$$

Co dowodzi że wartość *minima* spółczynnika ścieśnienia m

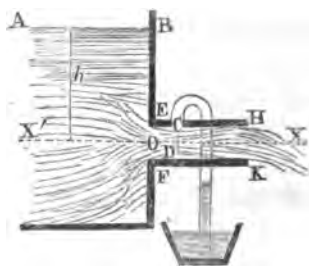
równa się $\frac{1}{2}$; zatem najmniejszy możebny wydatek na sekundę jest

$$Q = \frac{1}{2} A \sqrt{2gh}.$$

Doświadczenie potwierdza te wyniki. *Borda* otrzymał dla swojej przystawki wklęsłej $m = 0,50$; ale *Weisbach* znalazł $m = 0,535$.

Można powiększyć wydatek przez otwór wyrobiony w cienkiej ścianie, urządzając przy tym otworze wewnątrz naczynia małe deseczki, któreby zatrzymywały strugi mające prędkości zanadto rozbieżne. Ale nie trzeba nadużywać tego sposobu, aby nie wpaśdź na przystawkę wklęsłą, która daje wydatek najmniejszy możebny, wynagrodzony zkądinąd żyłą czystą i nierozpryśniętą. Dla ostatniej własności przyprawiają przystawkę wklęsłą do beczek woziwodów.

367. Przystawka walcowa. Wypływ odbywa się w cienkiej ścianie, kiedy grubość tej ściany jest dość mała aby żyła płynna wychodząca nie dotykała krawędzi zewnętrznych tego otworu.



A jeśli otwór EF jest przedłużony *przystawką walcową* EFKH, to jest krótką rurką której długość nie przechodzi półtora razy jego średnicy, wtedy cząstki płynne wchodzące do takiej przy-

stawki poziomej mają prędkości równoległe; żyła wypływając pełnym otworem rurki zdaje się nie mieć wewnątrz niej żadnego ścieśnienia. Gdyby więc wolno było nie zważać na działania cząsteczkowe które się wykonywają wewnątrz przystawki, ani na tarcie cieczy o jej ściany, nazywając A powierzchnię otworu i V prędkość ruchu, wydatek powinienby się wyrazić przez AV, albo przez $A\sqrt{2gh}$ jeśli prędkość ma wartość $\sqrt{2gh}$. Doświadczenie pokazuje że wydatek rzeczywisty jest mniejszy od $A\sqrt{2gh}$, i przedstawia się przez

$$Q = 0{,}82\,A\sqrt{2gh}. \tag{4}$$

Zmniejszenie wydatku jest zanadto wielkie, żeby się mogło wytłumaczyć lepkością cieczy albo jej tarciem o ściany rurki; musi ono pochodzić ztąd że wewnątrz przystawki walcowej istnieje pewne ścieśnienie żyły, skutkiem którego następuje strata prędkości. To ścieśnienie nie jest takie jakie się zdarza przy wypływie cieczy przez otwór wyrobiony w cienkiej ścianie. Gdy się ruch ustali, część wklęsła żyły w rurce walcowej, po wypędzeniu powietrza, zostaje napełniona cieczą mającą ruch kręcący się powoli poza prądem. Zjawisko podobne do tego jakie się daje widzieć przy słupach mostów na rzece z dołu jej biegu. Przypuszczając że tak się istotnie dzieją rzeczy, a sprawdzimy je doświadczeniem, będziemy wprost szukali przyczyny zmniejszenia wydatku.

Oznaczając przez CD przecięcie ścieśnione żyły, które ma się znajdować między otworem EF naczynia i wylotem HK przystawki walcowej, uważamy najpierwej że, od poziomu wyższego AB aż do przecięcia ścieśnionego CD, woda ma ruch ustawiczny do którego się stosuje twierdzenie *Bernullego;* więc, biorąc płaszczyznę poziomą porównania, przechodzącą przez oś przystawki walcowej, i nazywając h wzniesienie poziomu AB,

mamy

$$\frac{V^2}{2g}-\frac{V_0^2}{2g}=h+\frac{p_0}{\varpi}-\frac{p}{\varpi}$$

Ale, między przecięciem ścieśnionem CD i otworem HK przystawki, żyła się rozszerza, skutkiem czego prędkość cząstek płynnych maleje. Działania cząsteczkowe rozwijają tu pracę oporną która zmniejsza siłę żywą. Aby wyrugować te niewiadome działania wzajemne, zastosujemy zasadę ilości ruchu rzutowanych na osi, do płynu zawartego w części CDKH żyły.

Owóż, jeśli nazwiemy Ω powierzchnię przecięcia CD, A powierzchnię otworu EF, i V' prędkość wypływu przez otwór HK przystawki, będzie

$$Q=AV'=\Omega V=mAV,$$

zkąd

$$V=\frac{V'}{m}.$$

Zatem massa płynna przechodząca, w czasie dt, przez każde z przecięć CD i HK, równa się $\frac{\varpi}{g}Qdt$. Z tej wartości, mając wzgląd na ustawiczność ruchu, przez co się ruguje część massy spólna w jej dwóch położeniach sąsiednich jako było wyżej pokazane, wyprowadzamy zaraz przyrost ilości ruchu

$$\frac{\varpi}{g}Qdt(V'-V) \qquad \text{albo} \qquad \frac{\varpi}{g}AV'(V'-V)dt.$$

Z sił zewnętrznych działających na massę CDKH, i rzutowanych na osi poziomej prostopadłej do płaszczyzny otworu, ciężkość nie daje żadnego rzutu. Parcie p cieczy, wywarte na Ω w stronę dodatną osi rzutów, wyraża się przez Ap; dlatego że

w tem miejscu ciecz składa się z dwóch części: z których jedna stanowiąca właściwą żyłę jest ożywiona ruchem jednostajnym i prostolinijnym, a druga, będąca objętością obrączkową cieczy unoszącą tę żyłę, ma ruchy bardzo powolne; przeto parcia obydwóch części mogą być uważane jako normalne do Ω. Nakoniec, parcie atmosferyczne na przecięciu HK działa w stronę odjemną osi i ma wartość — Ap'.

Otrzymujemy więc równanie

$$\frac{\varpi}{g} AV'(V' - V)dt = (Ap - Ap')dt$$

albo

$$\frac{V'}{g}(V' - V) = \frac{p}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}.$$

To równanie może wziąć kształt następujący, który uwydatnia stratę prędkości

$$\frac{V'^2}{2g} - \frac{V^2}{2g} = \frac{p}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi} - \frac{(V - V')^2}{2g}.$$

Dodajmy teraz ostatnie równanie do napisanego na początku, znajdziemy formułę

$$(5) \qquad \frac{V'^2}{2g} - \frac{V_0^2}{2g} = h - \frac{(V - V')^2}{2g} + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p'}{\varpi}.$$

która dowodzi że twierdzenie Dª *Bernoulli* stosuje się do ruchu całej massy ciekłej, począwszy od powierzchni wolnej AB aż do otworu HK przystawki walcowej; byle tylko wysokość h poziomu AB została zmniejszona wysokością $\frac{(V - V')^2}{2g}$ należną prędkości straconej.

Zaniedbując bardzo małą prędkość V_0 wody przy poziomie wyższym AB, i przypuszczając że parcie atmosferyczne p' przy poziomie otworu przystawki jest to samo co p_0 przy poziomie wyższym, będziemy mieli dwie użyteczne formuły

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{V^2}{2g} = h + \dfrac{p_0 - p}{\varpi}, \\[2ex] \dfrac{V'^2}{2g} = h - \dfrac{(V - V')^2}{2g}. \end{cases}$$

Ostatnia formuła, na mocy związku $V = \frac{V'}{m}$ daje

$$V' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}} \sqrt{2gh}$$

albo

$$(7)\qquad V' = \mu\sqrt{2gh},$$

czyniąc

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{m} - 1\right)^2}}.$$

μ nazywa się spółczynnikiem zmniejszenia prędkości albo *spółczynnikiem straty siły żywej*.

Jeśli weźmiemy $m = 0{,}62$ (365), będzie

$$\mu = 0{,}85.$$

Ta liczba mało się różni od wartości $\mu = 0{,}82$ danej przez doświadczenie; a różnica może się wytłumaczyć tarciem cieczy o ściany przystawki, i niejaką nierównością prędkości strug żyły w przejściu przez HK.

Wskażemy teraz doświadczenne sprawdzenie założeń na których się opiera cały rachunek. Jeśli przyjęta teorya jest dokładna, parcie wewnątrz przystawki powinno być mniejsze od parcia atmosferycznego. Owoż, mamy zaraz różnicę $\frac{p_0 - p}{\varpi}$ przez pierwszą z formuł (6) która, jeśli w niej podstawimy

$$V = \frac{V'}{m} = \frac{\mu}{m}\sqrt{2gh},$$

daje

$$\frac{p_0 - p}{\varpi} = \left(\frac{\mu^2}{m^2} - 1\right)h;$$

ztąd, biorąc wartości praktyczne $\mu = 0,82$ i $m = 0,62$, wywodzimy

$$\frac{p_0 - p}{\varpi} = 0,75h.$$

Więc parcie około przecięcia ścieśnionego CD jest mniejsze od parcia atmosferycznego. VENTURI sprawdził doświadczeniem ten ważny wynik. Do przystawki walcowej przyprawił rurkę zakrzywioną pionowo, która jednym końcem przenikała do jej wnętrza w przewidywanem miejscu ścieśnienia żyły, a drugim sięgała do naczynia napełnionego wodą zafarbowaną; jako pokazuje ostatnia figura. Woda wznosiła się w rurce do pewnej wysokości która właśnie przedstawia wysokość $\frac{p_0 - p}{\varpi}$. *Venturi* znalazł tę wysokość równą $0,74h$. Co czyni prawie $0,75h$, jako daje teorya.

Gdy zastawiono kanał przegrodą zrobioną z beleczek, a trzeba jeszcze podnieść poziom wody; chcąc wtedy przyłożyć nową beleczkę, dość jest rzucić ją na wodę w górze i kierować tak żeby miała kierunek prostopadły do prądu. Skoro ta beleczka

przypłynie ponad inne, sprawi na nich przystawkę walcową; ztąd zmniejszenie parcia, w skutku czego beleczka opada sama na grzbiet przegrody, i tym sposobem podnosi poziom wody w kanale.

368. Strata wysokości. W przystawce walcowej istotny wydatek jest dany przez formułę

$$Q = 0{,}82\, A\sqrt{2gh} = \mu A\sqrt{2gh},$$

w której prędkość wyraża się przez

$$V = \mu\sqrt{2gh} = \sqrt{2g.\mu^2 h}.$$

Ostatni wynik pokazuje że prędkość V jest prędkością z jakąby ciecz wypływała przez otwór wyrobiony w cienkiej ścianie, gdyby wysokość powierzchni wolnej ponad środkiem ciężkości tego otworu była $\mu^2 h$. W rzeczywistości ta wysokość jest h; więc skutkiem przystawki walcowej nastaje strata wysokości poziomu cieczy, równa $h - \mu^2 h = (1 - \overline{0{,}82}^2)h = \frac{1}{3}h$ prawie. Zatem, aby otrzymać na skrajnosci przystawki walcowej prędkość V, trzeba mieć prawie półtora razy wysokość h która sprawia tę prędkość w otworze cienkiej ściany.

Mimo tego, wydatek powiększa się w stosunku 0,82 do 0,62. Różnica $h - \mu^2 h = \frac{V^2}{2g}\left(\frac{1}{\mu^2} - 1\right)$ nazywa się *stratą obciążenia* pochodzącą z przystawki walcowej.

369. Przystawka stożkowa rozszerzająca się. Oznaczmy przez A, V, p powierzchnię, prędkość i parcie, względne do otworu wejścia przystawki stożkowej zozszerzającej się ku wylotowi; przez A′ i V′, powierzchnię i prędkość na jakiemkolwiek jej przecięciu, a przez p_0 parcie atmosferyczne. Ponieważ z przyczyny ciągłości kształtu przystawki nie ma straty siły

żywej, stosując twierdzenie *Bernullego* i zaniedbując V_0, mamy

$$\frac{V'^2}{2g}+\frac{p_0}{\varpi}=\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\varpi}=h+\frac{p_0}{\varpi};$$

zkąd

$$\frac{V'^2}{2g}=h.$$

Z drugiego i ostatniego równania, uważając że $\frac{V}{V'}=\frac{A'}{A}$, wywodzimy

$$\frac{A'^2}{A^2}=1+\frac{p_0}{\varpi h}-\frac{p}{\varpi h} \quad \text{albo} \quad \frac{p}{\varpi h}=1+\frac{p_0}{\varpi h}-\frac{A'^2}{A^2}.$$

Owoż, żeby ruch cieczy odbywał się sposobem ciągłym, jakośmy przypuścili, powinno parcie p być dodatne; co wymaga następującego warunku

$$\frac{A'}{A}<\sqrt{1+\frac{p_0}{\varpi h}}.$$

Jeśli tej nierówności nie staje się zadość, ciecz nie będzie wypływała pełnym otworem przystawki, wewnątrz której może się tworzyć ścieśnienie żyły takie jakie ma miejsce w przystawce walcowej. Pojmuje się łatwo że w przystawce stożkowej jest zawsze strata obciążenia, tem znaczniejsza im różnica prędkości przy wejściu i przy wyjściu tej podstawki jest większa.

W przystawce *stożkowej zwężającej się* ku wylotowi zdarza się podwójne zjawisko. Jest zarazem zmniejszenie prędkości pochodzące ze wzdęcia żyły, i ścieśnienie zewnętrzne wynikające ze zbieżności strug płynnych. Zatem, spółczynnik wydatku, przedstawiający te dwa jednoczesne działania, jest wieloczynem dwóch spółczynników odpowiedających każdy jednemu z nich

uważanemu osobno. Będzie więc

$$Q = m\mu A\sqrt{2gh}.$$

Ten wydatek jest największy możebny gdy kąt stożka ma 12°,4. Wtedy jest

$$Q = 0{,}942A\sqrt{2gh},$$

a prędkość wypływu ma wartość

$$V = 0{,}955\sqrt{2gh}.$$

Używają do *sikawek ogniowych* przystawek stożkowych zwężających się, z kątem 12°,4 przy wierzchołku stożka, przydłużając je przystawkami walcowemi i zakończając przystawką stożkową lekko się rozszerzającą.

Gdyby nie było oporu powietrza, wysokość zwyczajnych *wytrysków* byłaby równa wysokości poziomu wody w zbiorniku. Tę wysokość zmniejszają jeszcze opadające krople, mimo rozszerzania się kolumny przy jej wierzchołku. Dla wielkich wytrysków otwór w cienkiej ścianie jest najkorzystniejszy, bo daje największą wysokość możebną, a do tego żyłę gładką i przezroczystą.

370. Stawidła. W upustach stawów, w śluzach kanałów, i przy pospolitych kołach wodnych otwory któremi płynie woda zamykają się stawidłami pionowemi; przy kołach hydraulicznych, stawidła są zwykle pochylone na wstecz prądu, aby ile można były najbliżej koła; tym sposobem massa płynna, wybiegająca z pod stawidła, gdy je podniesiono, ulega małemu tylko ścieśnieniu i z całym swoim popędem działa na korczówki koła.

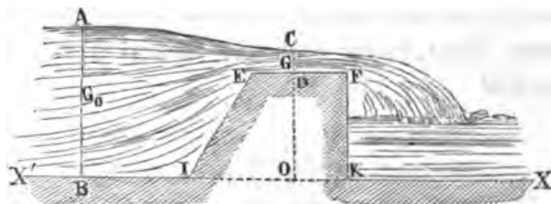
Obliczają wydatek za pomocą formuły zwyczajnej.

$$Q = mA\sqrt{2gh},$$

biorąc spółczynnik ścieśnienia dla stawideł pionowych począwszy od 0,60, 0,63, aż do 0,70; dla stawideł pochyłych z nachyleniem 60°, $m = 0,75$; z nachyleniem 45°, $m = 0,80$. Dajemy te liczby jedynie dlatego żeby pokazać jaka panuje niepewność tam gdzie nie ma ustalonej teoryi, i tylko samo doświadczenie rozstrzyga.

371. Przewał. Przegroda zbudowana w kanale dla wzniesienia jego poziomu, przez którą się przelewa woda, stanowi to, co nazywają przewałem. Część wierzchnia przewału, zawsze pozioma, jest jego *progiem*.

Doświadczenie pokazuje że, nim woda przejdzie próg EF przewału, jej poziom znacznie się zniża, i cząstki płynne opisują różne krzywe z rozmaitemi prędkościami.



Niech będą AB i CD przecięcia kanału i przewału normalne do prądu, G_0 i G środki ciężkości powierzchni tych dwóch przecięć, ζ różnica poziomu punktów A i C. Ponieważ w kanale ruch jest ustawiczny, twierdzenie Dª *Bernulli* stosuje się od przecięcia AB aż do CD; biorąc więc płaszczyznę poziomą BO dna kanału za płaszczyznę porównania, mamy

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{\varpi.CG}{\varpi} + OG = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{\varpi.AG_0}{\varpi} + BG_0,$$

albo

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = AB - CO = \zeta;$$

zkąd

(8) $$V = \sqrt{2g\zeta + V_0^2}.$$

Jeśli oznaczymy przez H wzniesienie punktu A nad poziomem progu EF i przez l szerokość tego progu, powierzchnia przecięcia przewału będzie $l(H - \zeta)$, i wydatek wyrazi się przez

(9) $$Q = l(H - \zeta)\sqrt{2g\zeta + V_0^2}.$$

Ale zagadnienie zostaje nierozwiązalne, dopóki nie będzie wiadoma ustawa która wiąże ilości ζ i H. Gdyby przypuszczono, czemu zaprzeczyć można, że naturalne zjawiska odpowiedają zawsze warunkom *maximum* albo *minimum*, zagadnienie byłoby wyznaczone. Jakoż, biorąc pochodnę funkcyi Q względem ζ, mamy wartość

$$\zeta = \frac{H}{3} - \frac{V_0^2}{3g}$$

która czyni Q *maximum*.

Zatem

$$Q = \frac{2}{3}l\left(H + \frac{V_0^2}{2g}\right)\sqrt{\frac{2}{3}\left(gH + \frac{V_0^2}{2g}\right)},$$

albo, nazywając h_0 wysokość należną prędkości V_0,

(10) $$Q = \frac{2}{3}l(H + h_0)\sqrt{\frac{2}{3}(gH + h_0)}.$$

Teorya wypływu przez przewały, jako przez wielkie otwory, nie jest jeszcze zupełnie ustalona, i wszystko się opiera na mniej więcej zadowolających doświadczeniach. Dlatego ostatnią formułę zastępują zwykle formułą praktyczną

$$(11) \qquad Q = mlH\sqrt{2gH},$$

w której spółczynnik wydatku m zmienia się z wysokością H, a szczególniej z kształtem przewału. Ogólnie za średnią wartość można wziąć $m = 0{,}42$.

372 Ruch ustawiczny cieczy w rurach. Aż dotąd nie zważaliśmy na tarcie w ruchu cieczy, a jednak wyniki do których doszliśmy zgadzają się dość dobrze z doświadczeniem. Pochodzi to ztąd że, w przypadkach wypływu cieczy któreśmy wyłożyli, prędkości cząstek płynnych są bardzo małe w ogóle massy, i dopiero w pobliżu otworu znacznie się powiększają; tak że tarcie, które się rozwija między temi cząstkami i wzmaga z ich prędkością, zaledwie w bardzo małej tylko części przestrzeni przez ciecz zajętej czuć się daje, i dlatego bardzo małe działanie na wypływ tej cieczy wywierać może. Ale rzeczy mają się inaczej gdy chodzi o bieg wody w wielkiej rozciągłości, jako rzeka, albo o jej bieg w długiej rurze, jako wodociąg; wtedy wpływ tarcia przeważnie się objawia, i już go w obliczaniu sił opornych pomijać nie wolno.

Od dawna już wiedziano że wodociągi tem mniej wydają wody im są dłuższe; co łatwo wytłumaczono tarciem cząstek płynnych ślizgających na ich ścianach, i przyleganiem do tych ścian. Albowiem każdy wie że rury prowadzące wodę nie posiadają doskonałej gładkości, a są wewnątrz najeżone chropowatościami i osadem, które zmniejszają prędkość warstwy płynnej będącej z niemi w zetknięciu, i z czasem mogą nawet jej cały ruch zatrzymać. Nietrudno pojąć że ta warstwa skrajna

mająca ruch opóźniony, z kolei opóźnia, na mocy swojej lepkości, warstwę płynną którą otacza bezpośrednio; i tak następnie aż do warstwy środkowej która posiada największą prędkość. Ale niezaraz uznano że, *gdy woda płynie jednostajnie w jakiemkolwiek łożu, albo w rzece, siła nadająca jej* PRZYSPIESZENIE *jest równa summie oporów pochodzących z lepkości cieczy i z tarcia łoża.* To twierdzenie, które się nam zdaje oczywiste, dopiero na końcu osiemnastego wieku przez *Dubuat'a* odkryte zostało.

Główną przyczyną tarcia ciał bryłowych w zetknięciu jest ich odkształcenie przez wzajemne parcie. Owoż ciecze, będąc prawie zupełnie nieściśliwe, nie ulegają prawie żadnemu odkształceniu; zatem parcie nie może wpływać na ich tarcie. Chociaż doświadczenia niezaprzeczalnej dokładności potwierdziły to rozumowanie, i stanowczo dowiodły że *tarcie w cieczach jest niezależne od parcia;* tę atoli główną ustawę przyjęto z trudnością, dlatego właśnie że jest przeciwna wyobrażeniom o tarciu ciał bryłowych.

Niewątpliwie opór przeciw ruchowi cieczy powiększa się z jego prędkością, ale niewiadomo wedle jakiej ustawy. Trudno przewidzieć tę ustawę, dlatego że nie wiemy jak się zmienia prędkość w strugach płynnych; znamy tylko prędkość średnią, iloraz wydatku przez przecięcie, która nic w tym względzie dać nie może. Prędkość wpływa oczywiście na tarcie części ciekłych w zetknięciu, i na opór jaki przeciwstawi ściana cząsteczkom które się wzdłuż niej poruszają; do wyrażenia tych oporów, w braku teorycznej używają formuły *empirycznej* (wywiedzionej z doświadczenia), którą niżej wskazujemy.

To ustaliwszy, będziemy szukali równania ruchu ustawicznego wody w rurze prostolinijnej której przecięcie prostokątne jest kołowe. Wyobraźmy sobie że rozłożono całą massę płynną na warstwy obrączkowe nieskończenie cienkie, mające tę samą oś co rura, i podzielmy je na krójki nieskończenie małej grubości ds. Przypuszczając że woda płynie pełną rurą, pojmujemy

łatwo tarcie jej cząsteczek o ściany. Z ruchu tych cząsteczek wynikają składowe styczenne oporne, zkąd tarcie. Ściana rury, w długości ds, na przykład, rozwija na warstwę płynną skrajną tarcie które zmniejsza jej prędkość; ruch tej warstwy, tak opóźniony, sprawia na bezpośrednio następującej warstwie obrączkowej podobne tarcie które także jej ruch opóźnia; i tak dalej. Widzimy tym sposobem że woda płynie w rurach nie krójkami mającemi ruch przeniesienia, ale warstwami obrączkowemi, z prędkością rosnącą w miarę oddalenia od ścian rury z przyczyny ich oporu. Ten opór, oczywiście proporcyonalny do powierzchni ściany zmoczonej, to jest do obwodu wewnętrznego ι rury i do grubości ds krójki, jest naturalnie uważany za proporcyonalny do pewnej funkcyi $f(v)$ prędkości średniej, i do ciężaru gatunkowego ϖ cieczy. Można go więc przedstawić przez

$$\varpi\iota f(v)ds.$$

Wedle rozumowań i notacyj n^{ro} 360, nazywając ω podstawę jednej krójki, mamy

$$(a) \qquad \omega v dt = \Omega V dt = \Omega_0 V_0 dt;$$

co daje, dla pracy oporu przez czas dt, wartość

$$\varpi\iota f(v)ds.vdt = \varpi\Omega V dt.\frac{\iota}{\omega}f(v)ds,$$

gdzie $\varpi\Omega Vdt$ oznacza massę płynu który przeszedł przez przecięcie Ω w czasie dt. Jeśli więc nazwiemy l długość rury, cała praca oporu wyrazi się przez całkę

$$\varpi\Omega V dt \int_0^l \frac{\iota}{\omega} f(v)ds.$$

Wprowadzając ze znakiem —, ten wyraz do drugiej strony równania które przedstawia twierdzenie Dª *Bernulli*, otrzymujemy

$$(12)\qquad \frac{V^2-V_0^2}{2g}=\frac{p_0-p}{\varpi}+Z_0-Z-\int_0^l\frac{\chi}{\omega}f(v)ds.$$

To ogólne równanie pokazuje, że w ruchu ustawicznym wody w rurze prostolinijnej symetrycznej, strata obciążenia, pochodząca z tarcia i dana przez całkę

$$(b)\qquad \int_0^l\frac{\chi}{\omega}f(v)ds=\int_0^l\frac{\chi}{\omega}f\left(\frac{\Omega_0V_0}{\omega}\right)ds,$$

zależy tylko od kształtu rury, a raczej od wartości χ i ω wyrażonych w funkcyi długości s.

Przypadek ruchu jednostajnego. Gdy rura jest walcem obrotowym średnicy D, mamy

$$\omega=\Omega=\Omega_0=\frac{1}{4}\pi D^2;$$

zatem, na mocy ustawiczności ruchu, wyrażonej przez równania (*a*), będzie

$$(c)\qquad v=V=V_0 \quad \text{i} \quad \frac{\chi}{\omega}=\frac{4}{D}.$$

Wtedy ruch każdej cząstki płynnej jest jednostajny w całej długości rury. Ale rozmaite cząstki nie posiadają wszystkie tej samej prędkości; te które są blizko ścian rury poruszają się bardzo powoli, odleglejsze coraz prędzej; a warstwy płynne obrączkowe ślizgają jedne na drugich z prędkościami tem mniejszemi im są większe ich promienie.

Wykonywając całkowanie (*b*), które się stało możebnem dla-

tego że prędkość v jest stateczna i daje

$$\int_0^{l}\frac{\iota}{\omega}f(v)ds=\frac{\iota l}{\omega}f(v),$$

a potem podstawiając w formule (12) wartości wyznaczone przez równania (c), znajdujemy

$$0=\frac{p_0-p}{\varpi}+Z_0-Z-\frac{\iota l}{\Omega}f(V),$$

albo

$$\frac{p_0}{\varpi}+Z_0-\frac{p}{\varpi}-Z=\frac{4l}{D}f(V). \tag{13}$$

Pierwsza strona wyraża różnicę dwóch poziomów piezometrycznych odpowiedających środkom ciężkości przecięć Ω_0 i Ω, a druga jest proporcyonalna do tarcia; to więc równanie dowodzi że obciążenie, któreby nadawało przyspieszenie ruchowi płynu zawartego między dwoma przecięciami rury walcowej, jest całkiem zniszczone skutkiem tarcia.

Jeśli nazwiemy I stosunek straty obciążenia do długości l odcinka rury, to jest jeśli uczynimy

$$\frac{4}{D}f(V)=I, \qquad \text{zkąd} \qquad f(V)=\frac{1}{4}DI,$$

I będzie wyrażało stratę obciążenia na jedność długości rury.

Stawiając się w tym szczególnym przypadku, wyznaczono przez doświadczenia kształt funkcyi $f(V)$, i po mnogich sprawdzaniach przyjęto formułę empiryczną

$$f(V)=aV+bV^2=\frac{1}{4}DI, \tag{14}$$

w której a i b są spółczynnikami liczebnemi, różnie przez różnych wyrachowanemi.

Nazywając R promień rury, *Henryk Darcy* znalazł następujące wartości tych spółczynników:

$$\left.\begin{aligned} a &= 0{,}000\,032 + \frac{0{,}000\,000\,003\,76}{R^2} \\ b &= 0{,}000\,443 + \frac{0{,}000\,006\,2}{R} \end{aligned}\right\} \text{dla rur pokrytych wewnątrz osadem;}$$

$$\left.\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= 0{,}000\,507 + \frac{0{,}000\,006\,47}{R} \end{aligned}\right\} \text{dla rur służących już przez pewien czas.}$$

Dla rur nowych z żelaza lanego trzeba zmniejszyć o połowę spółczynniki a i b.

Ale takie wszystkie wartości nie mają nic stanowczego; przytoczyliśmy je dlatego tylko aby uzupełnić formułę empiryczną obecnie używaną.

373. Rzecz o wodociągach jest jedną z bardzo ważnych w życiu zbiorowem ludzi, a teorya ruchu wody nie jest jeszcze ustalona niezaprzeczalnie; dlatego nieźle będzie, dla sprawdzenia, znaleźć innym sposobem równanie ruchu jednostajnego wody w rurze walcowej kołowej. Codzienne doświadczenie uczy że ten ruch jednostajny wody nastaje zawsze po pewnym czasie, jakakolwiek jest spadzistość łoża albo rury; co dowodzi istnienia oporu stycznego, czyli tarcia które niszczy składową poruszającą ciężkości. Ale ciężkość rośnie ze spadzistością; musi więc tarcie zwiększać się z prędkością, aby czynić równowagę sile poruszającej rosnącej. Te uwagi nastręczają łatwy sposób otrzymania wprost równania (13).

Jakoż, niech będzie rura walcowa kołowa z nachyleniem α na poziom, w której woda płynie ustawicznie i jednostajnie. Ponieważ różne cząsteczki płynne są ożywione ruchami jedno-

stajnemi, siły działające na każdą z nich powinny sobie czynić równowagę. Zatem wszystkie siły przyłożone do massy płynnej, zawartej między dwoma przecięciami poprzecznemi rury $AB = \Omega_0$ i $CD = \Omega$, wziętemi na odległość l, muszą być w równowadze. Ztąd wynika że summa rzutów tych sił na osi rury powinna być zero. Owoż, woda płynąca pełną rurą jest poddana : 1° parciu $p_0\Omega_0$, które działa na przecięciu AB w kierunku ruchu; 2° parciu $p\Omega$, które działa na przecięciu CD w stronę przeciwną ruchu; 3° swemu własnemu ciężarowi wyrażonemu przez $\varpi\Omega l$, którego rzut na osi rury jest równy $\varpi\Omega \,\mathrm{wst}\alpha = \varpi\Omega(Z_0 - Z)$; 4° tarciu z natężeniem $\varpi \iota l f(V)$ wyznaczonem powyżej, które działa w stronę przeciwną ruchu. Mamy więc równanie

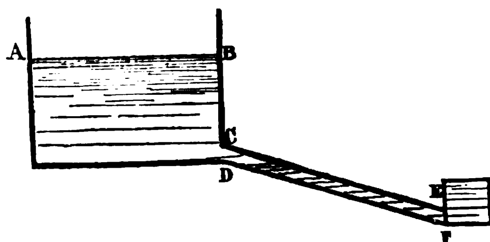
$$p_0\Omega_0 - p\Omega + \varpi\Omega(Z_0 - Z) - \varpi \iota l f(V) = 0$$

albo

$$\frac{p_0}{\varpi} + Z_0 - \frac{p}{\varpi} - Z = \frac{4l}{D} f(V).$$

Wynik zgodny z otrzymanym poprzednio.

374. Wypływ wody długą rurą. Niech będzie rezerwoar ABD z którego woda, mająca poziom stateczny AB, jest prowadzona długą rurą walcową CEFD średnicy D do fontanny publicz-



nej albo do innego rezerwoaru. Chcąc wyznaczyć prędkość wypływu przez otwór końcowy EF, możemy uważać rurę CEFD

jako przystawkę walcową; ale, żeby woda płynęła pełną rurą bez żadnego ścieśnienia żyły, przypuszczamy że otwór wejścia CD jest rozszerzony na wewnątrz rezerwoaru ABD, i ma właśnie kształt ścieśnionej żyły. Pod temi warunkami twierdzenie D[a] *Bernulli*, zmodyfikowane wyrazem oznaczającym tarcie, stosuje się do ruchu ustawicznego którym się zajmujemy, i daje

$$\frac{V^2 - V_0^2}{2g} = \frac{p_0 - p}{\varpi} + Z_0 - Z - \frac{\iota l}{\omega} f(V);$$

gdzie l znaczy długość CE rury, $Z_0 - Z$ wzniesienie poziomu AB nad środkiem ciężkości otworu wypływu, i $\frac{\iota}{\omega} = \frac{4}{D}$. Owoż, prędkość V_0 przy poziomie statecznym AB, jako bardzo mała, może być zaniedbana; parcie atmosferyczne p_0 na powierzchni wolnej AB jest prawie to samo co parcie p na przecięciu skrajnem EF rury; nakoniec $f(V) = aV + bV^2$; jeśli więc, nazywając h wysokość poziomu AB nad środkiem ciężkości otworu EF, uczynimy $Z_0 - Z = h$, będziemy mieli równanie

$$(a) \qquad \frac{V^2}{2g} = h - \frac{4l}{D}(aV + bV^2),$$

które wyznacza prędkość wypływu wody przez otwór EF będący pod parciem samej tylko atmosfery. Doświadczenie dowodzi że wyraz $\frac{V^2}{2g}$ jest bardzo mały w porównaniu z wyrazem $\frac{4l}{D}(aV + bV^2)$; zaniedbując go, otrzymujemy, z dostatecznem przybliżeniem, formułę praktyczną

$$(b) \qquad aV + bV^2 = \frac{Dh}{4l}.$$

$\frac{h}{l}$ wyraża spadzistość rury na jedność długości.

Wydatek oblicza się przez formułę

$$c) \qquad Q = \frac{1}{4}\pi D^2 V,$$

w której zą V trzeba podstawić wartość wyciągniętą z równania (*a*) albo (*b*).

Te równania rozwiązują zupełnie zagadnienie: Mając dane dwie z czterech ilości $\frac{h}{l}$, D, Q, V, znaleźć dwie pozostałe. Gdy są dane spadzistość $\frac{h}{l}$ i wydatek Q, aby wyznaczyć średnicę D rury trzeba rozwiązać równanie stopnia 5go

$$\frac{h}{l} D^5 - \frac{16aQ}{\pi} D^2 - \frac{64bQ}{\pi^2} = 0.$$

Ale do tego ułożono tablice które dają rozwiązania zdarzających się najczęściej przypadków.

375. O BIEGU WODY W KANAŁACH ODKRYTYCH I RZEKACH. Żeby woda mogła płynąć w kanale odkrytym albo w rzece, musi koniecznie istnieć spadzistość powierzchni; warunek niezbędny, który odróżnia ten przypadek od wyłożonego poprzednio. Ruch zmienny wody w rzekach, wyjąwszy nawet podskoki, wiry i fale, przedstawia jedno z najzawilszych zagadnień; bo teorya tego ruchu jest bardzo trudna do znalezienia przez doświadczenie, a przez rachunek zaledwie w szczególnych przypuszczeniach dać ją probowano. Dlatego poprzestaniemy w Mechanice rozumowej na kilku tylko głównych własnościach rzeczonego ruchu.

Ruch jednostajny wody w kanałach odkrytych i w rzekach nie może oczywiście mieć miejsca, jeśli przecięcie normalne do prądu jest zmienne, albo gdy się zmienia spadzistość łoża. Strugi płynne mają w różnych punktach swojego biegu bardzo zmienne prędkości w rzekach, począwszy od źródła aż do ujścia; a jednak ruch jest ustawiczny, jeśli ilość wody dostarczana przez

źródła zostaje stateczna. Gdy rzeka wzbiera, jej ruch ustawiczny przestaje istnieć, aż dopóki wysokość wody nie dosięgnie stopnia który odpowieda wydatkowi obecnego napływu; wtedy rzeka bierze nowy stan ustawiczności, a potem go traci gdy przyczyny które sprawiły wezbranie działać przestały.

Jeśli przecięcie prostokątne kanału albo rzeki i nachylenie ich łoża są stateczne, ruch ustawiczny wody jest jednostajny. W tym przypadku, rozumując jako w n° 373, i oznaczając przez ε zmoczony obwód przecięcia kanału albo rzeki, Ω powierzchnię tego przecięcia, znajdujemy równanie ruchu

$$\frac{\varepsilon l}{\Omega} f(V) = \frac{p_0 - p}{\varpi} + Z_0 - Z$$

albo

$$aV + bV^2 = \frac{I\Omega}{\varepsilon}. \qquad (15)$$

Stosunek I straty obciążenia na jedność długości wyraża tu spadzistość rzeki. Niektórzy nazywają stosunek $\frac{\Omega}{\varepsilon}$ niewłaściwie *promieniem średnim*, i oznaczają go przez R. Żeby się jednak nie sprzeciwiać zwyczajowi użyjemy także tego znaczenia.

Gdy prędkość V jest dostatecznie wielka, można poprzestać na jednym tylko wyrazie bV^2 funkcyi $f(V)$, i czyniąc $\frac{\Omega}{\varepsilon} = R$ napisać poprostu

$$bV^2 = RI.$$

W tem równaniu spółczynnikowi b dają wartość średnią 0,0004; zkąd wynika

$$V = 0{,}50\sqrt{RI}, \qquad (16)$$

formuła używana przez inżynierów włoskich.

Eytelwein podaje

$$V = 0{,}52\sqrt{RI}.$$

376. PRĘDKOŚCI WEWNĄTRZ WODY BIEŻĄCEJ. Zastanawiając się nad ruchem wody w kanałach odkrytych, a mianowicie w rzekach, spostrzeżono że, na tem samem przecięciu normalnem do prądu istnieją trzy różne prędkości: jedna największa U tuż pod powierzchnią rzeki, druga najmniejsza W na jej dnie, a trzecia między niemi prędkość średnia V, która służy do wyznaczenia wydatku odpowiedającego przecięciu. Ustawa wiążąca te trzy prędkości nie jest jeszcze ściśle określona; znaleziono albowiem

$$V = \frac{2U + W}{3} \quad \text{i także} \quad V = \frac{3U + 2W}{5}.$$

Do wyrażenia prędkości średniej V za pomocą samej prędkości U na powierzchni, używają formuły praktycznej podane przez P. *Bazin*,

$$(17) \qquad U - V = 14\sqrt{RI},$$

która się dość dobrze zgadza z doświadczeniem.

Są którzy utrzymują że prędkość największa jest na powierzchni prądu, i strugę ożywioną tą prędkością *maxima* na powierzchni nazywają *osią hydrauliczną prądu.*

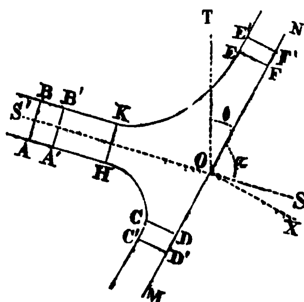
Liczne poszukiwania, uczynione na wielkiej rzece amerykańskiej *Missisipi*, i także na *Renie*, zdają się dowodzić że: *Na jednej pionowej, stosunek prędkości średniej do prędkości na połowie głębokości jest niezależny od szerokości i głębokości prądu, i prawie niezależny od jego prędkości.* Ta ważna własność może służyć do łatwego mierzenia średniej prędkości prądu. Nako-

niec, świeże doświadczenia inżyniera angielskiego Revy, wykonane na rzekach *Parana, Uruguay* i w nizinach *Plata*, pokazują że : *Prędkość w małej odległości od powierzchni, jest w stosunku prawie statecznym z głębokością wody.*

WZAJEMNE PARCIA WODY I PŁASCZYZNY W ICH RUCHU WZGLĘDNYM.

377. Wiadomo że parcia wywarte przez płyn na różne punkta powierzchni ciała w nim zanurzonego nie są takie w ruchu jakieby były w równowadze. Gdy ciało bryłowe porusza się w jakimkolwiek płynie w spoczynku albo w ruchu, to doznaje od niego parcia które zależy od prędkości ruchu względnego, od kształtu ciała i od gęstości płynu; ale dotąd robione doświadczenia nie dały jeszcze nawet empirycznych ustaw, dość ogólnych aby do nich rachunek zastosować można było. Znane są jednak niektóre wyniki, dotyczące oporu cieczy przeciw powierzchniom płaskim w ruchu przeniesienia; o nich więc tylko parę słów powiemy.

Parcie żyły wodnej na płaszczyznę. Niech będzie żyła wodna ABHK, która spotyka i uderza płaszczyznę stałą MN pod kątem



jakimkolwiek. W założeniu że ruch wody jest ustawiczny, przypuszczamy płaszczyznę MN dostatecznie rozległą, aby strugi

ciekłe które zboczyły ze swoich dróg jednostajnych, z przyczyny jej oporu, musiały się poruszać równolegle do niej z prędkościami zkądinąd jakiemikolwiek. Uważajmy teraz część wody ABEFDC, zawartą między płasczyzną AB prostopadłą do żyły i powierzchnią walcową CDEF, poza którą woda płynie równolegle do płasczyzny MN; oznaczmy przez α i θ kąty jakie płasczyzna ON czyni z osią OS żyły i z pionową OT; przez v prędkość spólną i stateczną cząstek płynnych które przechodzą przez płasczyznę AB. Po czasie dt, te cząstki będą się znajdowały na płasczyznie sąsiedniej A′B′ której odległość od AB będzie vdt. W tej samej chwili cząstki płynne które zajmowały powierzchnię walcową CDEF będą na powierzchni sąsiedniej C′D′E′F′. Tym sposobem cały układ punktów materyalnych zawartych w objętości ABEFDC, na początku czasu dt, zajmie objętość A′B′E′F′D′C′ na końcu tego czasu, i wszystkie punkta które w ostatniej chwili czasu dt będą się mieściły w części spólnej A′B′EFDC dwóch objętości będą miały, na mocy ustawiczności ruchu, te same massy i te same prędkości jak cząstki których zajmują miejsca.

To ustaliwszy, zastosujemy zasadę ilości ruchu rzutowanych, biorąc za oś rzutów prostę OX prostopadłą do płasczyzny MN.

Owoż, z przyczyny massy ciekłej spólnej (A′B′EFDC) przyrost, przez czas dt, ilości ruchu massy uważanej (ABEFDC) jest różnicą ilości ruchu mass (CDEFC′D′E′F′) i (ABA′B′); ale prędkości cząstek stanowiących pierwszą z tych dwóch mass, będąc równoległe do płasczyzny MN, dają zero na summę rzutów ich ilości ruchu. Więc przyrost summy rzutów, na osi OX, ilości ruchu cząstek całej massy ciekłej przywodzi się do rzutu ilości ruchu massy (ABA′B′), i wyraża się przez

$$-\frac{\varpi}{g}\,\Omega v dt . v . \text{wst}\,\alpha,$$

gdzie ϖ znaczy ciężar gatunkowy cieczy, i Ω powierzchnię przecięcia prostokątnego AB żyły.

Znając summę rzutów ilości ruchu cząstek ciekłych, znajdźmy summę rzutów popędów sił zewnętrznych które działają na cały układ. Te siły są: 1° oddziaływanie płaszczyzny MN, równe i przeciwne parciu żyły. Rzeczone oddziaływanie rozkłada się na normalne N i na styczenne; ale rzut ostatniego na osi OX jest zero. 2° Ciężar massy ciekłej (ABEFDC), jego rzut na osi OX równa się P wstθ. 3° Parcia atmosferyczne, które działając na całą żyłę dają zero na summę algebryczną rzutów.

Mamy więc, na mocy zasady ilości ruchu rzutowanych na osi,

$$-\frac{\varpi}{g}\Omega v^2 dt \,\text{wst}\,\alpha = -\text{N}dt + \text{P}dt\,\text{wst}\,\theta,$$

zkąd

$$(1) \qquad \text{N} = \frac{\varpi}{g}\Omega v^2 \text{wst}\,\alpha + \text{P}\,\text{wst}\,\theta.$$

Pierwsza część parcia N, równa $\varpi.\Omega\,\text{wst}\,\alpha.\frac{2v^2}{2g}$, wyraża ciężar walca cieczy którego podstawą jest rzut przecięcia prostego żyły na płaszczyznie partej, a wysokością podwójna wysokość należna prędkości prądu; druga część P wstθ przedstawia parcie któreby układ (ABEFDC) punktów ciekłych wywierał na płaszczyznę MN, gdyby na niej ślizgał całą sztuką, jako ciało bryłowe.

Gdy płaszczyzna MN jest pionowa, wtedy $\theta = 0$ i parcie N ma wartość

$$\text{N} = \frac{\varpi}{g}\Omega v^2 \text{wst}\,\alpha;$$

a gdy do tego jeszcze kierunek żyły jest poziomy, wtenczas $\alpha = \frac{\pi}{2}$, i mamy poprostu

$$(2) \qquad \text{N} = \frac{\varpi}{g}\Omega v^2.$$

Jeśli przeciwnie płasczyzna parta jest pozioma a żyła pionowa, będzie $\alpha = \frac{\pi}{2}$ i $\theta = \frac{\pi}{2}$ albo $\theta = -\frac{\pi}{2}$; wtedy

$$N = \frac{\varpi}{g}\Omega v^2 + P \quad \text{albo} \quad N = \frac{\varpi}{g}\Omega v^2 - P,$$

według jak żyła wytryska z góry na dół albo z dołu do góry.

Ten wynik można łatwo sprawdzić, czyniąc równowagę parciu żyły za pomocą szali.

Nakoniec, jeśli żyła jest równoległa do płasczyzny MN pochyłej, będzie

$$N = P\text{wst}\theta,$$

co naprzód wiadome.

Gdy płasczyzna MN nie jest dość rozległa, prędkości cząstek płynnych przy jej brzegach będą czyniły kąty ostre z osią OX; wtedy parcie N będzie mniejsze, bo summa rzutów ilości ruchu będzie ostatecznie mniejsza od poprzednio otrzymanej. Z przyczyny przeciwnej, gdyby za pomocą listew, przyprawionych do brzegów płasczyzny partej, nadano prądowi który ją opuszcza kierunek czyniący kąt rozwarty z osią OX, powiększonoby parcie N. Łatwo się więc pojmuje dlaczego, w tych samych okolicznościach, parcie na powierzchnię wklęsłą jest większe od parcia na płasczyznę, a zaś parcie na powierzchnię wypukłą od niego mniejsze.

378. Parcie na płasczyznę stałą zanurzoną w prądzie. Gdy płasczyzna, całkiem zanurzona w prądzie, zostaje nieruchoma w położeniu normalnem do jego kierunku, doświadczenie dowodzi że parcie prądu na tę płasczyznę wyraża się formułą

$$N = \frac{k\varpi}{g} A v^2, \tag{3}$$

w której v oznacza prędkość prądu, A powierzchnię płasczyzny

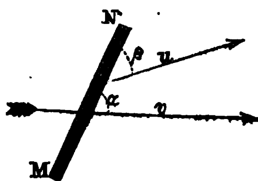
partej, k spółczynnik zależący od jej natury i kształtu. To parcie, jako widzimy, jest *proporcyonalne do kwadratu prędkości*, tak jako parcie żyły poziomej która uderza płasczyznę stałą prostopadłą do jej osi.

Jeśli płasczyzna zanurzona, zamiast być w spoczynku, jakośmy przypuścili, przenosi się z prędkością u równoległą do prędkości v prądu, prędkość względna będzie $v-u$; wtedy parcie prądu na płasczyznę ma natężenie

$$N = \frac{k\varpi}{g} A(v-u)^2.$$

Jakoż, nie zmienimy w niczem parcia, jeśli nadamy ruch spólny wszystkim punktom materyalnym układu; możemy więc przywieść płasczyznę do spoczynku, przez co sprowadzimy zadanie do poprzedzającego przypadku. Aby to uskutecznić myślą, dość jest dodać prędkość $-u$ do prędkości każdego punktu materyalnego w ruchu. Tym sposobem znajdujemy się w takim samym przypadku jak gdyby płasczyzna zanurzona w prądzie zostawała w spoczynku, a prąd był ożywiony prędkością $(v-u)$. Co właśnie daje dla parcia N wyrażenie napisane wyżej.

Uważając rzeczy jeszcze ogólniej, przypuśćmy że płasczyzna MN, mająca ruch przeniesienia w wodzie bieżącej, czyni kąt α z kierunkiem prądu i kąt β z kierunkiem swojego ruchu. Chcąc



wtedy wyznaczyć parcie N, trzeba oszacować prędkość wody i płasczyzny partej wedle normalnej do tej płasczyzny; różnica

dwóch składowych normalnych będzie prędkością względną która sprawi parcie wody na płaszczyznę. Te składowe są

$$v \operatorname{wst} \alpha, \qquad u \operatorname{wst} \beta,$$

zkąd prędkość względna $(v \operatorname{wst} \alpha - u \operatorname{wst} \beta)$;
więc parcie

$$(4) \qquad N = \frac{k\varpi}{g} A(v \operatorname{wst} \alpha - u \operatorname{wst} \beta)^2.$$

Ta ogólna formuła, obejmująca przypadki poprzedzające, stosuje się do powietrza, i dowodzi że *parcie płynu jakiegokolwiek na ciało mające w nim ruch przeniesienia jest proporcyonalne do kwadratu prędkości względnej*.

RUCH GAZÓW.

379. Ruch ustawiczny gazu. W tem co powiemy o ruchu ustawicznym gazu, ograniczymy się na przypadku temperatury statecznej, do którego się stosuje ustawa *Mariotta*

$$(1) \qquad p = k\rho.$$

Nie zważając na tarcie, mamy dla płynu jakiegokolwiek formułę (7) stronicy 784,

$$(2) \qquad \frac{dp}{\rho} = dU - \frac{du}{dt}dx - \frac{dv}{dt}dy - \frac{dw}{dt}dz - \frac{1}{2}d.V^2,$$

w której

$$dU = -gdz$$

$$\frac{du}{dt} = 0, \qquad \frac{dv}{dt} = 0, \qquad \frac{dw}{dt} = 0,$$

ponieważ przypuszczamy że z sił zewnętrznych sama jedna ciężkość działa na gaz w jego ruchu ustawicznym. Owoż, podstawiając te wartości w równaniu (2), i rugując ρ za pomocą względności (1), otrzymujemy równanie całkowalne

$$\frac{kdp}{p} = -gdz - \frac{1}{2} d.V^2;$$

jeśli więc wykonamy całkowanie oznaczając, w stanie początkowym, przez p_0 parcie na jedność powierzchni, przez v_0 prędkość nieskończenie małej cząstki gazu, i przez z_0 wysokość jej poziomu, znajdziemy

$$(3) \qquad \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{k}{g} L\frac{p_0}{p} + z - z_0,$$

Takie byłoby równanie ruchu ustawicznego, gazu mającego temperaturę stateczną, gdyby nie istniało tarcie między cząstkami płynnemi, ani tarcie o ściany powłoki w której ten gaz się porusza. W rzeczywistości równanie (3) przedstawia tylko ruch przybliżony.

380. Wypływ ustawiczny gazu przez otwór w cienkiej ścianie. Szukajmy prędkości z jaką wypływa gaz przez otwór wyrobiony w cienkiej ścianie gazometru, albo przez krótką przystawkę walcową przyprawioną do tego otworu, i niech będą teraz:

p_0 parcie stateczne jakiego doznaje cząstka płynna od gazu wewnątrz gazometru, w pewnej odległości od otworu;

p parcie jakie ta cząstka wytrzymuje gdy przepływa przez płaszczyznę wyjścia;

v_0 i v prędkości tej samej cząstki w obydwóch jej położeniach;

ω_0 powierzchnia poziomu gazu w gazometrze, ω powierzchnia otworu;

nakoniec $z_0 - z = h$.

Mamy najpierwej równanie (3)

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{k}{g} L \frac{p_0}{p} + h.$$

Owoż, w ruchu ustawicznym gazu temperatury statecznej, ciężary $\frac{p}{k}\omega v$ i $\frac{p_0}{k}\omega_0 v_0$ mass gazistych, przechodzących w jedności czasu przez otwór i przez przecięcie poziome gazometru, są równe; co daje

$$p_0\omega_0 v_0 = p\omega v, \qquad \text{zkąd} \qquad v_0 = \frac{p\omega v}{p_0 v_0};$$

więc, podstawiając tę wartość w ostatniem równaniu, otrzymujemy prędkość wypływu

$$(4) \qquad v = \sqrt{\frac{2gh + 2kL\frac{p_0}{p}}{1 - \frac{p^2\omega^2}{p_0^2\omega_0^2}}}.$$

Ilość pod pierwiastnikiem jest dodatna; bo parcie p_0 jest większe od p, bez czego wypływ gazu nie miałby miejsca; powierzchnia otworu ω_0 jest większa od ω.

Formuła (4) daje się uprościć zachowując dostateczne przybliżenie. Jakoż, wysokość h jest zwykle nieznaczna, i ułamek $\frac{p^2\omega^2}{p_0^2\omega_0^2}$ bardzo mały; można więc zaniedbać te dwie ilości, i wziąć

$$v = \sqrt{2kL\frac{p_0}{p}}.$$

A jeśli jeszcze p_0 niewiele się różni od p, wtedy, ponieważ $\frac{p_0}{p} = 1 + \frac{p_0 - p}{p}$ można rozwinąć logarytm neperyański $L\left(1 + \frac{p_0}{p}\right)$ na szereg, i, poprzestając na jego pierwszym wyrazie, wziąć poprostu

$$(5) \qquad v = \sqrt{\frac{2k}{p}(p_0 - p)}.$$

Nakoniec, wydatek gazu jest dany przez formułę

$$(6) \qquad Q = \omega \sqrt{\frac{2gh + 2kL\frac{p_0}{p}}{1 - \frac{p^2\omega^2}{p_0^2\omega_0^2}}},$$

albo przez formułę prostszą przybliżoną

$$Q = \omega \sqrt{\frac{2k}{p}(p_0 - p)}.$$

Ale naprzód wiemy że te formuły nie zgadzają się z doświadczeniem. Chcąc otrzymać rzeczywisty wydatek, trzeba się uciec do spółczynnika liczebnego; napisać

$$Q = \lambda\omega \sqrt{\frac{2gh + 2kL\frac{p_0}{p}}{1 - \frac{p^2\omega^2}{p_0^2\omega_0^2}}},$$

albo poprostu

$$(7) \qquad Q = \lambda\omega \sqrt{\frac{2k}{p}(p_0 - p)},$$

i wyznaczyć praktycznie wartość dla λ.

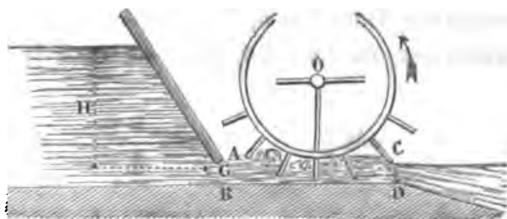
Formuła (7) może służyć do mierzenia wydatku gazu wypływającego przez przystawkę walcową albo stożkową.

Wartość spółczynnika λ znaleziona przez Weisbacha jest: λ = 0,58 dla wypływu gazu przez otwór w cienkiej ścianie, a zaś λ = 0,74 dla przystawki walcowej albo stożkowej. Te dwie wartości zdają się zgadzać dość dobrze z doświadczeniem.

Dla ustawicznego ruchu gazu w rurach znaleziono takie samo równanie co w cieczach, równanie (13) stronica 767; ale otrzymano je wedle teoryi opartej na bardzo zaprzeczalnych założeniach, których nie wolno już powtarzać od czasu ustalenia teoryi mechanicznej ciepła. Nie mogąc wykładać tej ostatniej, bo ona nie wchodzi w zakres niniejszego dzieła, a sądząc żeśmy dali już dostateczne wyobrażenie o Hydraulice, kończymy ten przedmiot prostą wzmianką o kołach hydraulicznych i o wiatraku.

381. Koła hydrauliczne. Te machiny wodne, mające za przedmiot zebrać i przesłać działanie wody, dzielą się na dwie klassy: na koła z osią poziomą i koła z osią pionową. Do pierwszej klassy należą *koła podsiębierne*, *koła nadsiębierne* i *koła środbierne;* w drugiej mieszczą się rozmaitego rodzaju tak zwane *turbiny*. Ich teorya jest rzeczą Hydrauliki. Aby tylko pokazać, w zastosowaniu wyłożonych wiadomości, jak się oblicza praca, powiemy kilka słów o kole podsiębiernem.

Koło podsiębierne O, dlatego tak mianowane że odbiera



wodę na najniższe korczówki, które są prostemi łopatkami.

Prąd wody, wypływającej zpod stawidła pochyłego blizko koła, ożywiony prędkością należną wysokości spadku, uderza i prze na łopatki w pogródce, i tym sposobem nadaje ruch kołu. Uważając ten prąd, począwszy od jego wejścia AB w koło aż do wyjścia CD, będziemy szukali pracy na sekundę, wykonanej przez wodę działającą na łopatki. Dla uproszczenia, biorąc ruch wody ustawiczny, przypuścimy że jest poziomy w pogródce ABDC, i nie będziemy zważali na bardzo małe tarcie cząstek płynnych o jej ściany. Przez co ułatwimy zastosowanie zasady ilości ruchu rzutowanych na osi.

Niech będą : b szerokość pogródki, h, h' i H głębokości AB, CD i wysokość spadku wody; v prędkość średnia z jaką woda przybywa do koła, i u prędkość środka zanurzonej łopatki. Z przyczyny ruchu ustawicznego, mamy

$$bhv = bh'u \quad \text{albo} \quad hv = h'u;$$

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Poczem, nazywając P ciężar wydatku na sekundę, widzimy łatwo że przyrost, przez czas dt, ilości ruchu massy płynnej zawartej między AB i CD, jest

$$\frac{\mathrm{P}dt}{g}.u - \frac{\mathrm{P}dt}{g}.v = \frac{\mathrm{P}}{g}(u - v)dt.$$

Siły zewnętrzne, których popędy zrzutujemy na osi poziomej, są : 1° parcie cieczy na AB i CD, które się wyrażają przez

$$\varpi bh.\frac{h}{2} \qquad \varpi bh'.\frac{h'}{2}.$$

Są także parcia wewnątrz massy (ABCD), ale się niszczą nawzajem. 2° Ciężkość i parcie powietrza działają pionowo, zatem

ich rzuty na osi poziomej są zero. 3° Oddziaływania korczówek przeciw wodzie która prze na nie z obydwóch stron; nazywamy N summę algebryczną składowych poziomych tych ostatnich sił. Stosując teraz zasadę ilości ruchu rzutowanych na osi, znajdujemy równanie

$$\frac{P}{g}(u-v)=\frac{1}{2}\varpi b(h^2-h'^2)-N,$$

zkąd

$$N=\frac{P}{g}(v-u)+\frac{1}{2}\varpi bh^2\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right).$$

Siła N jest właśnie wynikową działań wody na korczówki, i może być uważana jako przyłożona do koła w punkcie który posiada prędkość u. Ztąd wynika że praca poruszająca którą woda przesyła kołu w każdej sekundzie jest Nu. Więc, oznaczając jako zwykle przez T_p tę pracę, i uważając że $\varpi bhv=P$, otrzymujemy

$$T_p=\frac{P}{g}(v-u)u+\frac{1}{2}Ph\left(\frac{u}{v}-\frac{v}{u}\right).$$

Jeśli, mając dane v i h, będziemy zmieniali prędkość u koła która zależy od oporu do przezwyciężenia, praca T_p będzie się zmieniała, i dojdzie do wartości maximum gdy wartość dla u zadość uczyni równaniu 3° stopnia (które jest pochodną funkcyi T_p względem u),

$$\frac{1}{g}(v-2u)+\frac{h}{2}\left(\frac{1}{v}+\frac{v}{u^2}\right)=0.$$

Gdyby wolno było nie zważać na różnicę parć w AB i CD,

mianoby poprostu

$$T_p = \frac{P}{g}(v - u)u.$$

Wartość przybliżona mniejsza od poprzedzającej.

Wtedy, ponieważ summa czynników zmiennych jest stateczna, maximum ich wieloczynu odpowieda wartości $u = \frac{v}{2}$; co daje

$$T_p = \frac{P}{g}\frac{v^2}{4} = \frac{1}{2}PH.$$

Ten wynik dowodzi że istotne maximum pracy przesłanej kołu podsiębiernemu nie dosięga nawet połowy pracy PH jaką spadek wody utworzyć może.

Z doświadczeń wprost robionych, w przeszłym wieku, przez *Smeaton'a* i *Bossut'a* wynika że praca użyteczna koła podsiębiernego z łopatkami płaskiemi nie przechodzi 0,35 pracy poruszającej.

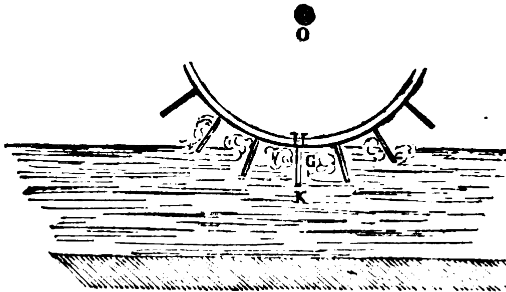
Strata pracy. Strata prawie *dwóch trzecich* pracy poruszającej w kole podsiębiernem z łopatkami płaskiemi pochodzi z uderzeń wody na korczówki. Jakoż, cała siła żywa utworzona spadkiem wody jest $\frac{Pv^2}{g}$, woda wypływająca zpod koła z prędkością u unosi siłę żywą $\frac{Pu^2}{g}$, a przybliżona wartość pracy koła wyraża się przez $\frac{P}{g}(v - u)u$; więc strata pracy pochodząca z uderzenia będzie

$$\frac{P}{2g}v^2 - \frac{P}{2g}u^2 - \frac{P}{g}(v - u)u = \frac{P}{2g}(v - u)^2.$$

Co dowodzi że woda uderzeniem korczówek nietylko nie przyczynia się do ruchu koła, ale jeszcze sprawia stratę pracy równą połowie siły żywej która odpowieda prędkości straconej.

Dawniej sądzono że najgwałtowniejsze uderzenia wody na korczówki wydają największy skutek, i dlatego starano się brać wodę na samym dole spadku gdzie ma największą możebną prędkość. To właśnie błędne wyobrażenie dało początek kołu podsiębiernemu z łopatkami płaskiemi, które dzisiaj tam tylko używane gdzie nie ma potrzeby oszczędzać wody.

382. Koło z łopatkami płaskiemi obracane przez prąd rzeki. Niech będzie A powierzchnia zanurzonej części łopatki, u jej



prędkość, v prędkość prądu. Parcie prądu na łopatkę pionową HK, wyrażone przez $\frac{k\varpi}{g}A(v-u)^2$ (nr 378), stanowi siłę poruszającą, która przyłożona do środka ciężkości G zanurzónej części łopatki HK, zmusza ją do przebieżenia drogi u w jedności czasu. Więc praca poruszająca wody jest

$$T=\frac{k\varpi}{g}A(v-u)^2u.$$

Aby wyznaczyć wartość prędkości u, która sprawia pracę maximum, trzeba zrównać do zera pochodnę funkcyi T, wziętą

względem u; co daje

$$(v-u)(v-3u)=0.$$

Nie można przypuszczać $v-u=0$, boby praca była zero minimum pracy. Trzeba więc uczynić

$$v-3u=0, \qquad \text{zkąd} \qquad u=\frac{v}{3}.$$

Wartość przybliżona jest $u=0{,}33v$; doświadczenie daje $u=0{,}4v$. Różnica pochodzi ztąd żeśmy tylko uważali jedyną łopatkę pionową; gdy w rzeczywistości inne łopatki, zanurzone także w tym samym czasie w prądzie, przyczyniają się do pracy poruszającej.

383. Koło Poncelet'a. Aby należycie ocenić ważność tego koła, powiemy najpierwej ogólnie pod jakiemi warunkami koło hydrauliczne jest uważane za teorycznie doskonałe. Nazwijmy v prędkość z jaką woda uderza korczówkę, w prędkość straconą, u prędkość wody w chwili gdy opuszcza korczówkę, P ciężar tej wody który działa na korczówkę zestępując z wysokości h; nakoniec wysokość H spadku któremu jest należna wysokość v; będzie

$$\int_0^h \mathrm{P}dt=\mathrm{P}h, \quad \text{i} \quad v^2=2g\mathrm{H}.$$

Zatem, na mocy formuły danej na stronicy 590, mamy

$$\mathrm{P}h-\mathrm{T}_0=\frac{\mathrm{P}}{2g}(u^2-2g\mathrm{H})+\frac{\mathrm{P}}{2g}w^2,$$

zkąd

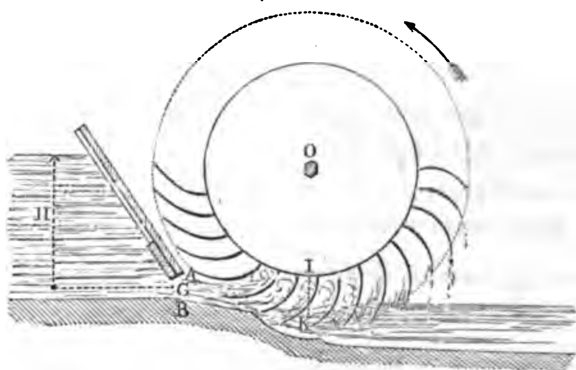
$$\mathrm{T}_0=\mathrm{P}(\mathrm{H}+h)-\frac{\mathrm{P}}{2g}(u^2+w^2).$$

To równanie dowodzi że, dla maximum wartości pracy opornej T_0, trzeba $u = 0$ i $w = 0$. Więc, w kołach wodnych, praca oporna a temsamem *praca użyteczna jest największa możebna, gdy woda wchodzi na koło bez uderzenia i opuszcza je bez prędkości.*

Otóż dwa warunki teorycznej doskonałości kół hydraulicznych, do których dodać koniecznie należy i ten: żeby woda nie była zaburzana podczas działania na koło.

Nietrudno pojąć że koło mające ruch powolny może już częściowo dopełniać tych warunków. Poncelet, usiłując im zadość uczynić, wymyślił koło podsiębierne z korczówkami krzywemi.

Między dwoma równemi wieńcami kołowemi, mającemi od-



ległość cokolwiek większą od otworu AB którym woda wypływa z pod stawidła pochyłego, są osadzone w równych odstępach korczówki krzywe, i przyrządzone tak żeby na nie woda wchodziła styczennie a przeto bez uderzenia. Niech będzie v prędkość wody wypływającej z pod stawidła i należnej spadkowi H, u prędkość punktów okręgu zewnętrznego. Ponieważ prędkość v jest prawie pozioma, woda wchodzi na korczówkę

z prędkością względną $v - u$, wznosi się aż do wysokości $\frac{(v-u)^2}{2g}$, i swoim ciężarem nadaje ruch wirowy kołu; poczem spływa na korczówce, i, dosięgając znowu jej skrajności, bierze na powrót prędkość względną $v - u$ ale już w stronę przeciwną poprzedzającej. Prędkość samoista jaką woda posiada w chwili opuszczenia korczówki jest

$$u - (v - u) = 2u - v.$$

Najkorzystniejsze urządzenie ma miejsce kiedy ta prędkość będzie zero, ponieważ wtedy woda wyczerpie całą swoją siłę poruszającą na kole. Powinno więc być

$$2u - v = 0, \qquad \text{zkąd} \qquad u = \frac{v}{2}.$$

To jest, prędkość koła powinna być połową prędkości wody wychodzącej z pod stawidła.

Znajomość prędkości u koła daje szerokość IK wieńca kołowego. Jakoż, woda wchodzi do korczówki z prędkością względną $v - u = \frac{v}{2}$, i wznosi się do wysokości

$$\text{IK} = \frac{(v-u)^2}{2g} = \frac{v^2}{8g};$$

a że $\qquad v^2 = 2g\text{H}, \qquad$ więc $\qquad \text{IK} = \frac{1}{4}\text{H}.$

Taka musi być przynajmniej szerokość wieńca kołowego żeby woda nie uderzała koła.

Szukajmy teraz pracy poruszającej T_p. Ponieważ woda wchodzi bez uderzenia z prędkością v do korczówki, a opuszcza ją

z prędkością $2u - v$, siła żywa stracona przez jej massę $\frac{P}{g}$, w ruchu tam i nazad, równa się różnicy

$$\frac{P}{g}v^2 - \frac{P}{g}(2u - v)^2 = \frac{4Pu}{g}(v - u).$$

Owoż, połowa tej siły żywej, w założeniu że nie ma tarcia w ruchu ślizgania na korczówce, jest miarą pracy jaką woda przesłała karczówce; mamy więc równanie

$$T_p = \frac{2P}{g}(v - u)u.$$

W tym wieloczynie summa czynników zmiennych jest stateczna, ztąd wnosimy że maximum pracy poruszającej odpowieda wartość $u = \frac{v}{2}$, która wyraża właśnie prędkość z jaką się koło obracać powinno żeby woda opuszczała je bez prędkości. Podstawiając tę wartość, mamy maximum pracy poruszającej

$$T_p = P.\frac{v^2}{2g} = PH.$$

Znalezione maximum pokazuje że, w warunkach założeń jakieśmy zrobili, koło *Poncelet'a* przeprowadza całą poruszającą pracę, jaką tworzy spadek H wody nadający prądowi prędkość v.

Takie są znamienite przymioty koła *Poncelet'a*. Ale te piękne wyniki nie mogą się urzeczywiścić w praktyce; różne okoliczności temu się sprzeciwiają. I tak 1° strumień wody, przypływający z pod stawidła do korczówki, nie może dla swojej grubości wchodzić stycznennie do koła, choćby nawet korczówka była bardzo cienka przy brzegu. 2° Jakakolwiek jest prędkość

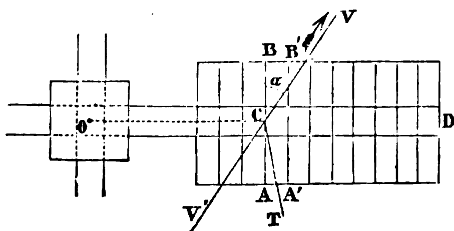
względna $v - u$ przy wyjściu wody z koła, ponieważ ona ma prawie kierunek stycznej na brzegu korczówki, prędkość samoista wyjścia, jako wynikowa prędkości względnej płynu i prędkości styczennej koła, nie może być zero. A wewnątrz koła woda nie może się wznosić i opadać ruchem spólnym swoich cząstek, całą sztuką jako ciało bryłowe; bo cząstki płynne które weszły pierwsze na korczówkę opóźniają się idąc do góry, i utrudzają ruch tych które po nich następują. Zkąd konieczne tarcie którego powyższa teorya nie wprowadza do rachunku. Dla tych naturalnych przeszkód, koło *Poncelet'a,* niezaprzeczalnie najdoskonalsze między kołami podsiębiernemi, nie może uiścić wszystkich spodziewanych skutków. W tem kole praca użyteczna dochodzi do 0,65 pracy poruszającej, przy spadku wody niższym od 2^m.

384. WIATRAK. Przedmiotem tej machiny jest zebrać i przesłać działanie wiatru. W pospolitym wiatraku, a o takim tylko mówić będziemy, oś jest pozioma i umieszczona w kierunku wiatru; koło składa się z czterech wielkich łopat zwanych *skrzydłami*, osadzonych na dwóch średnicach prostokątnych które nazywają *śmigami*. Wskróś śmig przechodzą prostopadle i w równych odstępach poprzecznice czyli szczeble, których skrajności z obydwóch stron wchodzą w cienkie oblaki, zakończające skrzydła w ich długości. Te wszystkie szczeble są pokryte płachtami drewnianemi albo płóciennemi. Tak utworzone skrzydło przedstawia kształt prostokątny z szerokością prawie $\frac{1}{6}$ długości; ale nie jest płaskie; jestto powierzchnia skośna mająca szczeble za linie rodzące. Wiatr dmie w górne skrzydło i swojem parciem nadaje mu ruch obrotowy. Żeby ten ruch mógł się uskutecznić, trzeba oczywiście żeby powierzchnia skrzydła była nachylona do osi, to jest do kierunku wiatru. Albowiem, gdyby ta powierzchnia była normalna do kierunku wiatru, toby się opierała jego działaniu, nie biorąc żadnego ruchu; dlatego że parcie wiatru na

skrzydło nie miałoby składowej styczennej, którąby mogła sprawić jego ruch wirowy około osi. Gdyby przeciwnie linie rodzące powierzchni skrzydła miały kierunek wiatru, wtedy skrzydło nie stawiając żadnego oporu sile wiatru nie odbierałoby od niej popędu do ruchu wirowego. Trzeba więc żeby linie rodzące powierzchni skrzydła odbierały wiatr pod pewnym kątem. Doświadczenie pokazało że ten kąt powiększa się w miarę oddalenia od środka wirowania. Dlatego też dają pierwszemu szczeblowi nachylenie na oś około 60°, a ostatniemu 80°. Inne szczeble mają nachylenia pośrednie, rosnące od pierwszej granicy do drugiej. Co właśnie dowodzi że *powierzchnia skrzydła jest skośna*. Teorya, jako zaraz zobaczymy, potwierdza te budowy.

Długą praktyką, i niezawodnie dopiero po mnogich próbach, potrafiono dać skrzydłom wiatraka kształt jaki im naznacza matematyczna teorya, której zaiste nie można było wzywać pomocy w odległych czasach do jakich sięga początek tych powietrznych młynów. Dzisiaj teorya zupełnie się zgadza z doświadczeniem.

385. Praca wiatru przesłana przez skrzydła. Aby oszacować działanie wiatru na skrzydła i wyrachować ztąd wynikającą pracę poruszającą, będziemy uważali każdy nieskończenie wązki czworobok spaczony ABB'A', zawarty między dwoma po sobie idącemi szczeblami AB, A'B' jako czworobok płaski. Niech



będzie $AB = l$ długość szczebla, i $OC = r$ jego odległość od

środka wirowania O; ldr będzie miarą powierzchni czworoboku ABB'A'. Przez punkt C, środek boku AB, poprowadźmy prostę CV równoległą do osi O koła, i styczną CT do okręgu opisanego przez punkt C. Trzy proste AB, CV, CT są na jednej płasczyznie prostopadłej do śmigi OC. Prosta CV przedstawia kierunek wiatru, a prosta CT kierunek ruchu punktu C podczas wirowania śmigi około osi O. Oznaczmy przez v prędkość wiatru, przez u prędkość punktu C, przez α kąt jaki szczebel AB czyni z kierunkiem CV wiatru. Widzimy dobrze że czworobok ABB'A' porusza się w prądzie wiatru w kierunku CT z prędkością u, a prąd ma kierunek CV z prędkością v. Składowe tych dwóch prędkości, normalne do ABB'A', są

$$u \operatorname{dos}\alpha \quad \text{i} \quad v \operatorname{wst}\alpha.$$

Owoż, na mocy formuły (4) numeru 378, która daje parcie płynu na płasczyznę w nim się poruszającą, mamy natężenie

$$\frac{k\varpi}{g} ldr(v \operatorname{wst}\alpha - u \operatorname{dos}\alpha)^2$$

parcia powietrza, w kierunku normalnym do powierzchni nieskończenie wązkiego czworoboku ABB'A'. To parcie rozkłada się na dwa inne, jedno wedle CV drugie wedle CT. Pierwsze jako równoległe do osi O koła nie przyczynia się do ruchu skrzydła; drugie działające w kierunku jaki cząstka powierzchna ABB'A' wziąć może, przedstawia siłę która jej właśnie ruch wirowy nadaje. Natężenie tej siły jest

$$\frac{k\varpi}{g} ldr(v \operatorname{wst}\alpha - u \operatorname{dos}\alpha)^2 \operatorname{dos}\alpha;$$

zatem jej praca w jedności czasu równa się

$$\frac{k\varpi}{g} ldr(v \operatorname{wst}\alpha - u \operatorname{dos}\alpha)^2 u \operatorname{dos}\alpha.$$

A jeśli nazwiemy ω prędkość wirowania śmigi, będzie $u = r\omega$, i praca poruszająca stanie się

$$\frac{k\varpi}{g}\, l(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2\mathrm{dos}\,\alpha.\omega rdr.$$

Każda z nieskończenie wązkich cząstek, składających powierzchnię skrzydła, jest pod działaniem siły wiatru która wydaje podobną pracę poruszającą. Więc summa tych wszystkich składowych prac tworzy pracę poruszającą, rozwiniętą na całem skrzydle, i wyraża się przez całkę określoną

$$\frac{k\varpi}{g}\, l\int_{r_0}^{r_1}(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2\omega\,\mathrm{dos}\,\alpha.rdr,$$

wziętą między granicami r_0 i r_1 odpowiedającemi dwom skrajnościom skrzydła. Kąt α jest funkcyą promienia r, ponieważ szczeble są nierówno nachylone na kierunek wiatru.

Dla każdego z trzech innych skrzydeł praca wyraża się podobnie; więc dość jest wziąć cztery razy powyższą całkę, aby mieć całą poruszającą pracę machiny. Co daje

$$T_p = \frac{4k\varpi l}{g}\int_{r_0}^{r_1}(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2\omega\,\mathrm{dos}\,\alpha.rdr.$$

Praca użyteczna równa się pracy poruszającej zmniejszonej pracą pochodzącą z tarcia wału na panwiach. Według doświadczeń *Kulomba*, to tarcie niewiele się zmienia z prędkością wirowania, ale zależy od parć jakich doznają powierzchnie trące się. Więc zmiany prędkości wirowania będą nieznaczne przy dość wielkim ciężarze wału i jego skrzydeł; można zatem z bardzo małym błędem przypuścić że tarcie jest stateczne. Tym sposobem, praca rozwinięta przez tarcie w jedności czasu będzie proporcyonalna do łuków opisanych przez punkta trące, i będzie

miała kształt $f\omega$; w czem spółczynnik liczebny f zależy od tarcia i od promienia punktów trących.

Więc praca użyteczna przesłana obracającemu się wałowi jest

$$(1)\quad T_\omega = \frac{4k\varpi l}{g}\int_{r_0}^{r_1}(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2\omega\,\mathrm{dos}\,\alpha . rdr - f\omega .$$

Chcąc wiedzieć jaka jest wartość maximum tej pracy, trzeba uważać że warunek dla maximum może się odnosić tak dobrze do kształtu skrzydła jak do prędkości jego wirowania. W pierwszym przypadku, mając daną prędkość wirowania ω i znając prędkość v, należy znaleźć nachylenie szczebli na oś, to jest wyznaczyć kąt α w funkcyi promienia r. Biorąc ten przypadek, ponieważ cała praca skrzydła jest summą prac jego cząstek składowych, praca każdej z tych cząstek powinna być maximum; trzeba więc znaleźć dla α wartość która czyni maximum wyrażenie

$$(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2\mathrm{dos}\,\alpha . \omega rdr;$$

co wymaga tylko żeby pochodna wieloczynu

$$(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)^2\mathrm{dos}\,\alpha$$

wzięta względem α była zero, to jest żeby istniało równanie

$$(v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)\left\{2(v\,\mathrm{dos}\,\alpha + \omega r\,\mathrm{wst}\,\alpha)\mathrm{dos}\,\alpha - (v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)\mathrm{wst}\,\alpha\right\} = 0.$$

Otóż, pierwszy czynnik nie może być zero, bo praca byłaby zero; więc warunek pracy maximum jest

$$2(v\,\mathrm{dos}\,\alpha + \omega r\,\mathrm{wst}\,\alpha)\mathrm{dos}\,\alpha - (v\,\mathrm{wst}\,\alpha - \omega r\,\mathrm{dos}\,\alpha)\mathrm{wst}\,\alpha = 0$$

albo

$$(2)\qquad v\,\mathrm{sty}^2\alpha + 3\omega r\,\mathrm{sty}\,\alpha - 2v = 0.$$

Takie jest równanie które daje kąt α w funkcyi ilości r, to jest wyznacza nachylenie linij rodzących powierzchni skrzydła w funkcyi ich odległości od osi koła.

To równanie pokazuje że kąt α zależy także od v i ω; zdaje się więc że kształt skrzydeł powinienby się zmieniać z prędkością wirowania którą się im nadaje, i także z prędkością wiatru. Ale, wprowadzając do równania (2) ilości dane liczebnie, łatwo się spostrzega że wartości kąta α bardzo mało się zmieniają z ilościami v i ω. Przypuszczając prędkość wiatru $v = 4^m,05$ na sekundę, którą można uważać za zwyczajną, i prędkość wirowania od 7 do 8 obrotów na minutę, co daje $\omega = 0,785$ na sekundę, z równania (2) wyprowadzamy, dla nachyleń pierwszego i ostatniego szczebla, wartości

$$\alpha_0 = 64°38' \quad \text{i} \quad \alpha_1 = 83°8'$$

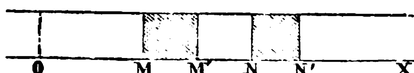
które się mało różnią od wskazanych na początku.

Doświadczenie naucza że skrzydła wykonywają dwa razy prawie tyle obrotów na minutę ile wiatr przebiega metrów na sekundę. Jeśli prędkość wiatru się powiększa, prędkość skrzydeł może się stać zanadto wielka, i na szwank wystawić całą machinę. Wtedy miarkuje się działanie wiatru *odpierzając* skrzydła, to jest odejmując płachty, albo nawijając płótno. A przeciwnie, jeśli wiatr słabieje napierza się skrzydła. Gdy się kierunek wiatru zmienia, trzeba nakręcać wiatrak aby znowu wiatr wiał wzdłuż osi. Są wiatraki tak urządzone że się same orientują; tym sposobem one same ułatwiają robotę i unikają niebezpieczeństwa gwałtownej zmiany wiatru.

DRGANIE POWIETRZA W RURZE WALCOWEJ.

386. Niech będzie rura walcowa, kształtu jakiegokolwiek, napełniona gazem jednorodnym, na przykład powietrzem; poruszono ten gaz tak żeby wszystkie jego cząstki, w spoczynku na

jednem przecięciu prostokątnem rury, zostały przeniesione ruchem spólnym równoległym do krawędzi; poczem zostawiono płyn jèmu samemu. Pytanie jaki ztąd ruch wyniknie?



Weźmy płasczyznę O prostopadłą do krawędzi OX rury, za płasczyznę początkową; oznaczmy przez x, $x+dx$ odległości od O dwóch nieskończenie sąsiednich płasczyzn M, M', prostopadłych do OX i zawierających między sobą krójkę gazu massy $\rho\alpha dx$, w której ρ wyraża gęstość gazu, α powierzchnię przecięcia prostego rury. Po czasie dt, krójka MM' przeniosła się na NN'. Nazwijmy u przemieszczenie MN cząstek płynnych które się znajdowały na płasczyznie M; u będzie funkcyą odciętej x i czasu t.

Grubością krójki MM' jest dx, a krójki NN' $dx+du$ albo $\left(1+\frac{du}{dx}\right)dx$; $\frac{du}{dx}$ przedstawia rozszerzanie gazu na jedność długości rury. Ponieważ krójki MM' i NN' obejmują tę samę massę gazu, siły sprężyste tego płynu w M i N są, na mocy ustawy *Mariotta* w założeniu temperatury statecznej, odwrotnie proporcyonalne do objętości dwóch krójek, i tak samo do ich grubości; więc, oznaczając przez p siłę sprężystą gazu w N, czyli jego parcie odniesione do jedności powierzchni, przez p_0 parcie początkowe w M, będzie

$$\frac{p}{p_0}=\frac{dx}{dx+du}=\frac{1}{1+\frac{du}{dx}}.$$

Zkąd, uważając że rozszerzanie $\frac{du}{dx}$ jest bardzo małe, i

zaniedbując jego potęgi wyższe od pierwszej, wywodzimy

$$p = p_0\left(1 - \frac{du}{dx}\right).$$

Siła sprężysta p_0 gazu wyraża się przez wiadomą z Fizyki formułę $p_0 = gh\Delta$; gdzie g znaczy ciężkość, h wysokość kolumny merkuryuszu która czyni równowagę parciu gazu w jego stanie naturalnym, Δ gęstość merkuryuszu.

To ustaliwszy, mamy zaraz parcie na ścianę N krójki NN', które jest

$$\alpha p_0\left(1 - \frac{du}{dx}\right).$$

Otrzyma się parcie na drugą ścianę tej krójki, zastępując x przez $x + dx$, i uważając że to parcie działa w stronę przeciwną pierwszego; co daje

$$-\alpha p_0\left(1 - \frac{du}{dx} - \frac{d^2u}{dx^2}dx\right).$$

Więc, nazywając X składowę, wedle OX, przyspieszenia jakie siła zewnętrzna nadaje nieskończenie małej krójce MM' mającej massę $\rho\alpha dx$, znajdujemy równanie różniczkowe ruchu

$$\frac{d^2}{dt^2}(u + x) = \frac{p_0}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2} + X,$$

albo, ponieważ x nie zmienia się z czasem t,

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{p_0}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2} + X.$$

Przypuszczając że gaz, po odebranem poruszeniu, jest zostawiony samemu sobie, będzie

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\frac{p_0}{\rho}\frac{d^2u}{dx^2},$$

albo poprostu

(1) $$\frac{d^2u}{dt^2}=a^2\frac{d^2u}{dx^2},$$

kładąc $$a^2=\frac{p_0}{\rho}=\frac{gh\Delta}{\rho}.$$

Całka ogólna równania (1), którą już znamy (266), jest

(2) $$u=\varphi(x+at)+\psi(x-at).$$

φ i ψ wyrażają dwie funkcye dowolne, które się wyznacza znając stan początkowy ruchu; przypuszczając na przykład że są wiadome rozszerzanie początkowe $\frac{du}{dx}$ i prędkość początkowa $\frac{du}{dt}$ punktów krójki. Niech będą więc, dla $t=0$,

$$\frac{du}{dx}=f(x) \quad \text{i} \quad \frac{du}{dt}=F(x).$$

Różniczkując formułę (2), mamy wartości

(3)
$$\frac{du}{dx}=\varphi'(x+at)+\psi'(x-at),$$
$$\frac{du}{dt}=a\left\{\varphi'(x+at)-\psi'(x-at)\right\};$$

czyniąc w nich $t = 0$, będzie

$$f(x) = \varphi'(x) + \psi'(x),$$

$$\frac{1}{a}\,F(x) = \varphi'(x) - \psi'(x);$$

zkąd wynika

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x) + \frac{1}{a}\,F(x)\right\}$$

$$\psi'(x) = \frac{1}{2}\left\{f(x) - \frac{1}{a}\,F(x)\right\}.$$

Owoż, całkowanie w granicach 0 i x daje

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^x f(x)dx + \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)dx, \\ \psi'(x) = \psi(\ ) + \frac{1}{2}\int_0^x f(x)dx - \frac{1}{2a}\int_0^x F(x)dx, \end{cases}$$

jeśli więc zamienimy x na $x + at$ i na $x - at$, funkcye dowolne φ i ψ będą zupełnie wyznaczone. Podstawiając ich wartości w formule (2), będziemy mieli

$$u = \varphi(0) + \psi(0) + \frac{1}{2}\int_0^{x+at} f(z)dz + \frac{1}{2}\int_0^{x-at} f(z)dz$$
$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} F(z)dz.$$

Ale dla skrócenia zachowamy formułę (2).

Żeby zupełnie rozwiązać zagadnienie, trzeba różróżnić trzy główne przypadki następujące:

RURA NIEOKREŚLONA NA OBIE STRONY.

387. Przypuśćmy że część gazu poruszona w rurze jest ograniczona, i rozciąga się tylko od $x = 0$ aż do $x = l$, to jest mieści się między płaszczyznami prostopadłemi do krawędzi w punktach O i L. W tym przypadku, dla $t = 0$, funkcye $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dt}$, i temsamem $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, są zero na wszystkie wartości odciętej x niezawarte między 0 i l.

Biorąc czas t dodatny, uważajmy punkt materyalny leżący w stronie odciętych dodatnych, poza częścią początkową poruszoną. Ponieważ odcięta x tego punktu jest większa od l, będzie tem bardziej $x + at > l$. Zatem $\varphi(x + at) = 0$, i formuły (3) stają się

$$\text{(5)} \qquad \frac{du}{dx} = \psi'(x - at), \qquad \frac{du}{dt} = -a\psi'(x - at).$$

Ale, żeby wartości rozszerzania $\frac{du}{dx}$ i prędkości $\frac{du}{dt}$ nie były zero, powinna wartość $x - at$ mieścić się między 0 i l, to jest trzeba żeby było

$$l > x - at > 0;$$

zkąd

$$\frac{x}{a} > t > \frac{x - l}{a}.$$

Wynika z tej podwójnej nierówności że punkt materyalny, o którym mowa, zaczyna się poruszać dopiero od chwili w któ-

rej jest $t=\frac{x-l}{a}$, i trwa w ruchu aż do czasu $t=\frac{x}{a}$; poczem wraca do spoczynku, i w nim zostaje nieograniczenie. Ruch się więc szerzy w stronę dodatną LX z prędkością stateczną a, i odbywa się w każdym punkcie przez czas $\frac{l}{a}$; tak że część poruszona OL, mająca długość l, zdaje się postępować z prędkością a, przedstawiając ciągle tę samą postać, ponieważ zmienna $x-at$ ma wszystkie wartości zawarte między 0 i l. Ale ten ruch jest tylko prostym pozorem. I dlatego tę część gazu, która się zdaje poruszać cała jako ciało bryłowe niezmienne, nazwano *falą*, przez podobieństwo do fal na wodzie stojącej, które się poruszają na pozór a rzeczywiście zostają na miejscu. Nie trzeba brać za jedno pozornego przemieszczenia fali z istotnem przemieszczeniem pojedynczej cząstki. Fala jest złożona z cząstek które się zastępują nawzajem; ale to nie one poruszają się z prędkością a, tylko figura geometryczna która je obejmuje.

Z formuł (5) wynika że dla każdej krójki fali stosunek prędkości $\frac{du}{dt}$ do rozszerzania $\frac{du}{dx}$ jest stateczny,

$$\frac{du}{dt}=-a\frac{du}{dx}.$$

388. Dla punktów materyalnych leżących po lewej stronie początku O, odcięte są odjemne; co daje $x<0$ i tem bardziej $x-at<0$. Będzie zatem $\psi'(x-at)=0$, i formuły (3) staną się

$$\frac{du}{dx}=\varphi'(x+at)$$
(6)
$$\frac{du}{dt}=a\varphi'(x+at).$$

Widzimy łatwo że wartości $\frac{du}{dx}$ i $\frac{du}{dt}$ wtenczas tylko są róż-

ne od zera kiedy się sprawdza podwójna nierówność

$$l > x + at > 0$$

albo

$$\frac{l-x}{a} > t > \frac{-x}{a}.$$

To dowodzi że ruch się rozciąga w stronę odjemną osi odciętych tak jako w stronę dodatną tej osi, przez falę która się przenosi, po lewej stronie początku O, z prędkością jednostajną a.

Każda cząstka płynna jest w ruchu przez czas $\frac{l}{a}$, i w każdej krójce stosunek prędkości $\frac{du}{dt}$ do rozszerzania $\frac{du}{dx}$ jest stateczny

$$\frac{du}{dt} = a\frac{du}{dx}.$$

389. Nakoniec, uważajmy punkt materyalny leżący między O i L; będzie

$$l > x > 0.$$

Ztąd wynika że zmienne $x + at$ i $x - at$ zostają przez pewny czas zawarte każda między 0 i l; więc przez ten czas funkcye $\varphi'(x + at)$ i $\psi'(x - at)$ są różne od zera. Te funkcye będą obie zero, skoro czas t dosięgnie wartości $\frac{l}{a}$, i tem bardziej gdy ją przejdzie; wtedy cała część OL zostaje w spoczynku, a są dwie fale które się od niej oddalają na prawo i na lewo z prędkością stateczną a.

Ale jedna z dwóch fal może znikać. Ten osobliwy przypadek zdarza się, gdy poruszenie początkowe jest takie że w części OL

jedna z dwóch funkcyj $\varphi'(x)$ albo $\psi'(x)$ staje się zero; albo co wychodzi na jedno wedle formuł (3), gdy jedno z następujących równań ma miejsce,

$$\frac{du}{dt} - a\frac{du}{dx} = 0, \quad \text{albo} \quad \frac{du}{dt} + a\frac{du}{dx} = 0,$$

to jest, gdy w stanie początkowym stosunek prędkości do rozszerzania, w jakimkolwiek punkcie części poruszonej, równa się $+a$ albo $-a$.

RURA OGRANICZONA Z JEDNEJ STRONY.

390. RURA ZAMKNIĘTA Z JEDNEJ STRONY A OTWARTA Z DRUGIEJ. Biorąc początek O na płaszczyźnie która zamyka rurę, i licząc odcięte dodatne wzdłuż tej rury, mamy w punkcie O

$$x = 0, \qquad \frac{du}{dt} = 0,$$

jakikolwiek jest czas t.

Ten warunek prowadzi do równania

$$\varphi'(at) - \psi'(-at) = 0;$$

a ponieważ ono powinno istnieć jakikolwiek jest czas t co do wielkości i do znaku, jeśli zastąpimy at przez z, będziemy mieli, jakiekolwiek jest z,

$$(7) \qquad \varphi'(z) - \psi'(-z) = 0.$$

Za pomocą ostatniego równania, funkcye φ' i ψ', które są dane tylko dla wartości dodatnych zmiennej z, będą wiadome

dla jej wartości odjemnych. Jakoż, przypuszczając z dodatne, mamy

(8) $$\psi'(-z) = \varphi'(z);$$

co daje ψ' na wszystkie wartości odjemne zmiennej z. A jeśli teraz w równaniu (7) zamienimy z na $-z$, przypuszczając jeszcze z dodatne, będziemy mieli

(9) $$\varphi'(-z) = \psi'(z);$$

co wyznacza φ' na wszystkie wartości odjemne zmiennej z.

Wartości (3) $\frac{du}{dx}$ i $\frac{du}{dt}$, wyznaczone tym sposobem dla jakichkolwiek wartości x i t, są takie same jak gdyby rura, nie będąc zamknięta w O, rozciągała się nieokreślnie na obie strony, a stan początkowy był wybrany ze strony przedłużenia.

W tem założeniu, zmieniając x na $-x$ w formułach (3) i zważając na równania (8) i (9), będziemy mieli dla rozszerzania i dla prędkości punktów, na przecięciu rury odpowiedającem odciętej $-x$, wartości

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} = \varphi'(-x+at) + \psi'(-x-at)$$

$$= \psi'(x-at) + \varphi'(x+at) = \left(\frac{du}{dx}\right)_x,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x} = a\left\{\varphi'(-x+at) - \psi'(-x-at)\right\}$$

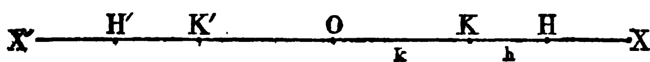
$$= a\left\{\psi'(x-at) - \varphi'(x+at)\right\} = -\left(\frac{du}{dt}\right)_x,$$

które dowodzą że w punktach, leżących na przecięciach pros-

tych w równej odległości od początku O, rozszerzania są te same, a prędkości równe i znaków przeciwnych.

Ta własność, istniejąca zawsze jakikolwiek jest czas t, nie przestaje istnieć gdy $t = 0$, to jest ma miejsce w stanie początkowym.

391. Rozpatrzmy w szczególności przypadek w którym poruszenie początkowe zawiera się w ograniczonej przestrzeni KH rury, to jest mieści się między płaszczyznami $x = k$ i $x = k + h$.



Wtedy funkcye φ' i ψ' są zero dla wszystkich wartości dodatnych zmiennej x, niezawartych między k i $k + h$, i także, na mocy równania (7), dla wszystkich wartości odjemnych niezawartych między $-k$ i $-k-h$. Poruszenie KH daje początek dwom falom które są ożywione prędkościami a i $-a$; a wedle tego co poprzedza, będą także dwie fale symetryczne, oddalające się na prawo i na lewo przedziału K'H' symetrycznego z przedziałem KH.

Fale oddalające się od płasczyzny O nie doznają żadnego nadwerężenia. Co do innych rzecz się ma inaczej. One przybywając w tym samym czasie do O i postępując dalej, składają się i przenikają nawzajem, tak że wartości $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dt}$ w punkcie spólnym dwóch fal będą każda summą dwóch wartości odpowiedających tym falom. Poczem te dwie fale, przeszedłszy jedna przez drugą, rozdzielą się i pójdą osobno bez żadnego już naruszenia.

Widzimy więc że skutek sprawiony w rurze OX, zamkniętej w O, jest taki sam jak gdyby fala, która idzie od KH ku płasczyznie stałej O, doszedłszy do niej zwracała się na siebie samą, zachowując tę samą gęstość i idąc z tą samą prędkością

w stronę przeciwną. A gdy druga skrajność fali wychodzącej z KH dosięgnie do O, cała fala będzie odwrócona, i biorąc kierunek przeciwny pójdzie w stronę $x^{ów}$ dodatnych. Na tem zależy tak zwane odbicie się fali od płasczyzny. To zjawisko zdarza się niezależnie od długości części poruszonej KH.

392. Rura nieokreślona z jednej strony, a otwarta z drugiej w środku gazistym mającym gęstość stateczną. Uważając rurę otwartą w O i w komunikacyi z nieokreślną massą gazu gęstości statecznej, przypuszczą się zwykle że siła sprężysta gazu przy otworze O jest ta sama co gazu zewnętrznego w spoczynku, jako na przykład atmosfery.

Biorąc początek w O, mamy w tym punkcie

$$x = 0, \qquad \frac{du}{dx} = 0;$$

zatem, jakikolwiek jest czas t, będzie dla $x = 0$,

$$\varphi(at) + \psi'(-at) = 0,$$

albo

$$(10) \qquad \varphi'(z) = -\psi'(-z);$$

jakiekolwiek jest z, dodatne albo odjemne.

Wyobraźmy sobie teraz rurę przedłużoną nieokreślnie ze strony odjemnej początku O; będziemy mieli na mocy formuł (3) i (10),

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{-x} = \varphi'(-x + at) + \psi'(-x - at)$$

$$= -\psi'(x - at) - \varphi'(x + at) = -\left(\frac{du}{dx}\right)_x,$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{-x}=a\left\{\varphi'(-x+at)-\psi'(-x-at)\right\}$$

$$=a\left\{\varphi'(x+at)-\psi'(x-at)\right\}=\left(\frac{du}{dt}\right)_x.$$

Te wartości dowodzą że w punktach leżących na dwóch przecięciach prostych równo oddalonych od początku O, prędkości są równe i tego samego znaku, a rozszerzania równe i znaków przeciwnych.

Ztąd wynika że, jeśli poruszenie początkowe ma rozciągłość ograniczoną jako KH któreśmy dopiero co widzieli, będzie istniała w rurze rzeczywistej fala oddalająca się od płasczyzny O; a w rurze nieokreślnie przedłużonej będą dwie inne fale idące ku O, przenikające się i przechodzące jedna przez drugą bez nadwerężenia. Tym sposobem w rurze rzeczywistej będzie się znajdowała fala, która pójdzie najpierwej do płasczyzny O i o nią się odbije, tak że potem będzie tworzyła nową falę skierowaną w stronę przeciwną. Prędkość w różnych cząstkach tej fali zostaje ta sama co do wielkości i do znaku jak kiedy fala zbliżała się do płasczyzny O; ale rozszerzanie zmienia znak zachowując wielkość.

RURA Z DWÓCH STRON OGRANICZONA.

393. Ruch gazu w naturalnej rurze przywodzi się do dwóch poprzedzających przypadków, ale jest różny stosownie do trzech możebnych stanów rury, które osobno uważać należy.

1° Rura zamknięta w obydwóch skrajnościach. Oznaczmy przez l długość rury. Biorąc początek O na jednej z dwóch skrajności, trzeba wyznaczyć, dla wartości jakichkolwiek zmiennej x, obie funkcye $\varphi'(x)$ i $\psi'(x)$ które są wiadome tylko dla wartości x zawartych między 0 i l.

Owoż, wyrażając że prędkość $\frac{du}{dt}$ jest zero na obydwóch skrajnościach rury, jakikolwiek jest czas t, mamy

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{dla } x = 0 \quad \text{i} \quad \text{dla } x = l;$$

te warunki dają dwa równania potrzebne do wyznaczenia φ' i ψ',

$$(11) \qquad \varphi'(z) - \psi'(-z) = 0,$$

$$(12) \qquad \varphi'(l + z) - \psi'(l - z) = 0$$

w których $z = at$ oznacza ilość dowolną.

Funkcya $\psi'(l - z)$ jest wiadoma dla wartości zmiennej z zawartych między 0 i l; znamy więc wtedy $\varphi'(l + z)$. Tym sposobem funkcya $\varphi'(z)$ jest znana dla wszystkich wartości z mniejszych od $2l$.

Jeśli zamienimy z na $l + z$ w równaniu (12), będzie

$$\varphi'(2l + z) = \psi'(-z);$$

a na mocy (11) ponieważ jest także

$$\varphi'(z) = \psi'(-z),$$

będzie zatem

$$\varphi'(2l + z) = \varphi'(z).$$

To dowodzi że funkcya $\varphi'(z)$ jest okresowa, i że jej okres równa się $2l$.

Tak samo się ma z funkcyą $\psi'(-z)$; albowiem równanie (11)

$$\psi'(-z) = \varphi'(z)$$

daje

$$\psi'(-2l-z)=\varphi'(2l+z)=\varphi'(z)=\psi'(-z).$$

Z okresowości funkcyj φ' i ψ' wynika że rozszerzanie $\frac{du}{dx}$ i prędkość $\frac{du}{dt}$, w tym samym punkcie rury, biorą na powrót te same wartości w dwóch epokach odległych od siebie przeciągiem czasu który się wyraża przez

$$T=\frac{2l}{a}.$$

Można wprost dojść do tego wyniku. Jakoż, poruszenie początkowe sprawia dwie fale które idą w strony przeciwne, i obie odbijają się następnie w dwóch skrajnościach rury, wedle ustaw poprzednio wyłożonych. Po dwóch po sobie idących odbiciach, i po przebieżeniu dróg równych dwa razy wziętej długości rury, z prędkością stateczną a, te dwie fale, na końcu czasu $\frac{2l}{a}$, składają się i wydają na powrót stan początkowy. Ten skutek będzie się powtarzał na nowo nieograniczenie.

2° Rura otwarta w obydwóch skrajnościach. W tym przypadku, przypuszczając párcie zewnętrzne stateczne, rozszerzanie jest zero na obydwóch skrajnościach; mamy zatem

$$\frac{du}{dx}=0 \quad \text{dla } x=0 \quad \text{i} \quad \text{dla } x=l;$$

co daje, jakiekolwiek jest z,

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0 \qquad \text{i} \qquad \varphi'(l+z)+\psi'(l-z)=0.$$

Funkcye $\varphi'(z)$ i $\psi'(-z)$ są dane dla wartości zmiennej z

zawartych między 0 i l; zatem $\varphi'(l+z)$ jest wiadome dla tych wartości. A więc funkcya $\varphi'(z)$ jest znana od $z=0$ aż do $z=2l$.

Zamieniając teraz z na $l+z$ w ostatniem równaniu, będzie

$$\varphi'(2l+z)+\psi'(-z)=0,$$

ale

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0;$$

zatem

$$\varphi'(2l+z)=\varphi'(z).$$

Tak samo

$$\psi'(2l-z)=\psi'(-z).$$

Więc funkcye φ' i ψ' są obie okresowe, i mają ten sam okres $2l$. Ztąd wynika że stan rury z gazem jest okresowy i ten sam po każdym przedziale czasu równym $\frac{2l}{a}$.

Otrzymuje się wprost ten wynik, uważając odbicia się fal.

3° Rura otwarta w jednej skrajności a zamknięta w drugiej. Biorąc początek O na skrajności otwartej, jakikolwiek jest czas t, będziemy zawsze mieli

$$\frac{du}{dx}=0 \quad \text{dla } x=0$$

$$\frac{du}{dt}=0 \quad \text{dla } x=l.$$

Co prowadzi do dwóch równań

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0,$$

$$\varphi'(l+z)-\psi'(l-z)=0,$$

w których z jest jakiekolwiek.

Te równania wyznaczają funkcye $\varphi'(z)$ i $\psi'(z)$ dla wszystkich wartości z dodatnych i odjemnych, byle tylko je znano dla wartości dodatnych zmiennej z mniejszych od l.

Ostatnie równanie daje

$$\varphi'(2l+z)=\psi'(-z),$$

ale poprzedzające jest

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0;$$

więc

$$\varphi'(2l+z)=-\varphi'(z).$$

To pokazuje że funkcya $\varphi'(z)$ zmienia znak kiedy zmienna z powiększa się ilością $2l$; zatem, jeśli z powiększy się ilością $4l$, funkcya $\varphi'(z)$ weźmie na powrót pierwszą wartość. Więc ona jest okresowa ale z okresem $4l$.

Funkcya $\psi'(-z)$ jest także okresowa i ma ten sam okres $4l$, albowiem

$$\varphi'(z)+\psi'(-z)=0.$$

Ztąd wynika że, w obecnym przypadku, stan rury z gazem jest jeszcze okresowy, ale nie powraca do pierwotnego położenia aż dopiero po przeciągu czasu równym $\frac{4l}{a}$.

Możnaby dojść wprost do tego wyniku, uważając ruch dwóch fal pochodzących z początkowego poruszenia. Odbicia się po sobie idące tych fal w dwóch skrajnościach rury i powrót do części pierwotnie poruszonych, po przebieżeniu dróg równych przedziałowi $4l$ z prędkością jednostajną a, daje właśnie okres $\frac{4l}{a}$ otrzymany wyżej.

UŻYCIE SZEREGÓW TRYGONOMETRYCZNYCH DO ZAGADNIENIA RUCHU POWIETRZA W RURZE WALCOWEJ.

394. Jakkolwiek jest ogólne rozwiązanie zagadnienia ruchu gazu w rurach walcowych, któreśmy dopiero co wyłożyli, nie jest ono jednak zupełne, i ruch nie dostatecznie jeszcze wyświecony. Dopełnia się czego brakuje za pomocą metody której zasadę podał *Daniel Bernulli*, a która jest bardzo użyteczna w wielu kwestyach Fizyki matematycznej. Oto na czem polega ta dogodna metoda. Zamiast szukać całki ogólnej równania o różniczkach cząstkowych, można znaleźć nieskończoną liczbę całek szczególnych, i takich żeby każda z nich czyniła zadość warunkom względnym do granic układu w ruchu. A jeśli do tego jeszcze przygotowano równania w sposób żeby nie zawierały wyrazów niezależnych od funkcyi albo od jej pochodnych, wtedy summa całek szczególnych, dobranych jakośmy powiedzieli, pomnożonych każda przez jedną stateczną dowolną, będzie całką równania nieokreślonego, i uczyni zadość warunkom granicznym. To mając, trzeba już tylko wyznaczyć stateczne dowolne znalezionej całki tak, żeby czyniąc $t = 0$ otrzymano stan początkowy. Zastosujemy tę metodę do ruchu gazu w rurze walcowej z obydwóch stron ograniczonej, dodając że ta sama metoda stosuje się do ruchu struny drgającej.

Odróżnimy jako zwykle trzy oddzielne przypadki.

1° Przypadek rury otwartej w obydwóch końcach. **Mamy zawsze równanie o różniczkach cząstkowych**

$$(1) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

które przedstawia tak dobrze ruch gazu w rurach walcowych jak ruch struny drgającej; a ponieważ w otwartych końcach rury

rozszerzanie $\frac{du}{dx}$ jest oczywiście zero, warunki graniczne układu w ruchu, wyrażone wedle poprzednio użytej notacyi, są

$$(2) \quad \frac{du}{dx} = 0 \text{ dla } x = 0 \text{ i } x = l, \text{ jakikolwiek jest czas } t.$$

Wedle tego cośmy w ruchu strony drgającej powiedzieli, nie trudno teraz widzieć że czyni się zadość równaniu (1) biorąc

$$u = (\mathrm{A}\,\mathrm{dos}\,nx + \mathrm{B}\,\mathrm{wst}\,nx)(\mathrm{C}\,\mathrm{dos}\,nat + \mathrm{D}\,\mathrm{wst}\,nat);$$

gdzie A, B, C, D są stateczne dowolne. Dla dopełnienia warunku (2) trzeba żeby pochodna

$$\frac{du}{dx} = n(\mathrm{B}\,\mathrm{dos}\,nx - \mathrm{A}\,\mathrm{wst}\,nx)(\mathrm{C}\,\mathrm{dos}\,nat + \mathrm{D}\,\mathrm{wst}\,nat)$$

była zero dla $x = 0$ i dla $x = l$, niezależnie od czasu t; co daje dwa równania

$$\mathrm{B} = 0 \quad \text{i} \quad \mathrm{wst}\,nl = 0, \quad \text{zkąd} \quad n = \frac{i\pi}{l}.$$

i jest liczbą całkowitą jakąkolwiek, dodatną albo odjemną; ale wolno poprzestać na wartościach dodatnych dla i, dlatego że wartości u odpowiedające odjemnym dla i nie różnią się od pierwszych, bo spółczynniki A, B, C, D są niewyznaczone.

Możemy więc, oznaczając przez A_i, B_i dwie stateczne dowolne, położyć ogólnie

$$(3) \quad u = \sum_1^\infty \mathrm{dos}\,\frac{i\pi x}{l}\left(\mathrm{A}_i \mathrm{dos}\,\frac{i\pi at}{l} + \mathrm{B}_i \mathrm{wst}\,\frac{i\pi at}{l}\right).$$

Funkcya u określona tym sposobem uczyni zadość warun-

kom zagadnienia. Spółczynniki A_i, B_i dowolne, z warunkiem zapewnienia tylko zbieżności szeregu i jego pochodnych, wyznaczają się przez stan początkowy układu, to jest przez dane wartości $\frac{du}{dx}$ i $\frac{du}{dt}$ w całej rozciągłości rury. Niech będzie więc

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=f(x)\\ \frac{du}{dt}&=\mathrm{F}(x)\end{aligned}\right\}\text{dla } t=0, \quad \text{między} \quad x=0 \quad \text{i} \quad x=l.$$

Różniczkując równanie (3) względem x i t, mamy

$$(4)\quad \begin{aligned}\frac{du}{dx}&=-\frac{\pi}{l}\sum_1^\infty i \,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \mathrm{dos}\,\frac{i\pi at}{l}+B_i \mathrm{wst}\,\frac{i\pi at}{l}\right),\\ \frac{du}{dt}&=-\frac{\pi a}{l}\sum_1^\infty i\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \mathrm{wst}\,\frac{i\pi at}{l}-B_i \mathrm{dos}\,\frac{i\pi at}{l}\right);\end{aligned}$$

a jeśli uczynimy $t=0$, trzeba żeby te pochodne dawały w granicach $x=0$ i $x=l$, do wyznaczenia A_i i B_i, dwie następujące względności

$$\frac{\pi}{l}\sum_1^\infty i A_i \mathrm{wst}\,\frac{i\pi x}{l}=-f(x),$$

$$\frac{\pi a}{l}\sum_1^\infty i B_i \mathrm{dos}\,\frac{i\pi x}{l}=\mathrm{F}(x).$$

To pokazuje że funkcye $f(x)$ i $\mathrm{F}(x)$ powinny być okresowe, i mieć obie ten sam okres $2l$; pierwsza musi być nieparzysta $f(-x)=-f(x)$, a druga parzysta $\mathrm{F}(-x)=\mathrm{F}(x)$. Tych wszystkich warunków można dopełnić, ponieważ $f(x)$ i $\mathrm{F}(x)$ są całkiem dowolne poza granicami $x=0$, $x=l$. Owoż, Analiza

daje formuły które wyrażają funkcye okresowe dowolne przez szeregi za pomocą całek określonych; stosując te formuły do obecnego przypadku, z dwóch powyższych równań wywodzimy

$$i\pi A_i = -2\int^l f(\alpha)\,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha,$$

$$i\pi a B_i = 2\int_0^l F(\alpha)\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha.$$

Otrzymujemy więc ostatecznie summę

$$(5)\quad \begin{cases} u = -\sum_1^\infty \frac{2}{i\pi}\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi x}{l}\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi a t}{l}\int_0^l f(\alpha)\,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha, \\ \quad + \sum_1^\infty \frac{2}{i\pi a}\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi x}{l}\,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi a t}{l}\int_0^l F(\alpha)\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi\alpha}{l}\,d\alpha, \end{cases}$$

która zadość czyni warunkom stanu początkowego; ta summa, jako widzimy, zawiera dwie funkcye dowolne $f(\alpha)$, $F(\alpha)$.

Wiadomo że drgania powietrza w rurze wydają dźwięk Każdej wartości i odpowiedają wyrazy szeregu (5) które stanowią rozwiązanie szczególne tego ruchu, a każde z rozwiązań szczególnych przedstawia tak zwany *ruch prosty*. Jeśli więc chcemy uważać tylko jeden z tych ruchów prostych, to bierzemy równania (4) odnoszące się do jednej wartości i; tym sposobem. dla skrócenia zastępując tylko $\frac{i\pi}{l}A_i$ i $\frac{i\pi}{l}B_i$ w równaniach (4) przez A_i i B_i, mamy

$$\frac{du}{dx} = -\,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi a t}{l} + B_i\,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi a t}{l}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = a\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi x}{l}\left(A_i\,\mathrm{wst}\,\frac{i\pi a t}{l} + B_i\,\mathrm{dos}\,\frac{i\pi a t}{l}\right).$$

Punkta dane przez $\frac{du}{dt}=0$, w których gaz zostaje nieruchomy, nazwano *węzłami*, a zaś punkta w których rozszerzanie $\frac{du}{dx}=0$ mianowano *brzuchami*. W rurze z obydwóch stron otwartej którą się zajmujemy, brzuchy wyrażają się przez równanie

$$\text{wst}\,\frac{i\pi x}{l}=0, \qquad \text{zkąd} \qquad x=\frac{kl}{i};$$

a węzły przez

$$\text{dos}\,\frac{i\pi x}{l}=0, \qquad \text{zkąd} \qquad x=\frac{(2k+1)l}{2i};$$

k znaczy liczbę całkowitą. Te wartości pokazują że brzuchy są punktami podziału rury na i części równych, a węzły przypadają we środku przedziałów między brzuchami po sobie idącemi.

Prędkość $\frac{du}{dt}$ jest okresowa i powraca do tej samej wartości po czasie równym $\frac{2l}{ia}$; albo co to samo, *trwanie jednego zupełnego drgania* jest $\frac{2l}{ia}$. Zatem, jeśli oznaczymy przez D liczbę drgań wykonanych w jednej sekundzie, będzie

$$D=\frac{ia}{2l}.$$

Liczba drgań D jest miarą wysokości dźwięku.

2° Przypadek rury zamkniętej w obydwóch skrajnościach W takiej rurze jest oczywiście

$$\frac{du}{dt}=0, \qquad \text{dla } x=0 \quad \text{i} \quad x=l.$$

Ponieważ pochodna

$$\frac{du}{dt}=na(\text{A}\,\text{dos}\,nx+\text{B}\,\text{wst}\,nx)(\text{D}\,\text{dos}\,nat-\text{C}\,\text{wst}\,nat)$$

powinna być zero dla $x = 0$ i $x = l$, jakikolwiek jest czas t, mamy

$$A = 0 \quad \text{i} \quad B\,\text{wst}\,nl = 0, \quad \text{zkąd} \quad n = \frac{i\pi}{l}.$$

Więc, uważając tylko jeden ruch prosty, możemy położyć

$$u = \text{wst}\,\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \text{dos}\,\frac{i\pi at}{l} + B_i \text{wst}\,\frac{i\pi at}{l}\right);$$

zkąd, zastępując po różniczkowaniu, $\frac{i\pi}{l} A_i$ i $\frac{i\pi}{l} B_i$, przez A_i i B_i, otrzymujemy równania tego ruchu

$$\frac{du}{dx} = \text{dos}\,\frac{i\pi x}{l}\left(\quad \text{os}\,\frac{i\pi at}{l} + B_i \text{wst}\,\frac{i\pi at}{l}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = -a\,\text{wst}\,\frac{i\pi x}{l}\left(A_i \text{wst}\,\frac{i\pi at}{l} - B_i \text{dos}\,\frac{i\pi at}{l}\right).$$

Okres czyli czas jednego drgania jest ten sam $\frac{2l}{ia}$ co w poprzedzającym przypadku.

Ale brzuchy są dane przez równanie

$$\text{dos}\,\frac{i\pi x}{l} = 0, \quad \text{zkąd} \quad x = \frac{(2k+1)l}{2i},$$

a węzły przez

$$\text{wst}\,\frac{i\pi x}{l} = 0, \quad \text{zkąd} \quad x = \frac{kl}{i};$$

te wartości, na przemian równe odpowiednym poprzedzającego przypadku, dowodzą że, w rurze zamkniętej w obydwóch końcach, brzuchy znajdują się we środku przedziałów między wę-

złami po sobie idącemi. Na skrajnościach rury otwartej są brzuchy, a na skrajnościach rury zamkniętej węzły.

3° PRZYPADEK RURY OTWARTEJ Z JEDNEJ STRONY A ZAMKNIĘTEJ Z DRUGIEJ. W tym ostatnim przypadku, biorąc początek spółrzędnych na skrajności otwartej, mamy

$$\frac{du}{dx}=0 \quad \text{dla } x=0,$$

$$\frac{du}{dt}=0, \quad \text{dla } x=l.$$

Powinno być

$$nB(C\,\text{dos}\,nat+D\,\text{wst}\,nat)=0,$$

$$na(A\,\text{dos}\,nl+B\,\text{wst}\,nl)(D\,\text{dos}\,nat-C\,\text{wst}\,nat)=0,$$

jakikolwiek jest czas t; co daje

$$B=0 \quad \text{i} \quad \text{dos}\,nl=0, \quad \text{zkąd} \quad n=\frac{(2i+1)\pi}{2l}.$$

Więc, uważając tylko jeden ruch prosty, możemy położyć

$$u=\text{dos}\,\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\left(A_i\text{dos}\,\frac{(2i+1)\pi at}{2l}+B_i\text{wst}\,\frac{(2i+1)\pi at}{2l}\right).$$

Wywodzimy ztąd, zastępując tylko $\frac{(2i+1)\pi}{2l}A_i$ i $\frac{(2i+1)\pi}{2l}B_i$ przez A_i B_i po różniczkowaniu, dwa równania rzeczonego ruchu

$$\frac{du}{dx}=-\text{wst}\,\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\left(A_i\text{dos}\,\frac{(2i+1)\pi at}{2l}+B_i\text{wst}\,\frac{(2i+1)\pi at}{2l}\right),$$

$$\frac{du}{dt}=-a\,\text{dos}\,\frac{(2i+1)\pi x}{2l}\left(A_i\text{wst}\,\frac{(2i+1)\pi at}{2l}-B_i\text{dos}\,\frac{(2i+1)\pi at}{2l}\right).$$

W tym ruchu czas jedńego drgania jest $\frac{4l}{(2i+1)a}$. Węzły są dane przez równanie

$$\text{dos}\,\frac{(2i+1)\pi x}{2l}=0, \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{(2k+1)l}{2i+1};$$

a brzuchy przez

$$\text{wst}\,\frac{(2i+1)\pi x}{2l}=0, \quad \text{zkąd} \quad x=\frac{2kl}{2i+1}.$$

Węzły po sobie idące są odległe jeden od drugiego ilością $\frac{2l}{2i+1}$; zatem, począwszy od pierwszego, jest jakoby ciąg rur mających długość $\frac{2l}{2i+1}$, i których obie skrajności będąc nieruchome mogą być uważane za niby zamknięte. Ztąd wynika że gaz, zawarty między dwoma węzłami po sobie idącemi, jest w tym samym przypadku jak gdyby się znajdował w rurze zamkniętej w obydwóch końcach.

Co do brzuchów, one także są odległe, każdy od sąsiedniego, tą samą ilością $\frac{2l}{2i+1}$; a gaz, zawarty między dwoma brzuchami po sobie idącemi, wykonywa taki sam ruch drgania jakiby miał w rurze otwartej w obydwóch końcach i mającej długość $\frac{2l}{2i+1}$.

KONIEC.

NOTY

DODATEK DO ROZDZIAŁU II DYNAMIKI.

Na końcu rozdziału II Dynamiki układów materyalnych, było powiedziane że są jeszcze inne twierdzenia, które będą umieszczone w notach. Niniejszy dodatek uzupełnia rozdział i uiszcza przyrzeczenie. Ten ważny dodatek, zawierający znamienite twierdzenia Poissona, Lagrange'a, Liouvilla, Cauchego, i sławną teoryę ostatniego mnożnika Jakobiego, wypracował mój syn *Bolesław Niewęgłowski*, dawny uczeń Szkoły Normalnej Wyższej w Paryżu, a dziś professor matematyki wyższej w liceum *Reims*.

I. PRZEKSZTAŁCENIE FUNKCYI T.

Widzieliśmy w n° 175 że, aby można użyć równań kanonicznych, trzeba wyrazić funkcyę T za pomocą zmiennych $p_1, p_2, \dots p_k, q_1, q_2, \dots q_k$. Są przypadki w których to przekształcenie łatwo się uskutecznia. Zajmiemy się niemi w tej pierwszej nocie.

1° Ruch punktu na powierzchni. Jeśli oznaczymy przez s łuk krążnej opisanej na danej powierzchni będzie

$$2T = m\frac{ds^2}{dt^2}. \tag{1}$$

Za zmienne weźmy spółrzędne krzywolinijne, poprowadzone na tej powierzchni tak żeby było:

$$m ds^2 = A_1 dq_1^2 + 2B dq_1 dq_2 + A_2 dq_2^2; \tag{2}$$

będziemy mieli

$$2T = A_1 q_1'^2 + 2B q'_1 q'_2 + A_2 q_2'^2 \tag{3}$$

Wtedy p_1 i p_2 będą określone przez równania

$$p_1 = A_1 q'_1 + B q'_2,$$
(4)
$$p_2 = B q'_1 + A_2 q'_2.$$

Zatem,

(5) $$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2.$$

Owoż, kładąc

6 $$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B \\ B & A_2 \end{vmatrix}$$

z równań (4) wywodzimy

$$q'_1 = \frac{A_2 p_1 - B p_2}{\Delta}, \qquad q' = \frac{-B p_1 + A_1 p_2}{\Delta}.$$

Te wartości podstawione w równaniu (5) dają

$$2T = \frac{1}{\Delta}(A_2 p_1^2 - 2B p_1 p_2 + A_2 p_2^2),$$

gdzie:

$$A_2 = \frac{d\Delta}{dA_1}, \qquad A_1 = \frac{d\Delta}{dA_2}, \qquad 2B = -\frac{d\Delta}{dB}.$$

Możemy więc pisać

7) $$2T = \frac{1}{\Delta}\left(p_1^2 \frac{d\Delta}{dA_1} + p_1 p_2 \frac{d\Delta}{dB} + p_2^2 \frac{d\Delta}{dA_2}\right).$$

A jeśli wybrano wartości q_1, q_2 tak żeby krzywe $q_1 = stat.$ i $q_2 = stat.$ nakreślone na danej powierzchni przecinały się pod kątem prostym, wtenczas będzie

$$B = 0$$

(8) $$m ds^2 = A_1 dq_1^2 + A_2 dq_2^2.$$

i zarazem

$$2T = \frac{1}{A_1} p_1^2 + \frac{1}{A_2} p_2^2$$

W przypadku w którym ds ma kształt

$$ds^2 = \lambda(dq_1^2 + dq_2^2),$$

co się zdarza kiedy krzywe $q_1 = stat.$ i $q_2 = stat.$ rozcinają powierzchnię na prostokąty nieskończenie małe podobne, albo nawet na kwadraty jeśli wzięto $dq_1 = dq_2$, będzie

(9) $$2T = \frac{m}{\lambda}(dq_1^2 + dq_2^2).$$

Jako zastosowanie, na *sferze*, jeśli weźmiemy za spółrzędne krzywolinijne, równoleżniki $\varphi = stat.$ i południki $\theta = stat.$ będziemy mieli

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin^2\varphi d\theta^2$$

i

$$2T = m\left(\frac{1}{r^2}p_1^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2\varphi}p_2^2\right);$$

gdzie

$$p_1 = \frac{dT}{d\varphi} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{dT}{d\theta}.$$

Na *powierzchni obrotowej*, przedstawiając przez $\theta = stat$ równanie południka, przez $z = f(s)$ równanie linii południkowej w którem z znaczy odległość jednego z punktów tej krzywej od osi, i s jej łuk, będzie

$$ds^2 = dr^2 + \{f(s)\}^2 d\theta^2.$$

Tutaj $$q_1 = s \quad \text{i} \quad q_2 = \theta; \qquad \text{więc}$$

(10) $$2T = p_1^2 + \frac{1}{\{f(s)\}^2}p_2^2.$$

2° Gdy chodzi o ruch punktu wolnego, trzeba wziąć zmienne niezależne q_1, q_2, q_3. Przypuśćmy że T, funkcya jednorodna 2go stopnia pochodnych q'_1, q'_2, q'_3, jest dana przez równanie

(11) $$2T = A_1 q'^2_1 + A_2 q'^2_2 + A_3 q'^2_3 + 2B_1 q'_2 q'_3 + 2B_2 q'_1 q'_3 + 2B_3 q'_1 q'_2;$$

mamy wtedy

(12) $$\begin{aligned} p_1 &= A_1 q'_1 + B_3 q'_2 + B_2 q'_3, \\ p_2 &= B_3 q'_1 + A_2 q'_2 + B_1 q'_3, \\ p_3 &= B_2 q'_1 + B_1 q'_2 + A_3 q'_3. \end{aligned}$$

Ztąd, czyniąc

$$(13)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_3 & B_2 \\ B_3 & A_2 & B_1 \\ B_2 & B_1 & A_3 \end{vmatrix}$$

rozwiązując równania (12), wywodzimy

$$q'_1 = \frac{1}{\Delta}\left(p_1 \frac{d\Delta}{dA_1} + \frac{1}{2} p_2 \frac{d\Delta}{dB_3} + \frac{1}{2} p_3 \frac{d\Delta}{dB_2}\right),$$

$$q'_2 = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{2} p_1 \frac{d\Delta}{dB_3} + p_2 \frac{d\Delta}{dA_2} + \frac{1}{2} p_3 \frac{d\Delta}{dB_1}\right),$$

$$q'_3 = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{1}{2} p_1 \frac{d\Delta}{dB_2} + \frac{1}{2} p_2 \frac{d\Delta}{dB_1} + p_3 \frac{d\Delta}{dA_3}\right).$$

Jeśli podstawimy te wartości w wyrażeniu

$$2T = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + p_3 q'_3,$$

i uprościmy, będziemy mieli

$$2T = \frac{1}{\Delta}\left(p_1^2 \frac{d\Delta}{dA_1} + p_2^2 \frac{d\Delta}{dA_2} + p_3^2 \frac{d\Delta}{dA_3} + p_2 p_3 \frac{d\Delta}{dB_1} + p_1 p_3 \frac{d\Delta}{dB_2} + p_1 p_2 \frac{d\Delta}{dB_3}\right).$$

W przypadku w którym $B_1 = B_2 = B_3 = 0$, będzie $\Delta = A_1 A_2 A_3$; wtedy wyrażenia ilości T, w funkcyi dawnych i nowych zmiennych, są

$$2T = A_1 q'^2_1 + A_2 q'^2_2 + A_3 q'^2_3,$$

$$2T = \frac{1}{A_1} p_1^2 + \frac{1}{A_2} p_2^2 + \frac{1}{A_3} p_3^2.$$

Przechodzi się więc łatwo z jednego wyrażenia do drugiego.

Zastosowanie. Biorąc spółrzędne astronomiczne r, θ, ψ, mamy

$$2T = m(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin\theta . \psi'^2)$$

więc

$$2T = \frac{1}{m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \sin^2\theta}\right).$$

Wynik zgodny z otrzymanym na stronicy 336 (T. II).

II. METODA ZMIENNOŚCI STATECZNYCH DOWOLNYCH.

Widzieliśmy że równania Dynamiki mogą się przedstawić w kształcie

$$(1) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dT}{dq_i} + \frac{dU}{dq_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dT}{dp_i},$$

gdzie

$$\frac{dU}{dq_i} = \sum m\left(X\frac{dx}{dq_i} + Y\frac{dy}{dq} + Z\frac{dz}{dq_i}\right),$$

choćby nawet funkcya sił U nie istniała, byle tylko zastępowano zawsze $\frac{dU}{dq_i}$ przez wyrażenie jakie przedstawia.

Jeśli siły są *niezależne od prędkości punktów*, a uczyniono $H = T - U$, równania ruchu biorą kształt kanoniczny

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}.$$

Przypomnijmy sobie jeszcze że całki zagadnienia są dane (n° 178) przez formuły

$$(2) \qquad p_i = \frac{dS}{dq_i},$$

$$(3) \qquad \frac{dS}{d\alpha_i} = \beta_i.$$

w których α_i, β_i są nazwane *statecznemi kanonicznemi*. Zobaczymy zaraz dlaczego.

Uważajmy układ materyalny poddany działaniu sił takich, żeby w pierwszem przybliżeniu można było zaniedbać ich część którą nazwiemy siłami wichrzącemi. Niech będzie Ω, jeśli istnieje, funkcya tych sił; będzie to,

że tak powiem, funkcya zawichrzająca taka żeby równania ruchu zawichrzonego wyraziły się przez

$$(4)\qquad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{dT}{dq_i}+\frac{dU}{dq_i}+\frac{d\Omega}{dq_i},\qquad \frac{dq_i}{dt}=\frac{dT}{dp_i}.$$

Mówiąc ogólnie, przypuśćmy że równanie zagadnienia ruchu mają kształt (4), i że wiadome jest całkowanie układu (1). Wtedy można uważać w całkach (2) i (3) stateczne dowolne jako niewiadome, któreby trzeba wyznaczyć tak żeby te całki stosowały się do układu zupełnego (4).

Aby przyjść do tego, różniczkujmy całkiem równanie (2), w którem t jest jedyną zmienną niezależną; będzie

$$dp_i=(dp_i)+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{d^2S}{dq_i d\alpha_\lambda}d\alpha_\lambda.$$

oznaczając przez (dp_i) różniczkę funkcyi p wziętą w przypadku w którym ilości dowolne zachowują wartości stateczne.

Owoż mamy

$$dp_i=\left(-\frac{dT}{dq_i}+\frac{dU}{dq_i}\right)dt+\frac{d\Omega}{dq_i}dt=(dp_i)+\frac{d\Omega}{dq_i}dt;$$

więc

$$(5)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{d^2S}{dq_i d\alpha_\lambda}d\alpha_\lambda=\frac{d\Omega}{dq_i}dt.$$

Tak samo równanie (3) przez różniczkowanie daje

$$(6)\qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{d^2S}{d\alpha_i d\alpha_\lambda}d\alpha_\lambda=d\beta_i.$$

Równania (5) i (6), w których trzeba czynić $i=1, 2, 3,\dots k$, są w liczbie $2k$, i dlatego wystarczają do wyznaczenia różniczek $d\alpha_1, d\alpha_2,\dots d\alpha_k$; $d\beta_1, d\beta_2,\dots d\beta_k$.

Owoż, mnożąc równanie (5) przez δq_i, równanie (6) przez $\delta\alpha_i$, dodając, a w wyniku czyniąc $i=1, 2, 3,\dots k$ i znowu dodając, otrzymuje się równanie

$$(7)\quad \sum_{i=1}^{i=k}\delta q_i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{d^2S}{dq_i d\alpha_\lambda}d\alpha_\lambda+\sum_{i=1}^{i=k}\delta\alpha_i\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{d^2S}{d\alpha_i d\alpha_\lambda}d\alpha_\lambda-\sum_{i=1}^{i=k}d\beta_i\delta\alpha_i=dt\delta\Omega.$$

w którem spólczynnik różniczki $\delta\alpha_1$, na przykład, jest

$$\sum_{i=1}^{i=k} \frac{d\frac{dS}{d\alpha_i}}{dq_i}\delta q_i + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{d\frac{dS}{d\alpha_1}}{d\alpha_i}\delta\alpha_i = \delta\frac{dS}{d\alpha_1} = \delta\beta_1;$$

więc można pisać równanie (7) w następującym kształcie

$$(8) \qquad \sum(d\alpha_i\delta\beta_i - d\beta_i\delta\alpha_i) = dt\delta\Omega.$$

Ztąd wynika że, otrzymawszy ilości p i q w funkcyi czasu t i statecznych dowolnych, jeśli je zastąpimy przez ich wartości w Ω, i utworzymy $\delta\Omega$, dość będzie w równaniu (8) zrównać między sobą spólczynniki tych samych zmienności; co daje

$$(9) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\alpha_i}.$$

Więc równanie które trzeba zcałkować dla znalezienia funkcyj α i β są w liczbie $2k$, i, co ważniejsze, mają kształt kanoniczny. Otóż dlaczego α_i, β_i zostały mianowane *statecznemi kanonicznemi*.

Równanie (9) dają α_i, β_i w funkcyi czasu t, i $2k$ nowych statecznych dowolnych które będą podobnie statecznemi kanonicznemi; tak że, gdyby wprowadzono nowe siły wichrzące możnaby jeszcze traktować tę kwestyę sposobem jakiegośmy dopiero co użyli.

Jeśli nie zcałkowano kanonicznie, można pójść wedle metody *Poisson'a* albo *Lagrange'a*. Wyłożymy te obie metody.

Metoda Poisson'a. Niech będą $a_1, a_2, a_3 \ldots a_{2k}$ całki układu

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}.$$

Poisson, uważając stateczne a jako funkcye zmiennych p i q, oznacza przez nawiasy (a_λ, a_μ) ilość

$$(a_\lambda, a_\mu) = \sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{da_\lambda}{dq_i}\frac{da_\mu}{dp_i} - \frac{da_\lambda}{dp_i}\frac{da_\mu}{dq_i}\right).$$

Ta notacya daje

$$(a_\mu, a_\lambda) = -(a_\lambda, a_\mu), \qquad (a_\lambda, a_\lambda) = 0.$$

Aby mieć całki ruchu zawichrzonego, trzeba sposobem poprzednio wskazanym uważać stateczne dowolne jako funkcye niewiadome. W tem założeniu będzie

$$\frac{da_\lambda}{dt}=\left(\frac{da_\lambda}{dt}\right)+\sum\left(\frac{da_\lambda}{dq_i}\frac{dq_i}{dt}+\frac{da_\lambda}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right),$$

to jest, z przyczyny zadanych równań i przyjętej notacyi,

$$\frac{da_\lambda}{dt}=\left(\frac{da_\lambda}{dt}\right)+(a_\lambda,\ \mathrm{H}+\Omega):$$

$\left(\frac{da_\lambda}{dt}\right)$ przedstawia pochodnę funkcyi a_λ, w przypuszczeniu że ilości dowolne mają wartości stateczne; a w obecnym przypadku jest

$$0=\left(\frac{da_\lambda}{dt}\right)+(a_\lambda,\ \mathrm{H}).$$

Z dwóch ostatnich równań wywodzimy przez odciąganie

$$\frac{da_\lambda}{dt}=(a_\lambda,\ \Omega)=\sum\begin{bmatrix}\frac{da_\lambda}{dq_i}, & \frac{d\Omega}{da_1}\frac{da_1}{dq_i}+\frac{d\Omega}{da_2}\frac{da_2}{dq_i}+\dots \\ \frac{da_\lambda}{dp_i}, & \frac{d\Omega}{da_1}\frac{da_1}{dp_i}+\frac{d\Omega}{da_2}\frac{da_2}{dp_i}+\dots\end{bmatrix};$$

co się wyraża poprostu przez

$$(10)\qquad \frac{da_\lambda}{dt}=\sum_{\mu=1}^{\mu=k}(a_\lambda,\ a_\mu)\frac{d\Omega}{da_\mu}.$$

Ta formuła wymaga żeby wyrachowano nawiasy $(a_\lambda,\ a_\mu)$. Otóż jeśli wybrano stateczne takim sposobem żeby, przedstawiając je przez $a_1, a_2,\dots a_k,\ b_1, b_2,\dots b_k$, było

$$(11)\qquad \begin{aligned}&(a_\lambda,\ a_\mu)=0, \qquad (a_\lambda,\ b_\mu)=0,\\ &(a_\lambda,\ b_\lambda)=-(b_\lambda,\ a_\lambda)=+1,\end{aligned}$$

będzie

$$\frac{da_\lambda}{dt}=\frac{d\Omega}{db_\lambda}, \qquad \frac{db_\lambda}{dt}=-\frac{d\Omega}{da_\lambda};$$

zatem stateczne a_λ, q_λ będą kanoniczne.

Oto przykład w którym staje się zadość tym warunkom. Oznaczmy przez p_i^0, q_i^0 wartości p_i, q_i w epoce $t = t_0$. Jeśli sobie dano p_i^0 i q_i^0, będzie zawsze można wyznaczyć w funkcyi tych wartości stateczne dowolne. A ponieważ nawiasy *Poisson'a* są niezależne od czasu, możemy w nich uczynić $t = t_0$; ale wtedy będzie

$$(p_\lambda^0, q_\mu^0) = 0, \quad (q_\mu^0, p_\mu^0) = 0, \quad (p_\lambda^0, p_\lambda^0) = 0, \quad (q_\lambda^0, q_\lambda^0) = 0$$

$$(p_\lambda^0, p_\mu^0) = 0 \qquad (q_\lambda^0, q_\mu^0) = 0,$$

$$(p_\lambda^0, q_\mu^0) = -(q_\lambda^0, p_\lambda^0) = -1.$$

Więc te stateczne są kanoniczne; co już wiedziano.

Metoda Lagrange'a. Jeśli rozwiązano równania (10) względem pochodnych cząstkowych $\frac{d\Omega}{da}$, będzie

$$\frac{d\Omega}{da_\lambda} = \sum A_\mu \frac{da_\mu}{dt}.$$

Chodzi teraz o wyrachowanie spółczynnika A_μ.

Niech będą $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2k}$ całki układu kanonicznego :

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dH}{dp_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{dH}{dq_i}.$$

Lagrange, przeciwnie *Poissonowi*, uważając p i q jako funkcye statecznych a, oznacza przez klamry $[a_\lambda, a_\mu]$ ilość

$$[a_\lambda, a_\mu] = \sum_{i=1}^{i=k} \left(\frac{dq_i}{da_\lambda} \frac{dp_i}{da_\mu} - \frac{dq_i}{da_\mu} \frac{dp_i}{da_\lambda} \right).$$

Wedle tej notacyi mamy

$$[a_\mu, a_\lambda] = -[a_\lambda, a_\mu], \qquad [a_\lambda, a_\lambda] = 0.$$

Wiedząc o tem, powiedam teraz że

$$[a_\lambda, a_\mu] = stat.$$

Jakoż, jeśli w funkcyi H zastąpiono p_i i q_i przez ich wyrażenia za pomocą statecznych a będzie

$$\frac{dH}{da_\lambda}=\sum\left(\frac{dH}{dq}\frac{dq}{da_\lambda}+\frac{dH}{dp}\frac{dp}{da_\lambda}\right)=\sum\left(\frac{dq}{dt}\frac{dp}{da_\lambda}-\frac{dp}{dt}\frac{dq}{da_\lambda}\right);$$

zkąd

$$\frac{d^2H}{da_\lambda da_\mu}=\sum\left(\frac{dq}{dt}\frac{d^2p}{da_\lambda da_\mu}-\frac{dp}{dt}\frac{d^2q}{da_\mu da_\lambda}\right)+\sum\left(\frac{dp}{da_\mu}\frac{d}{dt}\frac{dq}{da_\lambda}-\frac{dq}{da_\lambda}\frac{d}{dt}\frac{dp}{da_\mu}\right).$$

Podobnie

$$\frac{d^2H}{da_\mu da_\lambda}=\sum\left(\frac{dq}{dt}\frac{d^2p}{da_\mu da_\lambda}-\frac{dp}{dt}\frac{d^2q}{da_\mu da_\lambda}\right)+\sum\left(\frac{dp}{da_\mu}\frac{d}{dt}\frac{dq}{da_\lambda}-\frac{dq}{da_\mu}\frac{d}{dt}\frac{dp}{da_\lambda}\right).$$

Więc, odciągając stronami, znajdujemy

$$\frac{d}{dt}[a_\lambda,\ a_\mu]=0$$

to jest

$$[a_\lambda,\ a_\mu]=stal.$$

To ustaliwszy, mamy, przypuszczając że ilości dowolne stają się funkcyami niewiadomemi,

$$\frac{d\Omega}{dp_i}=\frac{dq_i}{dt}-\frac{dH}{dp_i},$$

albo

$$\frac{d\Omega}{dp_i}=\left(\frac{dq_i}{dt}\right)+\sum\frac{dq_i}{da_\lambda}\frac{da_\lambda}{dt}-\frac{dH}{dp_i}.$$

Ale

$$\left(\frac{dq_i}{dt}\right)=\frac{dH}{dp_i};$$

więc

$$\frac{d\Omega}{dp_i}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{dq_i}{da_\lambda}\frac{da_\lambda}{dt}.$$

Tak samo

$$\frac{d\Omega}{dp_i}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\frac{dp_i}{da_\lambda}\frac{da_\lambda}{dt}.$$

Owoż,

$$\frac{d\Omega}{da_\mu}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}\left(\frac{d\Omega}{dq_i}\frac{dq_i}{da_\lambda}+\frac{d\Omega}{dp_i}\frac{dp_i}{da_\lambda}\right);$$

więc ostatecznie

$$(12)\qquad \frac{d\Omega}{da_\mu}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k}[a_\lambda, a_\mu]\frac{da_\mu}{dt}.$$

Taka jest formuła *Lagrange'a.*

Obydwie metody przedstawiają tę niedogodność że trzeba obliczać nawiasy albo klamry.

Nie trudno widzieć że, jeśli stateczne a i b zadość czynią równaniom warunkowym z nawiasami, to czynią im zadość z klamrami: mamy albowiem formułę daną przez *Cauchy*

$$(a_\lambda, a_1)[a_\mu, a_1]+(a_\lambda, a_2)[a_\mu, a_2]\ldots=\begin{cases}0 & \text{jeśli} \quad \lambda \gtrless \mu,\\ 1, & \text{jeśli} \quad \lambda=\mu.\end{cases}$$

Oto jej dowodzenie.

FORMUŁA CAUCHY. Wiemy że

$$(a_\lambda, a_\mu)=\sum\left(\frac{da_\lambda}{dq}\frac{da_\mu}{dp}-\frac{da_\lambda}{dp}\frac{da_\mu}{dq}\right).$$

Jeśli uczynimy $\mu=1, 2, 3, \ldots 2k$, i dodamy wyniki pomnożywszy je odpowiednio przez $\frac{dp_i}{da_1}, \frac{dp_i}{da_2}, \ldots$ znajdziemy

$$(13)\qquad (a_\lambda, a_1)\frac{dp_i}{da_1}+(a_\lambda, a_2)\frac{dp_i}{da_2}+\ldots=\frac{da_\lambda}{da_\mu}.$$

Będzie tak samo

$$(14)\qquad (a_\lambda, a_1)\frac{dq_i}{da_1}+(a_\lambda, a_2)\frac{dq_i}{da_2}+\ldots=-\frac{da_\lambda}{da_i}.$$

Pomnóżmy teraz równania (13) przez $\frac{dq_i}{da_\mu}$, a równania (14) przez $-\frac{dp_i}{da_\mu}$, dodajmy i w otrzymanej formule uczyńmy $i=1, 2, 3, \ldots 2k$; nakoniec dodajmy wszystkie wyniki, będziemy mieli formułę *Cauchy.*

III. WŁASNOŚCI CAŁEK UKŁADU KANONICZNEGO.

Uważajmy najpierwej k następujących równań między $2k$ zmiennemi $q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k$ i k statecznemi $a_1, a_2, \ldots a_k$: to jest

$$(1) \quad \begin{cases} F_1(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k) = a_1, \\ F_2(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k) = a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_k(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k) = a_k. \end{cases}$$

i szukajmy pod jakiemi warunkami wartości $p_1, p_2, \ldots p_k$, wyciągnięte z tych równań, uczynią wyrażenie

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 + \ldots. p_kdq_k$$

różniczką dokładną.

Warunki do dopełnienia, w liczbie $\frac{k(k-1)}{1.2}$, są zawarte, jako wiadomo, w następującym typie

$$(2) \quad \frac{dp_m}{dq_n} = \frac{dp_n}{dq_m},$$

w którym

$$m = 1, 2, 3, \ldots k-1,$$

$$n = m+1, m+2, \ldots k.$$

Można dać równaniom (2) kształt znakomity. Wyobraźmy sobie że z równań (2) wyciągnięto $p_1, p_2, \ldots p_k$ w funkcyi ilości $q_1, q_2, \ldots q_k$, $a_1, a_2, \ldots a_k$, i podstawiono je w równaniach (1). Otrzyma się tym sposobem k tosamości. Uważajmy na przykład dwie następujące

$$F_m = a_m, \qquad F_n = a_n,$$

i różniczkujmy je względem q_1. Będziemy mieli

$$\frac{da_m}{dq_1} + \frac{da_m}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_1} + \frac{da_m}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_1} + \ldots \frac{da_m}{dp_k}\frac{dp_k}{dq_1} = 0$$

$$\frac{da_n}{dq_1} + \frac{da_n}{dp_1}\frac{dp_1}{dq_1} + \frac{da_n}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_1} + \ldots \frac{da_n}{dp_k}\frac{dp_k}{dq_1} = 0$$

ztąd, rugując $\frac{dp_1}{dq_1}$ między temi równaniami, wynika

$$\frac{da_m}{dq_1}\frac{da_n}{dp_1}-\frac{da_m}{dp_1}\frac{da_n}{dq_1}+\left(\frac{da_m}{dp_2}\frac{da_n}{dp_1}-\frac{da_m}{dp_1}\frac{da_n}{dp_2}\right)\frac{dp_2}{dq_1}+\ldots=0.$$

Otrzyma się podobnie

$$\frac{da_m}{dq_2}\frac{da_n}{dp_2}-\frac{da_m}{dp_2}\frac{da_n}{dq_2}+\left(\frac{da_m}{dp_1}\frac{da_n}{dp_2}-\frac{da_m}{dp_2}\frac{da_n}{dp_1}\right)\frac{dp_1}{dq_2}$$

$$+\left(\frac{da_m}{dp_3}\frac{da_n}{dp_2}-\frac{da_m}{dp_2}\frac{da_n}{dp_3}\right)\frac{dp_3}{dq_2}+\ldots=0;$$

i tak dalej. Dodając stronami te wszystkie równania, i redukując na mocy równań (2), znajdujemy

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left(\frac{da_m}{dq_i}\frac{da_n}{dp_i}-\frac{da_m}{dp_i}\frac{da_n}{dq_i}\right)=0.$$

Piszemy to wyrażenie wedle notacyi *Poisson'a*, w kształcie symbolicznym

(3) $$(a_m, a_n)=0.$$

Dając wskazowi m wszystkie wartości 1, 2, 3,... $k-1$, a wskazowi n wartości $m+1$, $m+2$, ... k otrzymujemy $\frac{k(k-1)}{1.2}$ warunków koniecznych, zawartych w typie (3).

Powiedam teraz że warunki (3) są dostateczne, to jest że pociągają za sobą warunki (2). Aby tego dowieść, wyobraźmy sobie że z równań (1) wyciągnięto wartości

$$p_m=\varphi(q_1, q_2, \ldots q_k, a_1, a_2, \ldots a_k),$$

$$p_n=\psi(q_1, q_2, \ldots q_k, a_1, a_2, \ldots a_k),$$

i że w drugich stronach stateczne a_1, a_2,... a_k zostały zastąpione przez funkcye F_1, F_2,... F_k; poczem utwórzmy nawias (φ, ψ), to jest

$$(\varphi,\psi)=\sum_{i=1}^{i=k}\left[\begin{matrix}\frac{d\varphi}{dq_i}+\frac{d\varphi}{dq_1}\frac{da_1}{dq_i}+\frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{dq_i}+\ldots, & \frac{d\psi}{dq_i}+\frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{dq_i}+\ldots\\ 0+\frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dp_i}+\frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{dp_i}+\ldots, & 0+\frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{dp_i}+\ldots\end{matrix}\right]$$

W tem wyrażeniu φ i ψ są uważane jako funkcye zmiennych $q_1, q_2, \ldots q_k$, $p_1, p_2, \ldots p_k$. Ale, gdy $a_1, a_2, \ldots a_k$ zostały zastąpione przez $F_1, F_2, \ldots F_k$, φ staje się tożsamie równe p_m, i ψ tożsamie równe p_n; zatem, (φ, ψ) staje się (p_m, p_n), to jest tożsamie zero; dlatego że w tem wyrażeniu ilości p i q są uważane jako zmienne niezależne. Mamy więc, rozwijając

$$0 = \sum\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{d\psi}{da}\frac{da}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i}\frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dp_i}\right) + \sum\left(\frac{d\varphi}{da_i}\frac{d\psi}{da_j} - \frac{d\varphi}{da_j}\frac{d\psi}{da_i}\right)(a_i, a_j).$$

A ponieważ z założenia (a_i, a_j), jest zero zostaje więc

$$0 = \sum\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{d\psi}{da}\frac{da}{dp_i} - \frac{d\psi}{dq_i}\frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dp_j}\right).$$

Owoż, zostawiając najpierwej wskaz i stateczny, będzie

$$\sum\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{d\psi}{da}\frac{da}{dp_i} = \frac{d\varphi}{dq_i}\left(\frac{d\psi}{da_1}\frac{da_1}{dp_i} + \frac{d\psi}{da_2}\frac{da_2}{dp_i} + \ldots\right) = \frac{d\varphi}{dq_i}\frac{dp_n}{dp_i},$$

to jest 0 jeśli $i \gtrless n$, a zaś $\frac{d\varphi}{dq_n}$ jeśli $i = n$.

Więc

$$\sum\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{d\psi}{da}\frac{da}{dp_i} = \frac{dp_m}{dq_n}.$$

Mianoby tak samo

$$\sum\frac{d\psi}{dq_i}\frac{d\varphi}{da}\frac{da}{dp_i} = \frac{dp_n}{dq_m}.$$

Więc na koniec

$$\frac{dp_m}{dq_n} - \frac{dp_n}{dp_m} = 0$$

co właśnie było do okazania.

Aby nie potrzebować ubocznych dowodzeń, zrobimy jeszcze następującą uwagę.

Niech będzie

$$\varphi(t, p_1, p_2, \ldots p_k, q_1, q_2, \ldots q_k) = a,$$

całka układu kanonicznago mającego kształt

$$(4)\qquad \frac{dq_m}{dt}=\frac{dH}{dp_m},\qquad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{dH}{dq_m}.$$

Warunek konieczny i dostateczny, którego funkcya φ dopełnić powinna aby być całką, zależy na tem żeby, względnie do $2k$ równań (4), było

$$\frac{d\varphi}{dt}=0,$$

to jest

$$\frac{d\varphi}{dt}+\sum\left(\frac{d\varphi}{dq}\frac{dq_i}{dt}+\frac{d\varphi}{dp_i}\frac{dp_i}{dt}\right)=0$$

albo, na mocy równania (4),

$$\frac{d\varphi}{dt}+\sum\left(\frac{d\varphi}{dq_i}\frac{dH}{dp_i}-\frac{d\varphi}{dp_i}\frac{dH}{dq_i}\right)=0;$$

nakoniec symbolicznie

$$(5)\qquad \frac{d\varphi}{dt}+(\varphi,H)=0;$$

Twierdzenie Liouville'a.

Jeśli jest wiadoma połowa całek układu kanonicznego

$$\frac{dq_m}{dt}=\frac{dH}{dp_m},\qquad \frac{dp_m}{dt}=-\frac{dH}{dq_m}.$$

i jeśli te całki, przedstawione w kształcie

$$(6)\qquad \varphi_1=a_1,\qquad \varphi_2=a_2,\qquad \ldots\qquad \varphi_k=a_k,$$

sprawdzają $\frac{k(k-1)}{1.2}$ *warunków* $(a_m,a_n)=0$, $(m=1,2,\ldots k-1,$ $n=m+1, m+2,\ldots m+k)$; *wtedy druga połowa tych całek będzie mogła być wyznaczona za pomocą kwadratur.*

Rozróżnimy dwa przypadki:

1° Gdy funkcya H, albo wyraźniej funkcya sił U, zawiera czas t, czyli innemi słowy, gdy całka sił żywych nie istnieje, wtedy wartości $p_1, p_2,\ldots p_k$, wyciągnięte z równań (6) w funkcyi $q_1, q_2,\ldots q_k$, $a_1, a_2,\ldots a_k$, czynią

różniczką dokładną summę

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 + \dots p_kdq_k - \mathrm{H}dt,$$

w której

$$\mathrm{H} = f(t, p_1, p_2, \dots p_k, q_1, q_2, \dots q_k).$$

Jakoż, na mocy tego co poprzedza, mamy już

$$\frac{d.p_m}{dq_n} = \frac{d.p_n}{dq_m};$$

pozostaje tylko do okazania że

$$\frac{d.p_m}{dq_n} = -\frac{d.\mathrm{H}}{dq_m},$$

to jest że

$$\frac{dp_m}{dt} + \sum\frac{dp_m}{dq_i}\frac{dq_i}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dq_m} - \sum\frac{d\mathrm{H}}{dp_i}\frac{dp_i}{dq_m},$$

warunki dopełnione z przyczyny równań (4), i na mocy warunków (3) które są równowarte warunkom (2).

To ustaliwszy, jeśli oznaczymy przez S całkę

$$\int(p_1dq_1 + p_2dq_2 + \dots p_kdq_k - \mathrm{H}dt),$$

będzie

$$\frac{d\mathrm{S}}{dq_i} = p_i, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{dt} = -\mathrm{H};$$

zatem S jest rozwiązaniem, mającem k stałecznych dowolnych, równania

$$\frac{d\mathrm{S}}{dt} + f(t, \frac{d\mathrm{S}}{dq_1}, \frac{d\mathrm{S}}{dq_2} \dots \dots \frac{d\mathrm{S}}{dq_k}, q_1, q_2, \dots q_k) = 0.$$

Więc, według twierdzenia *Jakobiego* (181), całki dopełniające całego rozwiązania są

$$\frac{d\mathrm{S}}{da_1} = b_1, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{da_2} = b_2, \qquad \frac{d\mathrm{S}}{da_k} = b_k.$$

Co dowodzi pierwszego przypadku.

2° Przypuśćmy że jest całka sił żywych $H = h$.

W tym przypadku zagadnienie ma $2k-1$ całek nie zawierających czasu t, i ostatnią która go zawiera. W samej rzeczy, funkcya H przedstawia się wtenczas w kształcie

$$H = F(q_1, q_2, \dots q_k, p_1, p_2 \dots p_k).$$

Można wyrazić równania zagadnienia w następującej postaci

$$\frac{dq_1}{\frac{dH}{dp_1}} = \frac{dq_2}{\frac{dH}{dp_2}} = \dots = \frac{dq_k}{\frac{dH}{dp_k}} = -\frac{dp_1}{\frac{dH}{dq_1}} = -\frac{dp_2}{\frac{dH}{dq_2}} = \dots -\frac{dp_k}{\frac{dH}{dq_k}} = dt.$$

Czas t wchodzi tylko przez swoją różniczkę; zatem otrzyma się $2k-1$ całek do których t nie wchodzi, a dopełnia się rozwiązania na przykład równaniem

$$t + \tau = \int \frac{dq_1}{\left(\frac{dH}{dp_1}\right)}.$$

Po czem, mając wiadomych k całek

(7) $H = h, \quad \varphi_1 = a_1, \quad \varphi_2 = a_2, \quad \varphi_3 = a_3, \dots \varphi_{k-1} = a_{k-1},$

sprawdzających warunki (3), uważamy że żadna z całek φ nie zawiera czasu t; bo dla każdej z nich będzie

$$\frac{d\varphi}{dt} + (\varphi, H) = 0; \quad \text{a że} \quad (\varphi, H) = 0, \quad \text{więc} \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

To ustaliwszy, jeśli z równań (7) wyciągnięto $p_1, p_2, \dots p_k$ w funkcyi ilości $q_1, q_2, \dots q_k, a_1, a_2, \dots a_k$, wyrażenie

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots p_k dq_k - h dt$$

będzie różniczką funkcyi

$$S = \int (p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots p_k dq_k) - ht = V - ht.$$

Widzimy tedy że, jako w 1ym przypadku, S jest rozwiązaniem zupełnem

równania

$$\frac{dS}{dt}+F\left(\frac{dS}{dq_1}, \frac{dS}{dq_2}, \ldots \frac{dS}{dq_k}, q_1, q_2, \ldots q_k\right)=0.$$

Więc zostające k całek są dane przez formuły

$$\frac{dV}{da_1}=b_1, \quad \frac{dV}{da_2}=b_2, \ldots \quad \frac{dV}{da_{k-1}}=b_{k-1}, \quad \frac{dV}{dh}-t=\tau.$$

ponieważ

$$\frac{dS}{da_i}=\frac{dV}{da_i} \quad \text{i} \quad \frac{dS}{dh}=\frac{dV}{dh}-t.$$

Zastosowanie (*). Uważajmy ruch punktu materyalnego przyciąganego przez siłę środkową. Jeśli weźmiemy dwie osie, spółrzędnych prostokątnych, przechodzące przez środek przyciągający i na tej samej płaszczyznie z prędkością początkową, równania ruchu będą:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}=-f(r)\frac{q_1}{r}, \quad \frac{d^2q_2}{dt^2}=-f(r)\frac{q_2}{r},$$

gdzie

$$q_1^2+q_2^2=r^2.$$

Całka sił żywych jest

$$\frac{1}{2}(q_1'^2+q_2'^2)=h-\rho$$

gdzie

$$\rho=\int f(r)dr; \quad \text{co daje} \quad H=\frac{1}{2}(q_1'^2+q_2'^2)+\rho=h.$$

Owoż, $\frac{dH}{dq'_1}=q'_1$, $\frac{dH}{dq'_1}=q'_2$; więc $q'_1=p_1$, $q'_2=p_2$.

Zatem można pisać całkę sił żywych w kształcie

(8) $$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)+\rho=h.$$

(*) Imschenetski, prof. à l'Université de Kazan, *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Paris, 1870.

Zważając teraz że

$$\frac{dH}{dq_1}=\frac{d\rho}{dr}\frac{dr}{dq_1}=-f(r)\frac{q_1}{r},$$

$$\frac{dH}{dq_2}=\frac{d\rho}{dr}\frac{dr}{dq_2}=-f(r)\frac{q_2}{r};$$

widzimy łatwo że cała rzecz przywodzi się do układu kanonicznego

$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{dH}{dp_1},\qquad \frac{dq_2}{dt}=\frac{dH}{dp_2}$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{dH}{dq_1},\qquad \frac{dp_2}{dt}=-\frac{dH}{dq_2}$$

którego mamy całkę pierwszą.

Drugą całką jest *całka powierzchni* którą można pisać

(9) $$q_1p_2-q_2p_1=a_1.$$

Trzeba sprawdzić warunek $(a, H)=0$. Dla dogodnego wykonania rachunku, urządza się następującą tablicę

	a	H
q_1	p_2	$-f(r)\frac{q_2}{r}$
p_1	$-q_2$	p_1
q_2	$-p_1$	$-f(r)\frac{q_1}{r}$
p_2	q_1	p_2

W kratce będącej na przecięciu linii q_1 z kolumną a, wpisuje się pochodnę cząstkową $\frac{da}{dq_1}$... etc., zkąd się zaraz wywodzi

$$(a, \mathrm{H}) = p_1p_2 - f(r)\frac{q_1q_2}{r} - p_1p_2 + f(r)\frac{q_1q_2}{r} = 0.$$

Z równań (6) i (9) możemy zaraz wyciągnąć p_1 i p_2 w funkcyi q_1, q_2, a i h. Znajdujemy

$$p_1 = \frac{-aq_2 \pm \mathrm{R}q_1}{r^2} \quad \text{i} \quad p_2 = \frac{aq_1 \pm \mathrm{R}q_2}{r^2},$$

gdzie

$$\mathrm{R} = \sqrt{2(h-\rho)r^2 - a^2};$$

zatem

$$d\mathrm{V} = a\frac{q_1dq_2 - q_2dq_1}{r^2} \pm \frac{dr}{r}\mathrm{R},$$

zkąd

$$\mathrm{V} = a \operatorname{arc} tg \frac{q_2}{q_1} \pm \int \frac{\mathrm{R}dr}{r}.$$

Owoż

$$\frac{d}{da}\int\frac{\mathrm{R}dr}{r} = \int\frac{rd}{r}\frac{d\mathrm{R}}{da} = -a\int\frac{dr}{\mathrm{R}r}.$$

$$\frac{d}{dh}\int\frac{\mathrm{R}dr}{r} = \int\frac{dr}{r}\frac{d\mathrm{R}}{dh} = \int\frac{dr}{\mathrm{R}r}.$$

Więc całki zostające do znalezienia są

$$\frac{d\mathrm{V}}{da} = b = \operatorname{arc} tg \frac{q_1}{q_2} \pm a\int\frac{dr}{\mathrm{R}r},$$

$$\frac{d\mathrm{V}}{dh} - t = \tau = \pm\int\frac{dr}{\mathrm{R}r} - t.$$

Pierwsza jest równaniem krążnej, druga daje położenie punktu ruchomego w epoce t.

Uwaga. Sprobójmy zastosować poprzedzającą metodę do przestrzeni, biorąc trzy osie spółrzędnych prostokątnych jakichkolwiek.

Równania różniczkowe ruchu w tym przypadku są:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}=-\frac{q_1}{r}f(r),\qquad \frac{d^2q_2}{dt^2}=-\frac{q_2}{r}f(r),\qquad \frac{d^2q_3}{dt^2}=-\frac{q_3}{r}f(r);$$

gdzie

$$q_1^2+q_2^2+q_3^2=r^2.$$

Kładąc $\rho=\int f(r)dr$, będziemy mieli równanie sił żywych jako wprzódy,

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+\rho=h.$$

Mamy potem trzy równania powierzchni

$$\varphi_1=q_2p_3-q_3p_2=a_1,$$
$$\varphi_2=q_3p_1-q_1p_3=a_2,$$
$$\varphi_3=q_1p_2-q_2p_1=a_3.$$

Oczywiście sprawdza się że

$$(\varphi_1, H)=0,\qquad (\varphi_2, H)=0,\qquad (\varphi_3, H)=0.$$

Gdyby warunkowi $(\varphi_1, \varphi_2)=0$, na przykład, stawało się zadość, wtedy możnaby już, mając trzy całki φ_1, φ_2, H, dokończyć rozwiązania zagadnienia.

Owoż znajdujemy

$$(\varphi_1, \varphi_2)=\varphi_3,$$
$$(\varphi_2, \varphi_3)=\varphi_1,$$
$$(\varphi_3, \varphi_1)=\varphi_2;$$

Więc trzy całki *powierzchni* posiadają tę własność że, wykonywając na dwóch z pomiędzy nich rachunki wskazane przez nawiasy *Poissona*, otrzymujemy trzecią. Innemi słowy, gdy są wiadome dwie całki φ_1, φ_2, równając nawias (φ_1, φ_2) do statecznej dowolnej, to jest kładąc $(\varphi_1, \varphi_2)=$ *stat.*

otrzymuje się nową całkę. Ta ciekawa własność stanowi znamienite twierdzenie *Poissona*, którem się teraz zajmiemy. Ale możemy już naprzód powiedzieć że nie wszystkie całki zagadnienia Mechaniki mają rzeczoną własność, ponieważ na przykład (φ, H) jest tosamością zero.

Aby ułatwić dowodzenie twierdzenia *Poissona*, przypominamy dwie własności funkcyj (φ, ψ) zmiennych $p_1, p_2, \ldots p_k, q_1$ i $q_2, \ldots q_k$.

Niech będą dwie funkcye φ, ψ wyrażone przez

$$\varphi(p_1, p_2 \ldots p_k, q_1, q_2, \ldots q_k) \quad \text{i} \quad \psi(u_1, u_2, \ldots u_m),$$

gdzie $u_1, u_2, \ldots u_m$ są funkcyami zmiennych p i q.

Mamy

$$(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{n=k} \begin{bmatrix} \frac{d\varphi}{dq_n}, & \frac{d\psi}{du_1}\frac{du_1}{dq_n} + \frac{d\psi}{du_2}\frac{du_2}{dq_n} + \ldots \\ \frac{d\varphi}{dp_n}, & \frac{d\psi}{du_1}\frac{du_1}{dp_n} + \frac{d\psi}{du_2}\frac{du_2}{dp_n} + \ldots \end{bmatrix}$$

albo

$$(1) \qquad (\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{n=m} (\varphi, u_n) \frac{d\psi}{du_n}.$$

Uważając t za zmienną jakąkolwiek, mamy drugą własność

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum \begin{bmatrix} \frac{d^2\varphi}{dq_n dt}, & \frac{d\psi}{dq_n} \\ \frac{d^2\varphi}{dp_n dt}, & \frac{d\psi}{pp_n} \end{bmatrix} + \sum \begin{bmatrix} \frac{d\varphi}{dq_n}, & \frac{d^2\psi}{dq_n dt} \\ \frac{d\varphi}{dp_n}, & \frac{d^2\psi}{dp_n dt} \end{bmatrix}$$

więc

$$(2) \qquad \frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{d\psi}{dt}\right).$$

Oto jeszcze twierdzenie *Jakobiego*, którego potrzebujemy :

Twierdzenie. *Jeśli* φ, ψ, χ *oznaczają trzy funkcye zmiennych* p, q, *będzie tożsamość*

$$(3) \qquad (\varphi, (\psi, \chi)) + (\psi, (\chi, \varphi)) + (\chi, (\varphi, \psi)) = 0.$$

Następujące bardzo proste dowodzenie zostało dane przez P^a^ *Imschenetskiego* w dziele przytoczonem wyżej.

W formule (1) zastąpmy ψ przez (ψ, χ); ponieważ jest

$$(\psi, \chi) = \sum\left(\frac{d\psi}{dq_n}\frac{d\chi}{dp_n} - \frac{d\psi}{dp_n}\frac{d\chi}{dq_n}\right),$$

funkcye u są: $\quad \frac{d\psi}{dq_1}, \frac{d\psi}{dp_1}, \frac{d\chi}{dq_1}, \frac{d\chi}{dp_1}, \ldots$ Więc

$$(\varphi, (\psi, \chi)) = \sum\left[\left(\varphi, \frac{d\psi}{dq_n}\right)\frac{d\chi}{dp_n} - \left(\varphi, \frac{d\psi}{dp_n}\right)\frac{d\chi}{dq_n}\right]$$

$$+\sum\left[\left(\varphi, \frac{d\chi}{dp_n}\right)\frac{d\psi}{dq_n} - \left(\varphi, \frac{d\chi}{dq_n}\right)\frac{d\psi}{dp_n}\right]$$

albo

$$(4) \quad (\varphi, (\psi, \chi)) = \sum\begin{bmatrix}\left(\varphi, \frac{d\psi}{dq_n}\right), & \frac{d\chi}{dq_n} \\ \left(\varphi, \frac{d\psi}{dp_n}\right), & \frac{d\chi}{dp_n}\end{bmatrix} - \sum\begin{bmatrix}\left(\varphi, \frac{d\chi}{dq_n}\right), & \frac{d\psi}{dq_n} \\ \left(\varphi, \frac{d\chi}{dp_n}\right), & \frac{d\psi}{dp_n}\end{bmatrix}.$$

Zkąd, przez przemianę kołową,

$$(5) \quad (\psi, (\chi, \varphi)) = \sum\begin{bmatrix}\left(\psi, \frac{d\chi}{dq_n}\right), & \frac{d\varphi}{dq_n} \\ \left(\psi, \frac{d\chi}{dp_n}\right), & \frac{d\varphi}{dp_n}\end{bmatrix} - \sum\begin{bmatrix}\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dq_n}\right), & \frac{d\chi}{dq_n} \\ \left(\psi, \frac{d\varphi}{dp_n}\right), & \frac{d\chi}{dp_n}\end{bmatrix}$$

Poczem, na mocy równania (2) mamy

$$(6) \quad (\chi, (\varphi, \psi)) = \sum\begin{bmatrix}\frac{d\chi}{dq_n}, & \left(\frac{d\varphi}{dq_n}, \psi\right) \\ \frac{d\chi}{dp_n}, & \left(\frac{d\varphi}{dp_n}, \psi\right)\end{bmatrix} + \sum\begin{bmatrix}\frac{d\chi}{dq_n}, & \left(\varphi, \frac{d\psi}{dq_n}\right) \\ \frac{d\chi}{dp_n}, & \left(\varphi, \frac{d\psi}{dp_n}\right)\end{bmatrix}$$

Dodając stronami równania (4), (5), (6); nazywając V pierwszą stronę,

będzie po wszystkich redukcyach,

$$(7)\qquad V=\sum\begin{bmatrix}\left(\psi, \frac{d\chi}{dq_n}\right), & \frac{d\varphi}{dq_n}\\ \left(\psi, \frac{d\chi}{dp_n}\right), & \frac{d\varphi}{dp_n}\end{bmatrix}-\sum\begin{bmatrix}\left(\varphi, \frac{d\chi}{dq_n}\right), & \frac{d\psi}{dq_n}\\ \left(\varphi, \frac{d\chi}{dp_n}\right), & \frac{d\psi}{dp_n}\end{bmatrix}.$$

Owoż pierwsza strona tego równania jest symetryczna na φ, ψ, χ; więc, jeśli zrobimy dwie przemiany kołowe po sobie następujące, będziemy mieli:

$$(8)\qquad V=\sum\begin{bmatrix}\left(\chi, \frac{d\varphi}{dq_n}\right), & \frac{d\psi}{dq_n}\\ \left(\chi, \frac{d\varphi}{dp_n}\right), & \frac{d\psi}{dp_n}\end{bmatrix}-\sum\begin{bmatrix}\left(\psi, \frac{d\varphi}{dq_n}\right), & \frac{d\chi}{dq_n}\\ \left(\psi, \frac{d\varphi}{dp_n}\right), & \frac{d\chi}{dp_n}\end{bmatrix}.$$

$$(9)\qquad V=\sum\begin{bmatrix}\left(\varphi, \frac{d\psi}{dq_n}\right), & \frac{d\chi}{dq_n}\\ \left(\varphi, \frac{d\psi}{dp_n}\right), & \frac{d\chi}{dp_n}\end{bmatrix}-\sum\begin{bmatrix}\left(\chi, \frac{d\psi}{dq_n}\right), & \frac{d\varphi}{dq_n}\\ \left(\chi, \frac{d\psi}{dp_n}\right), & \frac{d\varphi}{dp_n}\end{bmatrix}.$$

Nakoniec, dodajmy stronami równania (7), (8), (9), otrzymamy

$$3V = -3V, \qquad \text{więc} \qquad V = 0.$$

c. b. d. d.

TWIERDZENIE POISSONA.

Jeśli $\varphi = a$ *i* $\psi = b$ *są dwiema całkami układu kanonicznego*

$$\frac{dq_n}{dt}=\frac{dH}{dp_n}, \qquad \frac{dp_n}{dt}=-\frac{dH}{dq_n},$$

otrzyma się nową całkę pisząc

$$(\varphi, \psi) = stat.$$

Aby tego dowieśdź, dość będzie okazać że istnieje równanie

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} + (\mathrm{H}, (\varphi, \psi)) = 0.$$

Owoż,

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \left(\frac{d\varphi}{dt}, \psi\right) + \left(\varphi, \frac{d\psi}{dt}\right),$$

mamy zaś

$$\frac{d\varphi}{dt} = (\varphi, \mathrm{H}), \qquad \frac{d\psi}{dt} = (\psi, \mathrm{H}),$$

dlatego że φ i ψ są całkami układu; więc

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = ((\varphi, \mathrm{H}), \psi) + (\varphi, (\psi, \mathrm{H})),$$

i tożsamość do sprawdzenia jest

$$(\varphi, (\psi, \mathrm{H})) + ((\varphi, \mathrm{H}), \psi) + (\mathrm{H}, (\varphi, \psi)) = 0.$$

albo

$$(\varphi, (\psi, \mathrm{H})) + (\psi, (\mathrm{H}, \varphi)) + (\mathrm{H}, (\varphi, \psi)) = 0.$$

Co właśnie ma miejsce na mocy twierdzenia *Jakobiego*. To dowodzenie dał *P. Donkin* (*).

Uwaga. Zdawałoby się że znajomość dwóch całek ruchu może dostarczyć wiele innych; albowiem, jeśli $(\varphi, \psi) = \varphi_1$ jest całką, $(\varphi, \varphi_1) = \varphi_2$ będzie nową całką; i tak dalej. Z tego punktu widzenia uważane twierdzenie *Poissona* nie przynosi rzeczywistej korzyści. Jakoż, żeby $(\varphi, \psi) =$ *stat.* było nową całką, trzeba żeby wynik działańwskazanych przez symbol (φ, ψ) nie stawał się tożsamie funkcyą jednej z dwóch całek ϕ albo ψ, ani się przywodził do ilości stałecznej, licząc w to zero. Owoż, można powiedzieć że w ogóle jedna z tych dwóch okoliczności najczęściej się przedstawia, i twierdzenie nic nie daje. Zdarza się nawet że twierdzenie *Poissona* nie stosuje się do żadnej kombinacyi całek zagadnienia; jak to okazał P. *Bertrand* w dzienniku *Liouvilla* 1852 r. Mimo tego, *Jakobi*, uwielbiając

---

(*) *On class of differential equations.* (Philosophical transactions, 1854.)

z entuzyazmem twierdzenie *Poissona*, mówi że jest jednem z największych odkryć nowoczesnych. Piękna teorya *Jakobiego* równań o pochodnych cząstkowych była natchniona tem twierdzeniem. Niezaprzeczalnie twierdzenie *Poissona* ma wielką teoryczną ważność; P. *Bertrand*, na przypadkach do których się ono nie stosuje, oparł metodę całkowania równań Dynamiki. Ciekawy czytelnik znajdzie ją w notach do *Mechaniki analitycznej Lagrange'a*, wyd. 3[e].

IV. TEORYA OSTATNIEGO MNOŻNIKA JAKOBIEGO.

Przypomnę najpierwej główne własności *wyznacznika funkcyjnego*

$$D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) = \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx_1} & \frac{d\varphi_1}{dx_2} \cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx_1} & \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx_1} & \cdots\cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \end{vmatrix}$$

n funkcyj o n zmiennych niezależnych $x_1, x_2, \ldots x_n$, to jest

$$\varphi_1 = \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n),\quad \varphi_2 = \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n), \ldots \varphi_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

Ten wyznacznik gra w układzie n funkcyj $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ taką samą rolę jaką gra pochodna względem funkcyi o jednej zmiennej niezależnej.

TWIERDZENIE. Jeśli się przypisuje każdej zmiennej nieskończenie mały przyrost dowolny, wynika ztąd dla każdej zmiennej odpowiadająca cała różniczka, i będzie

$$D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n) = \begin{vmatrix} d_1\varphi_1 & d_1\varphi_2 \ldots & d_1\varphi_n \\ d_2\varphi_1 & d_2\varphi_2 \ldots & d_2\varphi_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ d_n\varphi_1 & d_n\varphi_2 \ldots & d_n\varphi_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1x_1 & d_1x_2 \ldots & d_1x_n \\ d_2x_1 & d_2x_2 \ldots & d_2x_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ d_nx_1 & d_nx_2 \ldots & d_nx_n \end{vmatrix}$$

gdzie charakterystyki $d_1, d_2, \ldots d_n$ wskazują n układów przyrostów nieskończenie małych, i różniczek odpowiedających.

Dla tej przyczyny używa się korzystnie następującej notacyi

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \dots x_n)}$$

do wyrażenia wyznacznika układu funkcyj φ wziętego względem zmiennych x.

Jeśli przyzwoicie wybrano przyrosty, będzie

$$D = \begin{vmatrix} d_1\varphi_1 0 & 0 \dots\dots 0 \\ d_2\varphi^1 d_2\varphi_2 & 0 \dots\dots 0 \\ d_2\varphi_1 d_2\varphi_2 d_1\varphi_3 & 0 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ d_n\varphi_1 d_n\varphi_2 \dots\dots & d_n\varphi_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1x_1 d_1x_2 \dots\dots\dots\dots d_1x_n \\ 0 d_2x_2 \dots\dots\dots\dots d_2x_n \\ 0 0 d_3x_3 \dots\dots\dots\dots d_3x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 0 0 \dots\dots\dots\dots 0 d_nx_n \end{vmatrix}$$

to jest

$$D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n) = \left(\frac{d_1\varphi_1}{d_1x_1}\right) \cdot \left(\frac{d_2\varphi_2}{d_2x_2}\right) \dots\dots \left(\frac{d_n\varphi_n}{d_nx_n}\right).$$

Dla wyrachowania tych pochodnych cząstkowych, trzeba utworzyć następujące funkcye

$$\varphi_1 = \Phi_1(x_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots\dots \varphi_n)$$

$$\varphi_2 = \Phi_2(x_1, x_2, \varphi_3 \dots\dots \varphi_n)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_{n-1} = \Phi_{n-1}(x_1, x_2, \dots x_{n-1}, \varphi_n)$$

$$\varphi_n = \Phi_n(x_1, x_2, \dots\dots x_n).$$

Tak że będzie

$$D = \frac{d\Phi_1}{dx_1} \cdot \frac{d\Phi_2}{dx_2}, \dots\dots \frac{d\Phi_n}{dx_n}.$$

Ztąd wnosimy zaraz

Twierdzenie fundamentalne : *Jeśli istnieje między funkcyami* $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ *związek niezależny od zmiennych, wyznacznik* D *jest*

zero. I nawzajem, jeśli D = 0, *jest przynajmniej jeden związek między funkcyami.*

To ustaliwszy, przechodzimy do teoryi ostatniego mnożnika. Żeby ją lepiej dać zrozumieć, przypomnimy teoryę Eulera ostatniego mnożnika którego obecna jest zogólnieniem.

Wiadomo że równanie różniczkowe pierwszego rzędu

$$(1) \qquad M dx + N dy = 0,$$

ma zawsze całkę zawierającą stateczną dowolną C. Ta całka rozwiązana względem statecznej dowolnej bierze kształt

$$(2) \qquad u = C$$

w którym u jest funkcyą zmiennych x i y, niezależną od C.

Ostatnie równanie zróżniczkowane daje

$$(3) \qquad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0.$$

Z porównania dwóch związków (1) i (3) wynika nie równanie ale tożsamość

$$(4) \qquad \frac{\frac{du}{dx}}{M} = \frac{\frac{du}{dy}}{N} = v,$$

gdzie v oznacza każdy z dwóch ilorazów.

Ztąd wywodzimy

$$\frac{du}{dx} = Mv, \qquad \frac{du}{dy} = Nv.$$

Owoż wiemy że

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy;$$

mamy więc

$$v(M dx + N dy) = du.$$

Tym sposobem zostaje dowiedzione że, jakiekolwiek są spółczynniki M i N, istnieje zawsze pewny czynnik v, będący funkcyą zmiennych x i y, który czyni pierwszą stronę równania (1) różniczką dokładną. Oczywiście $v\varphi(u)$ ma tę samą własność, jakakolwiek jest funkcya φ. Widzimy potem że wszelki czynnik V posiadający tę własność jest koniecznie kształtu

$$V = v\varphi(u).$$

Albowiem, jeśli jest

$$vMdx + vNdy = du,$$

$$VMdx + VNdy = dU,$$

będzie

$$\frac{du}{dx} = vM,\quad \frac{du}{dy} = vN,\quad \frac{dU}{dx} = VM,\quad \frac{dU}{dy} = VN:$$

więc

$$D(u.U) = \begin{vmatrix} vM & vN \\ VM & VN \end{vmatrix} = 0,$$

a zatem

$$U = \psi(u).$$

Ale

$$\frac{V}{v} = \frac{dU}{du} = \psi'(u);\qquad \text{więc}\qquad V = v\psi'(u) = v\varphi(u).$$

Nakoniec, jeśli są wiadome dwie wartości dla V, to jest V i V_1, będzie

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\varphi(u)}{\varphi_1(u)}.$$

Więc $\qquad V = CV_1 \qquad$ jest całką ogólną.

Niech będzie teraz do całkowania równanie różniczkowe rzędu m.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0.$$

Połóżmy

$$\frac{dy}{dx} = y',\quad \frac{dy'}{dx} = y'',\quad \frac{dy''}{dx} = y''', \ldots \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y^{(m-1)};$$

zagadnienie przywodzi się do całkowania układu m równań jednoczesnych pierwszego rzędu

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(m-1)} \frac{dy^{(m-1)}}{dx}\right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \ldots \frac{dy^{(m-2)}}{dx} = y^{(m-1)}.$$

Widzimy że ten układ jest szczególnym przypadkiem następującego

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

w którym $X, X_1, X_2 \ldots X_n$ wyrażają $n+1$ funkcyj zmiennych $x, x_1, x_2, \ldots x_n$.

Uważajmy najpierwej przypadek trzech zmiennych niezależnych, i niech będzie układ

$$(1) \qquad \frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Zcałkować te równania jestto znaleźć dwie funkcye f i φ takie, żeby równając je do stałecznych dowolnych, można było wywieśdź z równań

$$f(x, y, z) = \alpha, \qquad \varphi(x, y, z) = \beta,$$

wartości dx, dy, dz proporcyonalne do funkcyj danych. Powinno tedy być

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{df}{dx} X + \frac{df}{dy} Y + \frac{df}{dz} Z &= 0, \\ \frac{d\varphi}{dx} X + \frac{d\varphi}{dy} Y + \frac{d\varphi}{dz} Z &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli więc położymy

$$A = \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy}, \quad B = \frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dz}, \quad C = \frac{df}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy}\frac{d\varphi}{dx},$$

dwa poprzedzające równania staną się

$$\frac{X}{A}=\frac{Y}{B}=\frac{Z}{C}.$$

Te związki są tożsamościami; bo inaczej oneby stanowiły między x, y, z, względności bez statecznych dowolnych; a my się zajmujemy samą tylko całką ogólną. To ustaliwszy, jeśli $\frac{1}{\mu}$ jest funkcyą do jakiej się przywodzą tożsamie wyrazy poprzedzającej proporcyi, będzie

$$\mu X = A, \qquad \mu Y = B, \qquad \mu Z = C.$$

Owoż łatwo sprawdzić równość

$$\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dy}+\frac{dC}{dz}=0;$$

więc czynnik μ zadość czyni równaniu różniczkowemu cząstkowemu

(3) $$\mu\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+X\frac{d\mu}{dx}+Y\frac{d\mu}{dy}+Z\frac{d\mu}{dz}=0.$$

Własności czynnika μ. Jeśli są wiadome dwa rozwiązania μ_1 i μ_2 poprzedzającego równania, $\frac{\mu_1}{\mu_2}=\gamma$ będzie całką zadanego układu; gdzie γ znaczy stateczną dowolną.

Jakoż,

$$\mu_1\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+X\frac{d\mu_1}{dx}+Y\frac{d\mu_1}{dy}+Z\frac{d\mu_1}{dz}=0,$$

$$\mu_2\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+X\frac{d\mu_2}{dx}+Y\frac{d\mu_2}{dy}+Z\frac{d\mu_2}{dz}=0;$$

więc

$$X\left(\mu_2\frac{d\mu_1}{dx}-\mu_1\frac{d\mu_2}{dx}\right)+Y\left(\mu_2\frac{d\mu_1}{dy}-\mu_1\frac{d\mu_2}{dy}\right)+Z\left(\mu_2\frac{d\mu_1}{dz}-\mu_1\frac{d\mu_2}{dz}\right)=0$$

zkąd

$$X\frac{d\frac{\mu_1}{\mu_2}}{dx}+Y\frac{d\frac{\mu_1}{\mu_2}}{dy}+Z\frac{d\frac{\mu_1}{\mu_2}}{dz}=0,$$

czyli że $\frac{\mu_1}{\mu_2}=\gamma$ jest całką.

Oto teraz najważniejsza własność: *Jeśli jest znane jedno rozwiązanie równania na μ, dość jest mieć jedną tylko całkę zadanego układu; druga będzie wtedy dana przez kwadraturę.*

Niech będzie, w samej rzeczy, $f(x, y, z)=\alpha$ znaleziona całka; z może być uważana jako funkcya zmiennych x i y, i układ przywodzi się do

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y},$$

gdzie w X i Y zastąpiono z przez x, y, α. Powiadam że, ponieważ μ jest jednem rozwiązaniem równania (3), $\frac{\mu}{\left(\frac{df}{dz}\right)}$ będzie czynnikiem który zrobi

$$Ydx - Xdy \qquad \text{różniczką dokładną.}$$

To jest $\frac{\mu Y}{\left(\frac{df}{dz}\right)}dx-\frac{\mu X}{\left(\frac{df}{dz}\right)}dy$ powinno być różniczką dokładną,

doliczając do tego $f(x, y, z)=\alpha$.

Oznaczymy przez $\varphi(x, y, z)=\beta$ drugą całkę, i przypuśćmy ją wyrażaną przez x, y, z i f, w ten sposób żeby było

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)=\frac{d\varphi}{df}\frac{df}{dz},\quad \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\frac{d\varphi}{df}\frac{df}{dx}+\frac{d\varphi}{dx},\quad \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=\frac{d\varphi}{df}\frac{df}{dy}+\frac{d\varphi}{dy};$$

będzie tedy

$$\mu X=A=\frac{df}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-\frac{df}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)=-\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dy},$$

$$\mu Y=B=\frac{df}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)-\frac{df}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)=\frac{df}{dz}\frac{d\varphi}{dx}.$$

Zatem

$$\frac{\mu Y}{\frac{df}{dz}}dx - \frac{\mu X}{\frac{df}{dz}}dy = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy.$$

Więc druga całka jest

$$(4) \qquad \int \frac{\mu Y dx - \mu X dy}{\frac{df}{dz}} = \gamma.$$

Uwaga. W pewnych przypadkach, można łatwo znaleźć czynnik μ.

Niech będzie równanie

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \psi(x, y)$$

które, jeśli położymy $\frac{dy}{dx} = y'$, wychodzi na jedno co układ

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y'} = \frac{dy'}{\psi(x, y)}.$$

Zatem równanie na μ jest

$$\frac{d\mu}{dx} + y'\frac{d\mu}{dy} + \psi\frac{d\mu}{dy'} = 0,$$

i sprawdza się przez $\mu = 1$. Jeśli więc znaleziono całkę pierwszą $f(x, y, z) = \alpha$, druga całka będzie

$$\int \frac{y'dx - dy}{\frac{df}{dy'}} = \gamma,$$

w niej y' jest zastąpione przez swoją wartość w α i y wyciągniętą z funkcyi $f(x, y, y') = \alpha$.

Oto jeszcze drugi przypadek szczególny. Równanie na μ może się pisać

$$\frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\mu}{dx}+\frac{Y}{X}\frac{d\mu}{dy}+\frac{Z}{X}\frac{d\mu}{dz}\right)=0,$$

ale

$$\frac{Y}{X}=\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{Z}{X}=\frac{dz}{dx},$$

więc

$$\frac{1}{X}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)+d.\log\mu=0,$$

gdzie x jest uważane jako zmienna niezależna. Więc, jeśli pierwsza część tego równania jest różniczką dokładną, $d.\log\psi(x, y, z)$, będzie można wziąć

$$\mu=\frac{1}{\psi(x, y, z)}.$$

Przypadek ogólny. Niech będzie do całkowania układ

$$(5) \qquad \frac{dx}{X}=\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\ldots\ldots=\frac{dx_n}{X_n},$$

i przedstawmy równania całkowe przez

$$\alpha_1=\varphi_1(x, x_1, x_2,\ldots x_n), \qquad \alpha_2=\varphi_2(x, x_1, x_2,\ldots x_n), \ldots$$

$$\alpha_n=\varphi_n(x, x_1, x_2\ldots x_n);$$

ztąd się wywodzi układ

$$(6) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\varphi_1}{dx}X+\frac{d\varphi_1}{dx_1}X_1+\ldots\ldots\frac{d\varphi_1}{dx_n}X_n=0, \\ \frac{d\varphi_2}{dx}X+\frac{d\varphi_2}{dx_1}X_1+\ldots\ldots\frac{d\varphi_2}{dx_n}X_n=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\varphi_n}{dx}X+\frac{d\varphi_n}{dx}X_1+\ldots\ldots\frac{d\varphi_n}{dx_n}X_n=0. \end{array}\right.$$

Owoż, jeśli oznaczymy przez A, $-A_1$, A_2, ...$(-1)^n A_n$, wyznaczniki cząstkowe, otrzymane przez kolejne zniesienie każdej kolumny układu mającego n linij i $n+1$ kolumn,

$$\begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx} & \frac{d\varphi_1}{dx_1} \cdots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_2}{dx} & \cdots\cdots\cdots & \frac{d\varphi_2}{dx_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx} & \frac{d\varphi_n}{dx_1} \cdots & \frac{d\varphi_n}{dx_n} \end{vmatrix},$$

równania (6) w liczbie n, jednorodne między $n+1$ zmiennemi X, X_1, X_2....X_n, dadzą

$$\frac{X}{A} = \frac{X_1}{A_1} = \frac{X_2}{A_2} = \ldots\ldots = \frac{X_n}{A_n}.$$

Te równania są tożsame tak jak w przypadku trzech zmiennnych; z nich, nazywając $\frac{1}{\mu}$ funkcyę do której się przywodzi każdy stosunek, wyprowadzamy

$$\mu X = A, \quad \mu X_1 = A_1, \ldots\ldots \mu X_n = A_n$$

Zkądinąd trzeba pamiętać że jest, wedle wiadomej notacyi,

$$\mu = \frac{A}{X} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} \times \frac{1}{X}.$$

UWAGA. Można było wziąć za równania całkowe układ

$$\beta_1 = \psi_1(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n),$$

$$\beta_2 = \psi_2(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\beta_n = \psi_n(x, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n);$$

wiedząc że

$$\psi_1 = F_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n), \quad \psi_2 = F_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n), \ldots \quad \psi_n = F_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n).$$

A jeśli oznaczono jako dopiero co, przez $B, -B_1, B_2, \ldots\ldots (-1)^n B_n$ wyznaczniki wywiedzione z pochodnych cząstkowych funkcyj ψ, będzie

$$\frac{X}{B} = \frac{X_1}{B_1} = \ldots\ldots = \frac{X_n}{B_n} = \frac{1}{\nu},$$

$$B = \nu X, \qquad B_1 = \nu X_1, \ldots\ldots B_n = \nu X_n.$$

Powiedam teraz że $\frac{\mu}{\nu} = \gamma$ jest całką. Jakoż

$$\mu = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} \cdot \frac{1}{X}, \qquad \nu = \frac{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} \cdot \frac{1}{X}.$$

Więc

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n)} = F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n).$$

Czynnik μ zadość czyni równaniu różniczkowemu cząstkowemu.

Powiedam że jest tożsamość

$$(7) \qquad \frac{dA}{dx} + \frac{dA_1}{dx_1} + \frac{dA_2}{dx_2} + \ldots\ldots \frac{dA_n}{dx_n} = 0.$$

Uważając że A_k nie zawiera żadnego wyrazu mającego kształt $\frac{d\varphi_r}{dx_k}$, widzimy że pierwsza strona równania (7) nie będzie zawierała wyrazów kształtu $\frac{d^2\varphi_r}{dx_k^2}$. Szukajmy spółczynnika pochodnej $\frac{d^2\varphi_r}{dx_i dx_k}$ na przykład. Ten spółczynnik może pochodzić z dwóch tylko wyrazów $\frac{dA_i}{dx_i}$ i $\frac{dA_k}{dx_k}$. Owoż, mamy

$$A_i = a_1 \frac{d\varphi_1}{dx_k} + a_2 \frac{d\varphi_2}{dx_k} + \ldots + a_r \frac{d\varphi_r}{dx_k} + \ldots + d_n \frac{d\varphi_n}{dx_k}$$

co daje wyraz

$$a_r \frac{d^2\varphi_r}{dx_i dx_k}.$$

Tak samo pisząc A_k w kształcie

$$A_k = b_1 \frac{d\varphi_1}{dx_i} + b_2 \frac{d\varphi_2}{dx_i} + \dots b_r \frac{d\varphi_r}{dx_i} + \dots + b_n \frac{d\varphi_n}{dx_i},$$

mamy wyraz

$$b_r \frac{d^2\varphi_r}{dx_i dx_k}.$$

Wszystko się więc przywodzi do okazania że

$$a_r + b_r = 0.$$

Owoż niech będzie $k < i$; mamy

$$A_i = (-1)^i \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx} & \frac{d\varphi_1}{dx_1} \dots \frac{d\varphi_1}{dx_k} \dots \frac{d\varphi_1}{dx_{i-1}} & \frac{d\varphi_1}{dx_{i+1}} \dots \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_r}{dx} & \frac{d\varphi_r}{dx_1} \dots \\ \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_n}{dx} & \dots \end{vmatrix}.$$

Więc

$$a_r = (-1)^i \cdot (-1)^k \cdot (-1)^{r+1} \Delta,$$

Δ jest wyznacznikiem który się wywodzi z poprzedzającego, znosząc kolumnę rzędu $k+1$ i linię rzędu r; co daje

$$a_r = (-1)^{i+k+r+1} \Delta.$$

Ale jest podobnie

$$\Delta_k = (-1)^k \begin{vmatrix} \frac{d\varphi_1}{dx} & \frac{d\varphi_1}{dx_1} \cdots \frac{d\varphi_1}{dx_{k-1}} & \frac{d\varphi_1}{dx_{k+1}} \cdots \frac{d\varphi_1}{dx_i} \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_2}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d\varphi_n}{dx} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix},$$

i

$$b_r = (-1)^k (-1)^{i-1} (-1)^{r+1} \Delta$$

Δ ten sam wyznacznik;

albo

$$b_r = (-1)^{i+k+r} \Delta = -a_r$$

to jest

$$a_r + b_r = 0.$$

Mamy więc nakoniec

$$(8) \qquad \frac{d.\mu X}{dx} + \frac{d.\mu X_1}{dx_1} + \ldots \frac{d.\mu X_n}{dx_n} = 0.$$

Nie trudno widzieć że, tak samo jak w przypadku dwóch zmiennych, jeśli μ_1 i μ_2 są dwoma rozwiązaniami równania (8), $\frac{\mu_1}{\mu_2} = stat.$ będzie całką żądanego układu.

To ustaliwszy, szukajmy jak się przekształca μ, kiedy się bierze nowe niewiadome $v_1, v_2, \ldots v_n$ będące funkcyami zmiennych $x_1, x_2 \ldots x_k$.

Układ (5) staje się

$$(9) \qquad \frac{dv}{V} = \frac{dv_1}{V_1} = \frac{dv_2}{V_2} = \ldots = \frac{dv_n}{V_n}.$$

$V, V_1, V_2, \ldots V_n$ są tem czem się stają funkcye $X, X_1, X_2, \ldots X_n$, gdy się zastępuje $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ przez ich wartości wyrażone w funkcyi $v_1, v_2 \ldots\ldots v_n$.

Jeśli całki układu (5) są

$$\varphi_1 = \alpha_1, \quad \varphi_2 = \alpha_2, \ldots \quad \varphi_n = \alpha_n,$$

mnożnik
$$\mu = \frac{A}{X} = \frac{1}{X} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Mnożnik układu przedstawionego w kształcie (9) będzie

$$\mu_1 = \frac{1}{V} \frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n)}{D(v_1, v_2, \ldots v_n)};$$

a że $X = V$, zatem

$$\mu_1 = \mu . \frac{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}{D(v_1, v_2, \ldots v_n)}.$$

Będziemy więc mieli mnożnik po przemianie ilości niewiadomych, mnożąc dawny przez wyznacznik funkcyjny dawnych niewiadomych $x_1, x_2, \ldots x_n$ względem nowych $v_1, v_2, \ldots v_n$.

To mając, przypuśćmy że są wiadome wszystkie całki prócz jednej,

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \varphi_3, \ldots \quad \varphi_{n-1}.$$

Można wziąć za zmienne $x, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-1}, x_1$, wtedy układ przedstawi się w kształcie

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \frac{d\varphi_1}{0} = \frac{d\varphi_2}{0} = \ldots = \frac{d\varphi_{n-1}}{0}$$

to jest

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1}.$$

Więc, jeśli jest wiadomy mnożnik μ względny do pierwszego układu (5), mnożnik dla ostatniego, to jest czynnik zdolny uczynić całkowalnem wyrażenie $X_1 dx - X dx_1$ przedstawia się przez

$$\mu . \frac{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}{D(x_1, \varphi_1, \ldots \varphi_{n-1})} = \frac{\mu}{\dfrac{D(x_1, \varphi_1 \ldots \varphi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}}.$$

Mianownik jest równy wyznacznikowi

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{dx_1}, & \frac{dx_1}{dx_2}, & \dots & \frac{dx_1}{dx_n} \\ \frac{d\varphi_1}{dx_1}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_1} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, \dots & 0 \\ \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \frac{d\varphi_1}{dx_2}, & \dots & \frac{d\varphi_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\varphi_{n-1}}{dx_1} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

więc, nakoniec ostatni mnożnik jest

$$\frac{\mu}{\left\{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots x_n)}\right\}}.$$

Zatem ostatnia całka będzie

$$\int \frac{(X_1 dx - X dx_1)\mu}{\left\{\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1})}{D(x_2, x_3, \dots x_n)}\right\}} = \alpha_n. \tag{10}$$

Można jeszcze z tego co poprzedza wyprowadzić inne następstwa.

Przypuśćmy że funkcye $X, X_1, X_2, \dots X_n$ sprawdzają przez tożsamość równanie

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \dots + \frac{dX_n}{dx_n} = 0; \tag{11}$$

wtedy równanie różniczkowe na μ pokazuje że można wziąć $\mu = 1$.

Gdy się to zdarza, a jest wiadoma jedna całka

$$f(x, x_1, x_2, \dots x_n) = \alpha$$

danego układu, wyrażając x_n w funkcyi ilości $\alpha, x, x_1, \dots x_{n-1}$, będzie do całkowania nowy układ zawierający jedno równanie mniej

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{X_{n-1}};$$

gdzie $X, X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ nie mają już tego samego znaczenia co wprzódy. Przypuszcza się że x_n jest tu zastąpione przez swoją wartość wyrażoną w funkcyi $x, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, \alpha$. Wartość mnożnika odpowiedającego temu układowi jest

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, \alpha)} = \frac{1}{\left(\frac{d\alpha}{dx_n}\right)}.$$

Tak somo, jeśli istnieje tosamość

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dX_1}{dx_1} + \ldots + \frac{dX_{n-1}}{dx_{n-1}} = 0,$$

w której $X, X_1, X_2 \ldots X_{n-1}$ mają nowe znaczenie, i jeśli jest znana jedna całka tego drugiego układu,

$$\varphi(x, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) = \beta,$$

wyrażając x_{n-1} przez $x, x_1, \ldots x_{n-2}, \beta$, będziemy mieli do całkowania

$$\frac{dx}{X} = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_{n-2}}{X_{n-2}}.$$

i $\dfrac{1}{\left(\frac{d\alpha}{dx_n}\right)\left(\frac{d\beta}{dx_{n-1}}\right)}$ będzie wartością czynnika μ tego układu. I tak dalej.

ZASTOSOWANIA.

1° Ruch punktu na płaszczyznie. Równania różniczkowe ruchu są

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y.$$

Połóżmy

$$\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y':$$

zagadnienie przywodzi się do całkowania układu

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y}. \tag{12}$$

Ale dość umieć całkować układ

$$(13) \qquad \frac{dx}{x'} = \frac{dy}{y'} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y};$$

Albowiem ten ostatni da x', y' i y w funkcyi x i trzech stałecznych dowolnych. Zastępując pochodnę x' przez jej wartość wyrażoną w x, będziemy mieli czas t przez kwadraturę

$$t = \int \frac{dx}{x'}.$$

Owoż, jeśli X i Y, składowe siły poruszającej, *są niezależne od prędkości*, będzie

$$\frac{dx'}{dx} + \frac{dy'}{dy} + \frac{dX}{dx'} + \frac{dY}{dy'} = 0;$$

więc, jeśli są wiadome dwie całki układu (13)

$$(14) \qquad \begin{aligned} \alpha &= f(x, y, x', y'), \\ \beta &= \varphi(x, y, x', y'), \end{aligned}$$

trzecia będzie mogła być znaleziona *jakoby a priori*; ponieważ, nazywając γ stałeczną dowolną, mamy natychmiast tę trzecią całkę przez kwadraturę

$$\int \frac{y'dx - x'dy}{\left\{\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x', y')}\right\}} = \gamma,$$

gdzie x' i y' są wyrażone przez x i y za pomocą równań (14).

Niech będzie, dla utkwienia myśli,

$$X = x^m \qquad Y = y^m.$$

Mamy zaraz te dwie całki

$$\alpha = \frac{x'^2}{2} - \frac{x^{m+1}}{m+1}, \qquad \beta = \frac{y'^2}{2} - \frac{y^{m+1}}{m+1};$$

zkąd wyciągamy

$$\frac{D(\alpha,\ \beta)}{D(x',\ y')}=\begin{vmatrix}\frac{d\alpha}{dx'} & \frac{d\alpha}{dy'}\\ \frac{d\beta}{dx'} & \frac{d\beta}{dy'}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x' & 0\\ 0 & y'\end{vmatrix}=x'y'.$$

Zatem trzecia całka będzie

$$\gamma=\int\frac{y'dx-x'dy}{x'y'}=\int\frac{dx}{x'}-\int\frac{dy}{y'};$$

ale

$$x'=\sqrt{2\alpha+\frac{2x^{m+1}}{m+1}},\qquad y'=\sqrt{2\beta+\frac{2y^{m+1}}{m+1}};$$

więc trzecia całka jest

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+\frac{x^{m+1}}{m+1}}}-\int\frac{dy}{\sqrt{\beta+\frac{y^{m+1}}{m+1}}}=\gamma.$$

Jeśli $m=-1$, ta formuła nie stosuje się. Wtedy, ponieważ dwie pierwsze całki są

$$\alpha=\frac{1}{2}x'^2-lx,\qquad \beta=\frac{1}{2}y'^2-ly,$$

trzecia będzie dana przez

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha+lx}}-\int\frac{dy}{\sqrt{\beta+ly}}=\gamma.$$

II. RUCH PUNKTU MATERYALNEGO PRZYCIĄGANEGO PRZEZ ŚRODEK STAŁY. Równania różniczkowe ruchu są

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{r}f(r)\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{y}{r}f(r).$$

Mamy bezpośrednio dwie całki :

całkę sił żywych

$$\frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + R = \alpha \qquad \text{gdzie} \qquad R = \int f(r)dr,$$

całkę powierzchni

$$xy' - yx' = \beta.$$

Znajdujemy bez trudności

$$\frac{D(\alpha, \quad \beta)}{D(x', y')} = xx' + yy'.$$

Owoż, warunek (13) jest dopełniony; więc $\mu = 1$; zatem ostatnia całka otrzymuje się przez kwadraturę

$$\int \frac{y'dx - x'dy}{xx' + yy'} = \gamma,$$

Ale trzeba wyrazić x' i y' w funkcyi zmiennych x i y. Dochodzimy do tego dość łatwo sposobem następującym.

Mamy

$$x'^2 + y'^2 = 2(\alpha - R),$$

zkąd

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = 2(\alpha - R)r^2,$$

albo jeszcze

$$(xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2 = 2(\alpha - R)r^2.$$

Zatem

$$(xx' + yy')^2 = 2(\alpha - R)r - \beta^2,$$

zkąd

$$xx' + yx' = \rho, \qquad \text{kładąc} \qquad \rho = \sqrt{2(\alpha - R)r^2 - \beta^2}.$$

To mając, z dwóch równań

$$y'x - x'y = \beta, \qquad xx' + yy' = \rho$$

wyciągamy

$$x' = \frac{\rho x - \beta y}{r^2}, \qquad y' = \frac{\beta x + \rho y}{r^2};$$

więc całka staje się

$$\int \frac{y dx - x dy}{r^2} + \beta \int \frac{dr}{\rho r} = \gamma.$$

albo, kładąc

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x},$$

(15) $$\theta + \gamma = \beta \int \frac{dr}{r\sqrt{2(\alpha - R)r^2 - \beta^2}}.$$

Dla dokończenia rachunku użyje się całki powierzchni, wyrażonej w kształcie

$$\frac{r^2 d\theta}{dt} =$$

która daje

(16) $$t + \tau = \int \frac{r dr}{\sqrt{2(\alpha - R)r^2 - \beta^2}}.$$

Niech będzie, dla utkwienia myśli, $R = -\frac{\mu}{r}$; całka (16) staje się

$$\theta + \gamma = \beta \int \frac{-d\frac{1}{r}}{\sqrt{2\left(\alpha + \frac{\mu}{r}\right) - \frac{\beta^2}{r^2}}},$$

albo, czyniąc $\frac{1}{r} = u$,

$$\theta + \gamma = -\beta \int \frac{du}{\sqrt{2\alpha + \frac{\mu^2}{\beta^2} - \left(\beta u - \frac{\mu}{\beta}\right)^2}};$$

zkąd

$$\sqrt{2\alpha+\frac{\mu^2}{\beta^2}}\cos(\theta+\gamma)=\frac{\beta}{r}-\frac{\mu}{\beta},$$

co daje

$$r=\frac{\frac{\beta^2}{\mu}}{1+\sqrt{\frac{2\alpha\beta^2}{\mu^2}+1}.\cos(\theta+\gamma)}.$$

Całka czasu t staje się

$$t+\tau=\int\frac{dr}{\sqrt{2\alpha+\frac{2\mu}{r}-\frac{\beta^2}{r^2}}}.$$

Te wyniki są zgodne z danemi na stronicy 353, *Tom I.*

III° Uważajmy teraz ruch punktu określony przez równania różniczkowe

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{x}{r}f(r)+X,\qquad \frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{y}{r}f(r)+Y,$$

w których zakładamy $X=\frac{d\varphi}{dx}$, $Y=\frac{d\varphi}{dy}$, i przypuszczamy że φ funkcya zmiennych x, y jest jednorodna stopnia -2.

Kładąc $R=-\int f(r)dr$, mamy pierwszą całkę, to jest całkę sił żywych

$$\frac{1}{2}(x'^2+y'^2)-R-\varphi=\alpha.$$

Całka powierzchni nie ma już miejsca. Ale można znaleźć jej podobną. Jakoż, pomnóżmy pierwsze równanie różniczkowe przez $-y$ a drugie przez x, i dodajmy, będzie

$$\frac{d}{dt}(xy'-yx')=x\frac{d\varphi}{dy}-y\frac{d\varphi}{dx}.$$

Temu wynikowi można dać kształt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(xy' - yx')^2 = x^2\left(x\frac{d\varphi}{dy} - y\frac{d\varphi}{dx}\right)\frac{d.}{dt}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Owoż, wedle założeń możemy wziąć

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{x^3}\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{i} \quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{x^3}\mathrm{F}_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

co daje

$$x^3\frac{d\varphi}{dy} - x^2y\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{F}_1\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{y}{x}\mathrm{F}\left(\frac{y}{x}\right) = \psi'\left(\frac{y}{x}\right);$$

będzie zatem

$$\frac{1}{2}\frac{d.}{dt}(xy' - yx')^2 = d\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Druga całka jest więc

$$\frac{1}{2}(xy' - yx')^2 - \psi\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{2}\beta;$$

gdzie

$$\psi(u) = \int du\left\{\mathrm{F}_1(u) - u\mathrm{F}(u)\right\}.$$

Ponieważ warunkowi (13) staje się zadość, trzecia całka otrzyma się przez *ostatni mnożnik*. Jesteśmy więc naprzód pewni że można przywieść kwestyę do kwadratur. Ten wynik sam jeden nadaje już wielką ważność metodzie.

W obecnym przypadku możemy dokonać rachunku przez przemianę ilości zmiennych, biorąc spółrzędne biegunowe r, θ za nowe zmienne. Przypuśćmy tedy że wyrażono φ w funkcyi r i θ, a w tem wyrażeniu zamiast r i θ położono napowrót ich wartości w funkcyi x i y; będzie tożsamość

$$\varphi = f(\theta, r)$$

która daje

$$\frac{d.\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dx},$$

$$\frac{d.\varphi}{d} = \frac{d\varphi}{d\theta}\frac{d\theta}{dy} + \frac{d\varphi}{dr}\frac{dr}{dy}.$$

Ale, ponieważ przypuszczamy θ wyrażone w x i y, mamy

$$d\theta = \cos^2\theta d\frac{y}{x};$$

zkąd

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{\cos\theta}{r};$$

potem $xdx + ydy = rdr$ daje

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r} = \sin\theta.$$

Więc nakoniec

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\sin\theta}{r}\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dr}\cos\theta,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{\cos\theta}{r}\frac{d\varphi}{d\theta} + \frac{d\varphi}{dr}\sin\theta,$$

zatem

$$x\frac{d\varphi}{dy} - y\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{d\theta}.$$

Ztąd wynika że dwie znalezione całki mogą się pisać jako następuje

$$(17) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dr^2 + r^2d\theta}{dt^2} = \varphi + R + \alpha \\ \frac{1}{2}\left(\frac{r^2d\theta}{dt}\right)^2 = \int r^2\frac{d\varphi}{d\theta}d\theta \end{cases}$$

dlatego że $\quad x^2\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = r^2\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt}\frac{1}{\cos^2\theta}.$

Ale, z przyczyny że φ ma postać $\frac{1}{r}\psi(\theta)$, możemy pisać

$$(18) \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{r^2d\theta}{dt}\right)^2 = \psi(\theta) + A$$

gdzie A jest stateczną. Mnożąc na krzyż równania (17) i (18), i zastępując φ przez $\frac{1}{r^2}\psi(\theta)$, znajdujemy

$$dr^2\left\{\psi(\theta)+\mathrm{A}\right\}=r^2d\theta^2\left\{(\mathrm{R}+\alpha)r^2-\mathrm{A}\right\}.$$

Zmienne się rozłączają, i mamy zaraz całkę która daje krążnę

$$(19)\qquad \int\frac{dr}{r\sqrt{(\mathrm{R}+\alpha)r^2-\mathrm{A}}}=\pm\int\frac{d\theta}{\sqrt{\mathrm{A}+\psi(\theta)}}.$$

Dokonywa się zagadnienia wyrachowaniem całki czasu

$$t+\tau=\int\frac{r^2d\theta}{\sqrt{\psi(\theta)+\mathrm{A}}},$$

albo, na mocy równania (19),

$$t+\tau=\int\frac{rdr}{\sqrt{(\mathrm{R}+\alpha)^2-\mathrm{A}}}.$$

Równanie (19) nastręca interesującą uwag[illegible] [illegible]śli uczynimy $\psi(\theta)=0$, to jest, jeśli nie ma siły zawichrzającej, równ[illegible] krążnej będzie

$$\theta=\int\frac{\sqrt{\mathrm{A}}\,dr}{r\sqrt{(\mathrm{R}+\alpha)r^2 \text{[illegible]}}}.$$

Więc, jeśli położymy

$$\varpi(\theta)=\int d\theta\sqrt{\text{[illegible]}},$$

gdy punkt ruchomy jest poddany, opr[illegible] siły środkowej, sile zawichrzającej środkowej wyrażonej przez $-\frac{2}{r^3}\psi(\theta)$, albo ogólniej, sile wichrzącej której składowe są $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, a $\varphi=\frac{1}{r^2}\psi(\theta)$, równanie krążnej otrzyma się bez nowego rachunku. Dość będzie zastąpić θ przez $\varpi(\theta)$

w równaniu krążnej ruchu niezawichrzonego; tylko trzeba w tem ostatniem zostawić stateczne dowolne, aby je wyznaczyć w nowym ruchu.

W przypadku gdy siła wichrząca jest poprostu funkcyą promienia wodzącego r, będzie

$$2\psi(\theta)=\mu \quad \text{i} \quad \varpi(\theta)=\theta\sqrt{\frac{A}{A+\frac{\mu}{2}}}+\gamma=n\theta+\gamma.$$

Ten przypadek zwrócił baczność *Newtona*.

W ruchu elliptycznym, na przykład, jeśli wprowadzono siłę wichrzącą skierowaną ku środkowi przyciągającemu, i równą $-\frac{\mu}{r^3}$, krążna ruchu zawichrzonego będzie miała równanie

$$r=\frac{p}{1+e\operatorname{dos}(n\theta+\gamma)};$$

przypuszczając n rzeczywiste.

Uważajmy jeszcze przypadek w którym siła pierwotna jest zero. Punkt ruchomy opisuje wtedy linię prostą, której równanie jest

$$(20) \qquad r=\frac{p}{\operatorname{dos}(\theta-\alpha)}.$$

Jeśli $\frac{A}{A+\frac{1}{2}\mu}>0$, krzywa którą opisuje punkt ruchomy przyciągany przez środek stały z natężeniem $\frac{\mu}{r^3}$, będzie dana przez równanie

$$(21) \qquad r=\frac{p}{\operatorname{dos}(n\theta-\alpha)}.$$

Owoż, $A+\frac{\mu}{2}=c^2$,

stateczna c wyraża podwójną powierzchnię, opisaną w jedności czasu

przez promień wodzący punktu ruchomego; mamy więc

$$\frac{A}{A+\frac{1}{2}\mu}=\frac{c^2-\mu}{c^2}.$$

Wynik zgodny z otrzymanym na stronicy 485 *Tomu I*.

Można uważać że μ jest rzeczywiste, gdy punkt ruchomy jest odpychany; bo wtedy μ jest odjemne.

Niech będzie teraz $\frac{c^2-\mu}{c^2}=-n^2$. Trzeba zastąpić θ przez $n\theta\sqrt{-1}+\gamma$ w równaniu (20). Owoż, w tym przypadku, znaleziono na stronicy 488 *Tomu I*,

$$(22)\qquad r=\frac{2nr_0}{(n+\operatorname{cotg} i)e^{n\theta}+(n-\operatorname{cotg} i)e^{-n\theta}};$$

zastąpmy γ przez $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, β rzeczywiste albo urojone; będziemy mieli

$$(23)\qquad r=\frac{p}{\cos(n\theta+\beta)\sqrt{-1}}=\frac{2p}{e^{n\theta}e^{\beta}+e^{-n\theta}e^{-\beta}}=\frac{2pe^{\beta}}{e^{n\theta}e^{2\beta}+e^{-n\theta}}.$$

Ale równanie (22) można pisać

$$r=\frac{2nr_0}{n-\operatorname{cotg} i}\cdot\frac{1}{\frac{n+\operatorname{cotg} i}{n-\operatorname{cotg} i}e^{n\theta}+e^{-n\theta}},$$

i, żeby je żtożsamić z równaniem (23), dość jest położyć

$$e^{2\beta}=\frac{n+\operatorname{cotg} i}{n-\operatorname{cotg} i},\qquad p=\frac{nr_0}{n-\operatorname{cotg} i}e^{-\beta};$$

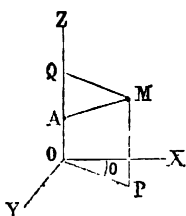
ostatnia równość jest to samo co $p=\frac{nr_0}{\sqrt{n^2-\operatorname{cotg}^2 i}}$.

Wartości dla p i β nie są rzeczywiste tylko wtedy kiedy $n^2-\operatorname{cotg}^2 i>0$.

IV° Nakoniec, będziemy uważali ruch punktu materyalnego przyciąganego przez ilekolwiek środków leżących w linii prostej; pokazując najpierwej, podług Jakobiego, że można sprowadzić to zagadnienie do ruchu na płaszczyznie.

Przede wszystkiem nie trudno sprawdzić że całka powierzchni ma miejsce dla płaszczyzny prostopadłej do linii prostej na której się znajdują wszystkie środki przyciągające; weźmiemy tę prostę za oś $z^{\text{ów}}$.

To ustaliwszy, niech będzie M położenie punktu materyalnego nakończu



czasu t, i A jeden którykolwiek ze środków przyciągających albo odpychających. Biorąc spółrzędne walcowe, czynimy kąt $POX = \theta$, $OP = u$, $MP = z$.

Mamy równanie

$$(1) \qquad u^2 \frac{d\theta}{dt} = \gamma.$$

Rozłóżmy siłę pochodzącą od A, i skierowaną względem AM na dwie, jedną skierowaną wedle MP równolegle do OZ, a drugą wedle MQ równolegle do płaszczyzny xy. I tak samo dla wszystkich innych środków. Niech będzie R wynikowa równoległa do płaszczyzny xy, Z wynikowa równoległa do OZ. Otrzymujemy równania

$$(2) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = R\cos\theta, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = R\sin\theta, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

w których $R = \varphi(u, z)$ i $Z = \psi(u, z)$, φ i ψ są funkcyami wiadomemi.

Wyrachujmy $\frac{d^2u}{dt^2}$. Znajduje się łatwo

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{1}{u^3}\left\{xy' - yx'\right\}^2 + \frac{1}{u}\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right),$$

albo, na mocy (1) i (2),

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{\gamma^2}{u^3} + R.$$

Trzeba więc tylko zcałkować układ dwóch równań

$$\frac{d^2u}{dt^2} = R + \frac{\gamma^2}{u^3}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = Z;$$

co jest właśnie zagadnieniem ruchu na płaszczyznie. Gdy zagadnienie zostanie rozwiązane, będziemy mieli u i z w funkcyi czasu t, i rachunek się dokończy przez kwadraturę,

$$\theta + c = \int \frac{\gamma dt}{u^2}.$$

Tym sposobem, aby rozwiązać zagadnienie w przestrzeni, dość jest umieć je rozwiązać na płaszczyznie przechodzącej przez oś $z^{\text{dów}}$, przydawszy tylko do składowej prostopadłej do tej osi ilość $\frac{\gamma^2}{u^3}$.

Na zastosowanie, przypuścimy że są trzy środki działające A, B, O, punkt O we środku odległości AB; dwa pierwsze środki przyciągające albo odpychające w stosunku odwrotnym kwadratu odległości, a ostatni w stosunku prostym odległości. Przypuścimy nadto że cząstka materyalna M jest poddana działaniu dwóch innych sił z natężeniami $\frac{\lambda}{\overline{MP}^3}$ i $\frac{\lambda_1}{\overline{MQ}^3}$, pierwsza równoległa do prostej AOB, druga prostopadła do tej linii. MP i MQ oznaczają odległości punktu M od płaszczyzny prostopadłej do prostej AB w samem jej środku O. Jako widzimy, zagadnienie jest niejako zogólnieniem tego które dano na stronicy 321 *tomu II*.

Zamieniając z na x, u na y, dość jest rozwiązać zagadnienie na płaszczyznie, przydając tylko wyraz $\frac{\gamma^2}{y^3}$; jeśli więc położymy $OA = b$, równania różniczkowe ruchu będą

$$(3) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -mx - k\frac{x-b}{r^3} - k'\frac{x+b}{r'^3} + \frac{\lambda}{x^3},$$

$$(4) \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -my - k\frac{y}{r^3} - k'\frac{y}{r'^3} + \frac{\lambda'}{y^3},$$

gdzie $\lambda' = \gamma^2 + \lambda_1$.

Mamy najpierwej całkę sił żywych,

$$(5)\qquad x'^2+y'^2+m(x^2+y^2)-\frac{2k}{r}-\frac{2k'}{r'}+\frac{\lambda}{x^2}+\frac{\lambda'}{y^2}=\alpha_1.$$

Znajduje się potem bez żadnej trudności

$$\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=-bk\frac{y}{r^3}\left\{(x-b)\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right\}$$

$$+bk'\frac{y}{r'^3}\left\{(x+b)\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right\}+\left(\frac{\lambda' x}{y^3}-\frac{\lambda y}{x^3}\right)\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$$

$$-b^2\left(\frac{k}{r^3}+\frac{k'}{r'^3}\right)y\frac{dy}{dt},$$

albo na mocy (5)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(xy'-yx')^2=-bk\frac{y}{r^3}\left\{(x-b)y'-yx'\right\}+bk'\frac{y}{r'^3}\left\{(x+b)y'-yx'\right\}$$

$$+\left(\frac{\lambda' x}{y^3}-\frac{\lambda y}{x^3}\right)(xy'-yx')+b^2\left(my-\frac{\lambda'}{y^3}+\frac{dy'}{dt}\right)y'.$$

Owoż, druga strona jest różniczką dokładną; więc, oznaczając przez α_2 stateczną dowolną, mamy następującą całkę

$$(6)\qquad \frac{1}{2}(xy'-yx')^2-bk\frac{x-b}{\sqrt{y^2+(x-b)^2}}+bk'\frac{x+b}{\sqrt{y^2+(x+b)^2}}$$

$$+\frac{1}{2}\lambda'\frac{x^2-b^2}{y^2}+\frac{1}{2}\lambda\frac{y^2}{x^2}-\frac{1}{2}b^2my^2-\frac{1}{2}b^2y'^2=\alpha_2$$

Metoda ostatniego mnożnika przywodzi tę kwestyę do kwadratury, i daje

$$\frac{D(\alpha_1,\alpha_2)}{D(x',y')}=(xx'+yy')(xy'-yx')-b^2x'y'.$$

Więc trzecia całka będzie

$$\int \frac{y'dx - x'dy}{(xx' + yy')(xy' - yx') - b^2x'y'} = \alpha_3,$$

gdzie trzeba zastąpić x' i y' przez ich wartości w x i y wyciągnięte z równań (5) i (6).

Mamy więc pewność że zagadnienie jest możebne. Można właśnie dokonać rozwiązania za pomocą spółrzędnych krzywolinijnych.

Wyznaczmy położenie jednego punktu płaszczyzny przez przecięcie dwóch stożkowych spółogniskowych

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} = 1$$

gdzie $\mu^2 > b^2$ a $\nu^2 < b^2$.

Kładąc $\mu' = \frac{d\mu}{dt}$, $\nu' = \frac{d\nu}{dt}$, mamy

$$x = \frac{\mu\nu}{b}, \qquad y = \frac{1}{b}\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}$$

$$x' = \frac{x}{\mu}\mu' + \frac{x}{\nu}\nu, \qquad y' = \frac{\mu}{\mu^2 - b^2}y\mu' - \frac{\nu}{b^2 - \nu^2}y\nu'.$$

$$x'^2 + y'^2 = (\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu'^2}{b^2 - \nu^2}\right).$$

Wprowadzając do rachunku te względności, można wyrazić całki (5) i (6) w funkcyi zmiennych μ i ν.

Całka sił żywych staje się

$$(\mu^2 - \nu^2)\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{\nu'^2}{b^2 - \nu^2}\right) + m(\mu^2 + \nu^2 - b^2) - \frac{4k}{\mu - \nu} - \frac{4k'}{\mu + \nu}$$

$$+ \frac{\lambda b^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{\lambda' b^2}{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)} = \alpha_1.$$

a druga

$$\nu^2 \frac{b^2-\nu^2}{\mu^2-b^2}\mu'^2+\mu^2\frac{\mu^2-b^2}{b^2-\nu^2}\nu'^2-2\mu\nu\mu'\nu'-\frac{4k(\mu\nu-b^2)}{\mu-\nu}+\frac{4k'(\mu\nu+b^2)}{\mu+\nu}$$

$$+\lambda\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{\mu^2\nu^2}+\lambda'\frac{\mu^2\nu^2-b^4}{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}-m(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)$$

$$-\left\{\mu^2\frac{b^2-\nu^2}{\mu^2-b^2}\mu'^2+\nu^2\frac{\mu^2-b^2}{b^2-\nu^2}\nu'^2-2\mu\nu\mu'\nu'\right\}=\alpha_2.$$

Można je obie wyrazić w następującym kształcie

$$(7)\qquad (\mu^2-\nu^2)\left\{\frac{\mu'^2}{\mu^2-b^2}+\frac{\nu'^2}{b^2-\nu^2}\right\}=-m(\mu^2+\nu^2-b^2)+\frac{4k}{\mu-\nu}$$

$$+\frac{4k'}{\mu+\nu}-\frac{\lambda b^2}{\mu^2\nu^2}-\frac{\lambda' b^2}{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}+\alpha_1$$

$$(8)\qquad (\mu^2-\nu^2)\left(\frac{\mu^2-b^2}{b^2-\nu^2}\nu'^2-\frac{b^2-\nu^2}{\mu^2-b^2}\mu'^2\right)=\frac{4k(\mu\nu-b^2)}{\mu-\nu}-\frac{4k'(\mu\nu+b^2)}{\mu+\nu}$$

$$-\lambda\frac{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{\mu^2\nu^2}-\lambda'\frac{\mu^2\nu^2-b^2}{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}+m(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)+\alpha_2.$$

Jeśli teraz pomnożymy na krzyż te dwa równania, zmienne się rozłączą i będzie

$$\frac{\mu'^2}{\mu^2-b^2}\left\{4\nu(k-k')-m\nu^2-\frac{\lambda'\nu^2}{b^2-\nu^2}-\lambda\frac{b^2-\nu^2}{\nu^2}+\alpha_2\right\}$$

$$=\frac{\nu'^2}{b^2-\nu^2}\left\{4\mu(k+k')-b^2m(\mu^2-b^2)-\lambda\frac{(\mu^2-b^2)}{\mu^2}-\frac{\lambda'\mu^2}{\mu^2-b^2}+\alpha_1\right\}.$$

Całkując mamy całki ultraelliptyczne pierwszego rodzaju

$$\int\frac{\mu d\mu}{\sqrt{F(\mu)}}=\int\frac{\nu d\nu}{\sqrt{F_1(\nu)}},$$

gdzie $F(\mu)$ i $F_1(\nu)$ są wielomianami 5^{go} stopnia.

Jako sprawdzenie, niech będzie $\lambda = \lambda' = m = 0$; wtedy chodzi o ruch na płaszczyźnie, punktu przyciąganego przez dwa środki stałe, w stosunku odwrotnym kwadratu odległości. W tym przypadku znajdujemy

$$\int \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{4\mu(k+k') + \alpha_1}} = \int \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{4\nu(k-k') + \alpha_2}}.$$

Połóżmy

$$\frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} = d\alpha, \qquad \frac{d\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} = d\beta;$$

powyższe całki staną się

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) + A}} = \int \frac{d\beta}{\sqrt{\varphi_1(\beta) + B}}.$$

Owoż możemy napisać $\varphi_1(\beta) + A + B - A$ zamiast $\varphi_1(\beta) + B$, i zastąpić $\varphi_1(\beta) + A + B$ przez $\psi(\beta)$; będzie więc

$$\int \frac{d\alpha}{\sqrt{\varphi(\alpha) + A}} = \int \frac{d\beta}{\sqrt{\psi(\beta) - A}}.$$

Wynik wiadomy.

Pisałem *w Reims* w Maju 1876 r.

B.-A NIEWĘGŁOWSKI.
Professor *agregat* matematyki wyższej w liceum w Reims (we Francyi).

DODATEK DO TWIERDZENIA PRACY PRZYSPOSOBIONEJ

(dla stronicy 332).

Gdy związki między punktami materyalnemi stanowiącemi układ są wyrażone przez równania, każdy z tych punktów może brać dwa przemieszczenia równe i wprost przeciwne; gdy zaś związki są przedstawione przez nierówności, wtenczas przemieszczenia punktów układu mają miejsce tylko w jedną stronę a są niemożebne w stronę wprost przeciwną. I tak, przypuśćmy na przykład że punkt materyalny jest uwiązany na jednym krańcu nici, długości R, której drugi kraniec zostaje utkwiony w punkcie stałym. Nić nie przeszkadza punktowi poruszać się wewnątrz sfery promienia R albo na jej powierzchni, ale mu nie pozwała przenikać tej powierzchni. Biorąc skrajność stałą nici za początek, widzimy że możebność ruchu punktu uwiązanego wyraża się podwójnym warunkiem

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \leqq 0.$$

W pierwszym przypadku tężność nici jest zero, i punkt (x, y, z) porusza się zupełnie wolny wewnątrz sfery; trzeba więc i dość jest, dla jego równowagi, żeby summa prac sił danych była zero, we wszystkich przemieszczeniach przysposobionych jakie on brać może. W drugim przypadku istnieje tężność nici, normalna i skierowana ku środkowi sfery, albo co to samo, oddziaływanie powierzchni sferycznej którą prze punkt zmuszony poruszać się na niej. Wtedy, między przemieszczeniami jakie temu punktowi dać można, jedne są wzdłuż powierzchni i dla nich praca oddziaływania jest zero; drugie są skierowane na wewnątrz sfery, dla tych praca oddziaływania jest dodatna. Punkt ruchomy może jeszcze i w tym przypadku być uważany jako wolny, byle zastąpiono powierzchnię przez siłę równowartą jej oporowi. Owoż, dla równowagi rzeczonego punktu, trzeba i dość jest żeby summa prac wszystkich sił, tak zewnętrznych jako wewnętrznych, była zero dla każdego przemieszczenia przysposobionego; więc summa prac sił danych jest zero dla przemieszczeń wzdłuż powierzchni; a jest *odjemna* dla przemieszczeń skierowanych ku środkowi sfery, dlatego że praca *dodatna* oddziaływania przydana do tej summy powinna uczynić zero.

To wszystko dowodzi że równowaga nie wymaga koniecznie żeby summa prac przysposobionych sił danych była zero dla wszystkich przemieszczeń możebnych. Ztąd wnosimy, uzupełniając twierdzenie pracy przysposobionej wyłożone w pierwszym tomie, że :

Gdy punkta materyalne stanowiące układ są związane z sobą tak że każdy z nich może, dla pewnych ruchów przysposobionych, przemieszczać się tylko w jedną stronę a nie w stronę przeciwną, wtedy warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi jest żeby summa prac przysposobionych, zgodnych ze związkami, była zero albo odjemna.

NOTA ODNOSZĄCA SIĘ DO STRONICY 538.

Powiedzieliśmy że *D'Alembert* zcałkował pierwszy równanie różniczkowe cząstkowe drugiego rzędu, które przedstawia ruch struny drgającej. Otóż jakim sposobem :

Niech będzie, wedle notacyi użytej w dziele, równanie o którem mowa

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a^2\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Można je pisać

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dx}\cdot a^2\frac{dy}{dx};$$

więc

$$\frac{dy}{dt}dx + a^2\frac{dy}{dx}dt = du$$

jest różniczką dokładną.

Ale

$$\frac{dy}{dt}dt + \frac{dy}{dx}dx = dy;$$

pomnóżmy ostatnie przez a i dodajmy stronami do poprzedzającego, będzie

$$\left(\frac{dy}{dt} + a\frac{dy}{dx}\right)d(x - at) = du + ay);$$

otrzyma się podobnie

$$\left(\frac{dy}{dt} - a\frac{dy}{dx}\right)d(x - at) = d(u - ay).$$

To dowodzi że summy $u + ay$ i $\frac{dy}{dt} + a\frac{dy}{dx}$ są funkcyami summy $x + at$, a tak samo różnice $u - ay$ i $\frac{dy}{dt} - a\frac{dy}{dx}$ są funkcyami różnicy $x - at$.

Zatem, oznaczając przez φ i ψ dwie funkcye dowolne, mamy

$$u + ay = \varphi(x + at),$$

$$u - ay = \psi(x - at),$$

zkąd wynika

$$u = \varphi(x + at) + \psi(x - at).$$

ZNACZNIEJSZE OMYŁKI DRUKU

TOMU DRUGIEGO.

Stronica	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj.*
25	15	MOZ	MOX
29	5 od dołu	$r \text{ wst} \theta \frac{d\theta}{dt}$	$r \text{ wst} \theta \frac{d\psi}{dt}$
89	10 od dołu	Według ostatnich doświadczeń, światło przebiega na *sekundę* 300400^{km}, albo okrągło 75000 mil.	
133	13 od dołu	które	która
241	4 od dołu	$\int_0^t Xdt$	$\sum \int_0^t Xdt$
147	2	wielkość stronę	wielkość i stronę
149	16	$\omega' dt OP$	$\omega' dt O'P$
—	18	OO	OO′
157	16	pierwsze	drugie
—	18	drugiego	pierwszego
251	13	Xds	Xdx
252	5	$d^2.mv^2$	$d.mv^2$
262	16	Twierdzenie...	Twierdzenia
276	8	l	,
—	6 od dołu	wartości	wartość
277	5	summa sił	funkcya sił
279	4	uderzenia	uderzenie
—	11 od dołu	spólny	spólnej
310	6 od dołu	mr	mr'
351	1	odwrotnym odległości	odwrotnym kwadratu odległości.
359	8 od dołu	y i z	x i y
360	16	powinno być	$G = \rho \int_{-a}^{+a} bcx^2 dx = 2\rho bc \int_0^a x^2 dx = \frac{1}{12} a^3 bc.$
363	9 i 10	k	k^2

Stronica	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj.*
185	8 od dołu	$\sum z = D$	$\sum myz = D$
385	5 od dołu	był	było
—	—	wyznaczon	wyznaczone
390	5	momenta	momenta bezwładności
394	4	będzie	będzie sfera
404	2 od dołu	5	s
414	4	$\sum mx^2$	$\sum mx$
438	1	pokazuje	i pokazuje
451	6	większą	większa
458	12	prędkości punktu	prędkości uniesienia punktu
—	3 od dołu	wszystkich	wszystkich momentów
551	7	trącącego	trącego
581	15 od dołu	powinno być: Powszechnie znane potężne machiny...	
589	2	takie parcie	taki opór
603	10	ϖb	ϖb wsi θ
672	8	P_p	P_0'
741	9	AB	A'B'
788	7 od dołu	wysokość v	prędkość v;

NIEPOPRAWIONE OMYŁKI

TOMU PIERWSZEGO.

Stronica	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj*
3	8	są także w równowadze	są w równowadze
58	ostatni wiersz	algebrycznej tej	algebrycznej momentów tych
80	6 od dołu	stających	stojących
—	7 —	jednostajnych	jednorodnych
136	11 —	znajduje się	znajdują się
156	14	Δ	Δs
190	ostatni wiersz	sty KMP	sty PKM
258	13	Δ	Δv
—	7	$v < \frac{\Delta}{\Delta s} < v'$	$v < \frac{\Delta v}{\Delta s} < v'$
328	8 od dołu	kąta	koła

Stronica	*Wiersz*	*Zamiast*	*Czytaj.*
358		przynoszonego	przymuszonego
362	4 od dołu	ds dos(ds, MK)	ds dos(ds, KM)
369	14 od dołu	$\frac{ds}{dz} > \sqrt{\frac{2z}{a}}$	$\frac{ds}{dz} > \sqrt{\frac{a}{2z}}$
380	6	$\frac{a}{g}$ wstθ	$\frac{g}{a}$ wstθ
—	11	pomnożymy	pomnóżmy
402	4 od dołu	pierwiastnikiem	pierwiastkiem
425	11 od dołu	nazwaną	nazwana
450	12	φdr	$-2\omega dr$
512	3	$\frac{dL_k}{dx}$	$\lambda_k \frac{dL_k}{dx}$
535	6 od dołu	wiele	wielu

NAKŁADEM WŁAŚCICIELA BIBLIOTEKI KÓRNICKIEJ, A PRZEWODNICZĄCEGO W TOWARZYSTWACH NAUKOWEJ POMOCY I NAUK ŚCISŁYCH W PARYŻU, WYSZŁY NASTĘPUJĄCE DZIEŁA MATEMATYCZNE:

1. NORZEWSKI ROCH. *Nouvelle théorie des proportions et progressions harmoniques avec ses applications à la géométrie.* Paris, 1852, in-8°, avec planches (wyczerpane).

2. G. H. NIEWĘGŁOWSKI, professor analizy w Szkole wyższéj Polskiéj Montparnasse, w Paryżu. Egzaminator matematyki w liceum Świętego Ludwika. —*Arytmetyka z teoryą przybliżeń liczebnych* i t. d. (Kurs zupełny, zawierający działania skrócone, błędy samoistne i względne; noty dotyczące własności liczb, wiele rozwiązanych zagadnień i ćwiczenia), in-8°, stron 352. Paryż, 1866. Cena 1 tal. 10 srg.

3. — *Geometryi część I. Geometrya płaska*, (wydanie drugie) w Paryżu, 1868 r., stron 436, in-8°, figury w tekscie. Cena 1 talar 10 srg.

4. — *Geometryi część I i II*, kurs zupełny, drugie wydanie całkiem przerobione, zawierające całą geometryę starożytnych i metody geometryi nowoczesnéj (pierwsze wydanie z 1852 roku). Paryż, 1868, in-8°, stron XV i 778. Cena 2 tal. 20 srg.

5. — *Trygonometrya prostolinijna i sferyczna z teoryą ilości urojonych i z notami.* Paryż, 1870 r., in-8°, str. XV i 407. Cena 1 tal. 15 srg.

6. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami*, wyłożył W. FOLKIERSKI, inżynier cyw, b. uczeń Szkoły Politechnicznéj w Karlsruhe, licencyat n. m. P. F. Sorbony, Professor mechaniki w Szkole Wyższéj Przygotowawczéj w Paryżu, tom I, zawierający rachunek różniczkowy, oraz dodatek Władysława Trzaski o wyznacznikach. Paryż, 1870, in-8°, str. XLIII i 1087, fig. w tekscie 136. Cena 3 tal. 10 srg.

7. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom I (Główne artykuły przez pp. Frankego, Gosiewskiego, Sągajłę, Trzaskę, Żmurkę). Paryż, 1871, in-4°, stron 186, figur 5. Cena 2 tal.

8. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom II (Artykuły pp. Gosiewskiego, Kucharzewskiego, Sągajły, Trzaski i Żalińskiego). Paryż, 1872, in-4°, stron 240, figur 8. Cena 2 tal. (Obydwa tomy razem oprawne 3 tal. 22 srg. 6 fen.).

9. *Wykład Hydrauliki* wraz z teoryą machin wodnych, poprzedzony wiadomościami wstępnemi z hydrostatyki i hydrodynamiki, przez pp. FELIKSA KUCHARZEWSKIEGO i WŁ. KLUGERA (inżynierów dyplomowanych szkoły Drógi Mostów w Paryżu). Paryż, 1873, str. LVI i 1019. Figur w tekscie 110, oprawa angielska. Cena 20 fr.

10. *Zasady rachunku różniczkowego i całkowego*, przez WŁADYSŁAWA FOLKIERSKIEGO, stałego Sekretarza i Wiceprezesa Towarzystwa Nauk Ścisłych, tom II. *Rachunek Całkowy*. Część pierwsza: Całkowanie różniczek i t. d. Paryż, 1873, in-8 stron XVI i 752, figur 76, oprawa angielska. Cena 12 franków.

11. *Wykład mechaniki cząsteczkowej* (molekularnej) przez WŁADYSŁAWA GOSIEWSKIEGO, prof. fizyki matematycznej. Tomu Igo części różniczkowej zeszyt pierwszy. Paryż, 1873, in-8°, stron 176. Cena fr. 4.

12. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom III zawierający prace pp. W. Folkierskiego, Klugera, Kucharzewskiego, Dolińskiego, Gosiewskiego i Martynowskiego. Paryż, 1873, in-4to str. VIII i 354, figur 96. Cena fr. 12.

13. *Kurs Mechaniki Rozumowej* przez G. H. NIEWĘGŁOWSKIEGO, Tom I. *Statyka. — Dynamika punktu.* Paryż, 1873, in-8° str. 544, z figurami w tekscie. Cena fr. 10.

14. *Wykład zupełny Algebry*, przez ADOLFA, SĄGAJŁĘ, w czterech tomach. Tom I: *Początki Algebry.* Paryż, 1873, in-8°, stron 632 z figurami. Cena fr. 1 0.

15. *Bibliografia Piśmiennictwa Polskiego z działu Matematyki i Fizyki* oraz *ich zastósowań*, przez Dr. TEOFILA ŻEBRAWSKIEGO, Członka Akad. Krakowskiej. Kraków, 1873 in-8°, stron 617 z 4 tablicami. Cena 9 marek.

16. *Pamiętnik Towarzystwa Nauk Ścisłych w Paryżu*, tom IV, zawierający wypracowania pp. A. Martynowskiego, K. Brandta, J. N. Frankiego, W. Klugiera, W. Puchewicza, S. Baranowskiego i Cayley'a (tłomaczenie z angielskiego). Paryż, 1874, in-4to, czterdzieści i dwa arkusze druku, z 99 figurami w tekscie. Cena 12 fr.

17. Tom V zawierający prace pp. K. Maszkowskiego, Wł. Gosiewskiego, Ł. Wojciechowskiego, J. Rostafińskiego i S. Baranowskiego. Paryż, 1874, in-4to czter-

